

УДК 532.546

© 1991 г.

Ю. Н. ГОРДЕЕВ, А. Ф. ЗАЗОВСКИЙ

## АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГЛУБОКОПРОНИКАЮЩЕМ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ РАЗРЫВЕ ПЛАСТА

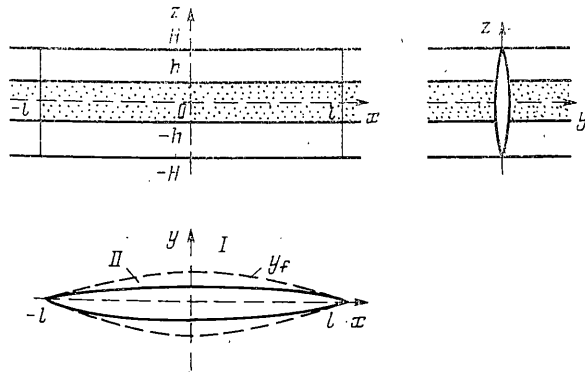
Рассматривается распространение вертикальной трещины гидроразрыва [1] постоянной высоты под действием закачиваемой в нее при постоянном давлении вязкой жидкости. Трещина считается прямоугольной, симметричной относительно скважины и сильно вытянутой в горизонтальном направлении (модель Перкинса — Керна), вязкость жидкости разрыва — отличной от вязкости пластовой жидкости, вытеснение пластовой жидкости жидкостью разрыва в пористой среде — поршневым. Движение пластовой жидкости описывается уравнением упругого режима фильтрации.

В предположении о квазистационарности течения жидкости разрыва в трещине и в пласте и локально одномерном характере фильтрационных утечек построено точное автомодельное решение задачи, соответствующее режиму нагнетания при постоянном давлении.

Анализируются показатели процесса гидроразрыва в зависимости от вязкости закачиваемой жидкости  $\mu_f$  и проницаемости пласта  $k$ . Показано, что при ограничении на давление нагнетания  $p_0$  целесообразным оказывается проведение гидроразрыва маловязкими жидкостями с последующим использованием высоковязких жидкостей лишь на стадии закрепления трещин. Полученное автомодельное решение может служить также для тестирования и отработки методов численного моделирования процесса гидравлического разрыва пласта.

**1. Постановка задачи.** Основы теории гидравлического разрыва пласта были заложены в [1–3] и обобщены в [4–11]. Другая модель вертикальной трещины гидроразрыва была предложена в [12–13] и получила дальнейшее развитие в [14–19] для расчета процессов массивованного или глубокопроникающего гидравлического разрыва пласта. Именно эта модель [19] используется ниже.

Пусть при гидравлическом разрыве пласта толщиной  $2h$  образуется вертикальная трещина постоянной высоты  $2H$  и большой протяженности  $2l \gg 2H \gg 2h$ , симметричная относительно скважины (фиг. 1). Тогда давление в трещине  $p$  в каждый момент времени можно считать постоянным в любом вертикальном сечении трещины  $x = \text{const}$ , т. е.  $p = p(x, t)$ . В силу вытянутости трещины примем гипотезу плоских сечений, в соответствии с которой в каждом сечении  $x = \text{const}$  раскрытие трещины  $2w$  определяется решением плоской задачи теории упругости и пропорционально разности между локальным значением давления в трещине  $p(x, t)$  и боковым горным давлением  $\sigma = \text{const}$ . При этом в концах трещины  $x = \pm l(t)$  будем задавать условие плавного смыкания поверхностей:  $p = \sigma$  (аналог условия С. А. Христиановича [1, 3]). Проницаемость пласта  $k$  будем считать достаточно малой, вязкость жидкости разрыва  $\mu_f$ , отличной от вязкости пластовой жидкости  $\mu_0$ , вытеснение одной жидкости другой — поршневым, а зону проникновения в пласт жидкости разрыва — тонкой, прилегающей к поверхностям трещины, пересекающим продуктивный пласт. Тогда движение в зоне проникновения естественно считать квазистационарным и



Фиг. 1

одномерным, происходящим в перпендикулярном к поверхностям трещины направлении. Движение пластовой жидкости вне зоны проникновения будем считать плоским, подчиняющимся уравнению упругого режима фильтрации.

В рамках этих предположений процесс гидравлического разрыва пласта описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \langle w \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle wv \rangle}{\partial x} = -2hq_L, \quad \langle f \rangle = \int_{-H}^H dz f(z) \quad (1.1)$$

$$v(x, z, t) = -\frac{w^2}{3\mu_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$w(x, z, t) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \sqrt{H^2 - z^2} [p(x, t) - \sigma] \quad (1.3)$$

$$|x| \leq l(t), \quad |z| \leq H$$

$$u = -\frac{k}{\mu_f} \frac{\partial p_{II}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad w \leq |y| \leq y_f \quad (1.4)$$

$$u = -\frac{k}{\mu_0} \nabla p_I, \quad \frac{\partial p_I}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 p_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_I}{\partial y^2} \right) \quad (1.5)$$

$$|x| \leq l(t), \quad |y| \geq y_f; \quad |x| \geq l(t), \quad |y| \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y_f(x, t) = \frac{1}{m} u(x, y_f, t) \quad (1.6)$$

Здесь  $v$  и  $u$  — скорости движения жидкости в трещине и ее фильтрации в пласте,  $q_L(x, t)$  — плотность фильтрационных утечек через поверхности трещины,  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона пласта и окружающих пород,  $y_f(x, t)$  — глубина проникновения в пласт жидкости разрыва,  $p_I$  и  $p_{II}$  — давления в пласте в областях фильтрации пластовой жидкости (I) и в зоне проникновения (II),  $\kappa$  — коэффициент пьезопроводности пласта,  $m$  — пористость.

Уравнение (1.1) — уравнение неразрывности потока в трещине, (1.2) — формула Буссинеска для движения вязкой жидкости в узкой щели, (1.3) — решение плоской задачи теории упругости о трещине при однородном нагружении ее поверхностей, (1.4) и (1.5) — закон фильтрации Дарси и уравнение непрерывности для течений в пласте жидкости разрыва в зоне

проникновения и пластовой жидкости, (1.6) — кинематическое уравнение границы зоны проникновения.

Для замыкания системы (1.1) — (1.6) имеем условие плавного смыкания поверхностей трещины

$$p(\pm l(t), t) = \sigma \quad (1.7)$$

и условия непрерывности давлений и потоков на поверхностях трещины  $y = w(x, t)$  и фронте проникновения

$$p(x, t) = p_{II}(x, w, t), \quad q_L(x, t) = u(x, w, t) \quad (1.8)$$

$$p_{II}(x, y_f, t) = p_I(x, y_f, t), \quad u(x, y_f, t) = - \frac{k}{\mu_0} \frac{\partial p_I}{\partial y} \Big|_{y=y_f} \quad (1.9)$$

Кроме того, должны быть заданы начальные условия — пластовое давление  $p^0$ , начальный размер трещины  $l_0$  и начальная глубина проникновения в пласт жидкости разрыва  $y_f^0(x)$ , а также режим нагнетания жидкости в трещину. Таким образом, будем иметь

$$p_I(x, y, 0) = p^0, \quad l(0) = l_0, \quad y_f(x, 0) = y_f^0(x), \quad p(0, t) = p_0 \quad (1.10)$$

где  $p_0$  — давление нагнетания жидкости разрыва ( $p_0 > \sigma$ ).

В силу принятых предположений  $w \ll l_0$  и  $y_f \ll l_0$ , поэтому в дальнейшем будем пользоваться следующими естественными упрощениями задачи. При расчете течения в зоне проникновения II перенесем условия на поверхностях трещины  $|y| = w$  в плоскость  $y = 0$ , от которой будем отсчитывать далее глубину зоны проникновения  $y_f(x, t)$ . Точно так же при решении внешней задачи в области I границу зоны проникновения  $y = y_f$  можно сместить в плоскость  $y = 0$ .

Подстановка (1.2) и (1.3) в (1.1) дает уравнение относительно распределения давления в трещине

$$a \frac{\partial}{\partial t} (p - \sigma) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p - \sigma)^4 + b q_L = 0 \quad (1.11)$$

$$|x| \leq l(t), \quad a = \frac{4\mu_f E^2}{(1-\nu^2)^2 H^2}, \quad b = \frac{8h\mu_f E^3}{\pi(1-\nu^2)^3 H^4}$$

содержащее неизвестные фильтрационные утечки  $q_L(x, t)$ .

Из уравнений (1.4) следует, что в слое проникновения давление  $p_{II}(x, y, t)$  — линейная функция координаты  $y$ . Поэтому скорость фильтрации в слое  $u(x, t)$  не зависит от поперечной координаты  $y$  и совпадает в силу (1.8) с  $q_L(x, t)$ . Обозначим через  $p_f(x, t)$  давление на границе зоны проникновения  $y = y_f$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} y_f(x, t) = \frac{1}{m} q_L(x, t) \quad (1.12)$$

$$q_L(x, t) = \frac{k}{\mu_f} \frac{p(x, t) - p_f(x, t)}{y_f(x, t)} \quad (1.13)$$

$$p_I(x, 0, t) = p_f(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial y} p_I \Big|_{y=0} = - \frac{\mu}{k} q_L(x, t) \quad (1.14)$$

Итак, для определения неизвестных функций  $p(x, t)$ ,  $q_L(x, t)$ ,  $y_f(x, t)$ ,  $p_f(x, t)$  имеем четыре уравнения (1.11) — (1.14); входящая в них функция  $p_I(x, y, t)$  должна удовлетворять уравнению пьезопроводности (1.5), а для отыскания размера трещины  $l(t)$  служит условие (1.7). Вместе с условиями (1.10) они образуют полную систему уравнений для решения поставленной задачи.

2. Переход к безразмерным переменным. Перейдем к новым переменным по формулам

$$\tau = \frac{t}{t_0}, \quad X = \frac{x}{l(t)}, \quad Y = \frac{y}{y_0 f(\tau)}, \quad L(\tau) = \frac{l(t)}{l_0} \quad (2.1)$$

$$P(X, \tau) = \frac{p}{\sigma}, \quad P_I(X, Y, \tau) = \frac{p_I}{\sigma}, \quad P_f(X, \tau) = \frac{p_f}{\sigma}, \quad Q_L(X, \tau) = \frac{q_L}{q_{L_0} \varphi(\tau)}$$

$$Y_f(X, \tau) = \frac{y_f}{y_0 f(\tau)}, \quad P_0 = \frac{p_0}{\sigma}, \quad P^0 = \frac{p^0}{\sigma}, \quad \mu = \frac{\mu_f}{\mu_0}$$

где  $t_0$ ,  $y_0$  и  $q_{L_0}$  — масштабные коэффициенты, а  $f(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  — неизвестные функции, подлежащие уточнению.

После преобразований система уравнений поставленной задачи в переменных (2.1) имеет вид

$$-\frac{\varepsilon}{\varphi(\tau)} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{L}{L} X \frac{\partial}{\partial X} \right) (P-1) + \frac{L^{-2}(\tau)}{\varphi(\tau)} \frac{\partial^2}{\partial X^2} (P-1)^4 = Q_L$$

$$4\delta \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{L}{L} X \frac{\partial}{\partial X} \right) [f(\tau) Y_f] = \varphi(\tau) Q_L \quad (2.2)$$

$$\varphi(\tau) Q_L = \frac{1}{f(\tau)} \frac{P - P_f}{Y_f}$$

$$P_I(X, 0, \tau) = P_f(X, \tau), \quad \left. \frac{\mu}{f(\tau)} \frac{\partial P_I}{\partial Y} \right|_{Y=0} = -\varphi(\tau) Q_L$$

$$4f^2(\tau) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} P_I - \frac{L}{L} X \frac{\partial}{\partial X} P_I - \frac{f}{f} Y \frac{\partial}{\partial Y} P_I \right) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} P_I + \left[ \frac{y_0 f(\tau)}{l_0 L(\tau)} \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} P_I,$$

где точка означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ , и

$$q_{L_0} = \frac{\pi(1-\nu^2)^3 H^4 \sigma^4}{8h l_0^2 \mu_f E^3}, \quad y_0 = \frac{k\sigma}{\mu_f q_{L_0}}, \quad t_0 = \frac{y_0^2}{4\kappa} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_f}{\sigma t_0} \left[ \frac{2El_0}{(1-\nu^2)H\sigma} \right]^2, \quad \delta = \frac{m\kappa\mu_0}{k\sigma} \mu$$

Условие плавного смыкания поверхностей трещины (1.7) принимает вид

$$P(1, \tau) = 1 \quad (2.4)$$

а из (1.10) имеем

$$P_I(X, Y, 0) = P^0, \quad L(0) = 1, \quad Y_f(X, 0) = Y_f^0(X), \quad P(0, \tau) = P_0 \quad (2.5)$$

$$Y_f^0 = y_f^0 / [y_0 f(0)]$$

3. Квазистационарный режим распространения трещины. Система (2.2) содержит малый параметр  $(y_0/l_0)^2$ , характеризующий отношение толщины зоны проникновения в пласт жидкости разрыва к размеру трещины. Полагая его равным нулю, получаем систему уравнений

$$-\varepsilon \left( L^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - LLX \frac{\partial}{\partial X} \right) (P-1) + \frac{\partial^2}{\partial X^2} (P-1)^4 = L^2 \varphi(\tau) Q_L \quad (3.1)$$

$$4\delta \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{L}{L} X \frac{\partial}{\partial X} \right) [f(\tau) Y_f] = \varphi(\tau) Q_L, \quad P - P_f = \varphi(\tau) f(\tau) Y_f Q_L$$

$$P_I(X, 0, \tau) = P_f(X, \tau), \quad \left. \mu \frac{\partial P_I}{\partial Y} \right|_{Y=0} = -\varphi(\tau) f(\tau) Q_L$$

$$4f^2(\tau) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} P_I - \frac{L}{L} X \frac{\partial}{\partial X} P_I - \frac{f}{f} Y \frac{\partial}{\partial Y} P_I \right) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} P_I$$

Будем искать ее стационарные решения  $P(X)$ ,  $Q_L(X)$ ,  $P_f(X)$ ,  $Y_f(X)$ ,  $P_I(X, Y)$ . Если функции  $f(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  выбрать в виде

$$f(\tau) = L^2(\tau), \quad \varphi(\tau) = L^{-2}(\tau) \quad (3.2)$$

а функцию  $L(\tau)$  — как решение уравнения

$$4 \frac{f}{\varphi} \frac{L}{L} = 4f^2 \frac{L}{L} = 4L^3 L' = \alpha = \text{const} \quad (3.3)$$

то все уравнения (3.1), кроме первого, при  $\partial/\partial \tau = 0$  не будут зависеть от времени. При этом первое уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{\varepsilon \alpha}{4L^2} X \frac{\partial}{\partial X} (P-1) + \frac{\partial^2}{\partial X^2} (P-1)^4 = Q_L \quad (3.4)$$

Зависимость от времени в нем сохраняется из-за коэффициента  $\varepsilon \alpha / (4L^2)$  перед первым членом, который учитывает изменения объема трещины при изменениях в ней давления. В тех случаях, когда фильтрационные утечки  $Q_L$  велики, вклад этого члена в перераспределение потока жидкости в трещине становится мал ( $\varepsilon \alpha \ll 1$ ) и поэтому им можно пренебречь.

Уравнение (3.3) интегрируется в явном виде; с учетом начального условия  $L(0) = 1$  находим  $L(\tau) = (1 + \alpha \tau)^{1/4}$ . Параметр  $\alpha$  вместе с функциями  $P(X)$ ,  $Q_L(X)$ ,  $P_f(X)$ ,  $Y_f(X)$  и  $P_I(X, Y)$  подлежат определению из системы уравнений

$$\frac{d^2}{dX^2} (P-1)^4 = Q_L \quad (3.5)$$

$$\varepsilon \alpha \left( 2Y_f - X \frac{d}{dX} Y_f \right) = Q_L \quad (3.6)$$

$$P_f = P - Y_f Q_L \quad (3.7)$$

$$P_I(X, 0) = P_f, \quad \mu \frac{\partial}{\partial Y} P_I \Big|_{Y=0} = -Q_L \quad (3.8)$$

$$-\alpha \left( X \frac{\partial}{\partial X} P_I + 2Y \frac{\partial}{\partial Y} P_I \right) = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} P_I \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dX} (P-1)^4 = 0 \quad (|X|=1) \quad (3.10)$$

Здесь дополнительное соотношение (3.10) выражает условие «непротекания» в концах трещины — равенство скорости распространения трещины скорости заполнения ее жидкостью разрыва, осредненной по вертикальному сечению трещины. Именно это условие используется для определения параметра  $\alpha$ .

Функции  $P(X)$  и  $P_I(X, Y)$  в соответствии с (2.4) и (2.5) должны удовлетворять условиям

$$P(1) = 1, \quad P(0) = P_0 \quad (3.11)$$

и условию невозмущенности на бесконечности. Постановка последнего в данном случае, однако, оказывается не вполне тривиальной.

В самом деле, после понижения порядка уравнения теплопроводности по переменной  $X$ , означающего переход к схеме локально одномерных утечек, его решение должно отыскиваться уже не в полуплоскости  $Y \geq 0$ , а в полуполосе  $|X| \leq 1$ ,  $Y \geq 0$ . При этом на границах полуполосы задавались

граничные условия

$$P_I(X, Y) = P^0 (|X|=1 \quad Y \geq 0; \quad |X| < 1, \quad Y \rightarrow \infty) \quad (3.12)$$

Невозмущенность потока на границах полуполосы  $|X|=1$  имеет простой физический смысл. А именно, в силу одномерного характера утечек, возмущения потока перед концами трещины ( $|X| > 1$ ) отсутствуют. Следовательно, они отсутствуют и на границах возмущенной и невозмущенной областей — полупрямых  $|X|=1$ . Тем самым обеспечивается непрерывность решения задачи.

**4. Построение автомодельного решения.** Задача (3.5) — (3.13) нелинейна, поэтому ее решение будем строить методом последовательных приближений. Для этого зададимся некоторым начальным приближением функции  $P_I$  и найдем решение уравнения (3.9), удовлетворяющее первому условию (3.8). Затем из второго условия (3.8) выразим  $Q_L$ . После этого подставим  $Q_L$  в уравнение (3.5) и найдем из него  $P$ . Далее из условия (3.10) вычислим  $\alpha$ , из уравнения (3.6) найдем  $Y_I$  и, наконец, используя уравнение (3.7), уточним  $P_I$ . Итерации продолжаются до сходимости итерационного процесса.

Итак, рассмотрим сначала уравнение (3.9); его решение в полуполосе  $0 \leq X \leq 1, Y \geq 0$  удобно искать в новых переменных

$$\xi = X^2, \quad \eta = \sqrt{2\alpha} Y, \quad \Phi_I = P_I - P^0, \quad \Phi_I = P_I - P^0 \quad (4.1)$$

Тогда функция  $\Phi_I(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению

$$-\left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_I + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi_I \right) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Phi_I \quad (4.2)$$

общее решение которого можно найти методом разделения переменных. Подставляя в (4.2)

$$\Phi_I(\xi, \eta) = R(\xi) F(\eta) \quad (4.3)$$

получим два уравнения

$$\xi \frac{d}{d\xi} R = \lambda R, \quad \frac{d^2}{d\eta^2} F + \eta \frac{d}{d\eta} F = -\lambda F, \quad \lambda = \text{const} \quad (4.4)$$

Воспользуемся их решениями при  $\lambda = 0$

$$R_0 = c_0 = \text{const}, \quad F_0 = \text{erfc}(2^{-1/2} \eta) \quad (4.5)$$

и при  $\lambda = n+1, n \geq 0$

$$R_{n+1} = \xi^{n+1}, \quad F_{n+1} = \exp(-1/2 \eta^2) H_n(2^{-1/2} \eta) \quad (4.6)$$

где  $H_n(\xi)$  — многочлены Эрмита, ортогональные на прямой  $-\infty < \xi < \infty$  с весом  $\exp(-\xi^2)$ .

Система функций  $F_{n+1}(\eta)$ ,  $n \geq 0$  полна на прямой  $-\infty < \eta < \infty$ , однако связанная с ней система функций  $R_{n+1} = \xi^{n+1}$  полной на отрезке  $0 \leq \xi \leq 1$  не является, так как не содержит постоянной. Это обстоятельство не позволяет ограничиться разложением решения по произведениям функций (4.6)  $R_{n+1}(\xi) F_n(\eta)$  и требует привлечения решения (4.5)  $R_0 F_0(\eta)$ . В результате получим общее решение уравнения (4.2) в виде

$$\Phi(\xi, \eta) = c_0 \text{erfc}(2^{-1/2} \eta) + \exp(-1/2 \eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \xi^{n+1} H_n(2^{-1/2} \eta) \quad (4.7)$$

которое необходимо найти в полуполосе  $0 \leq \xi \leq 1, \eta > 0$  при граничных условиях, следующих из (3.8), (3.12):

$$\Phi_I(\xi, 0) = \Phi_I(\xi), \quad \Phi(1, \eta) = 0 \quad (4.8)$$

Специфика разложения (4.7) заключается в том, что свойства ортогональности многочленов Эрмита на прямой  $-\infty < \xi < \infty$  с весом  $\exp(-\xi^2)$  при сужении на полупрямую сохраняется отдельно только для многочленов четных и нечетных номеров. Кроме того, функция  $F_0(\eta)$  не ортогональна ни одной из функций  $F_{n+1}(\eta)$ ,  $n \geq 0$ . Тем не менее это не препятствует определению коэффициентов  $c_0, c_1, \dots$  разложения (4.7).

Воспользуемся сначала первым условием (4.8). При  $\eta=0$  из (4.7) получаем

$$\Phi_f = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \xi^{2n+1} \quad (4.9)$$

$$a_{2n+1} = c_{2n+1} H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} c_{2n+1}$$

Если функция  $\Psi(\xi) = \Phi_f(\xi) - c_0$  известна, то коэффициенты  $a_{2n+1}$ , а значит и  $c_{2n+1}$ , находятся путем разложения  $\Psi(\xi)$  на отрезке  $0 \leq \xi \leq 1$  по полной на этом отрезке системе функций  $\xi^{2n+1}$ ;  $n=0, 1, \dots$

Если коэффициенты  $c_{2n+1}$  найдены, то второе условие (4.8) может быть использовано для определения коэффициентов  $c_{2n}$  при четных степенях  $\xi$ . Имеем

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} H_{2n-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) = G(\eta) \quad (4.10)$$

$$G(\eta) = -c_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) - \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} H_{2n}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)$$

где  $G(\eta)$  — уже известная функция.

Используя свойство ортогональности многочленов Эрмита  $H_{2n-1}(2^{-1/2}\eta)$ ,  $n=1, 2, \dots$  на полупрямой  $\eta \geq 0$  с весом  $\exp(-\eta^2/2)$ , коэффициенты  $c_{2n}$  можно явно выразить через  $c_0$  и  $c_{2n+1}$ :

$$c_{2i} = \frac{(-1)^i b_{2i}}{\sqrt{\pi} 2^{2i-1} (i-1)!}, \quad b_{2i} = \frac{c_0}{i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{i-n-1/2} \quad (4.11)$$

Теперь можно выразить искомые функции  $Q_L, P, Y_f$  через коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, \dots$

Подставляя (4.7) во второе условие (3.8), с учетом (4.1) и (4.11) получаем

$$Q_L(\xi) = \mu \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left[ 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! b_{2n}}{(2n-2)!!} \xi^{2n} \right] \quad (4.12)$$

Подстановка (4.12) в (3.8) после интегрирования с учетом условий (3.11) дает

$$P(\xi) = 1 + \left\{ \left[ (P_0 - 1)^4 - c_0 \mu \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \xi^{1/2} \right] (1 - \xi^2) - \mu \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! b_{2n} (1 - \xi^{2n+1/2})}{(2n-2)!! (4n+1) (4n+2)} \right\} \quad (4.13)$$

Наконец, используя уравнение (3.6) и условие (3.13), находим

$$Y_f(\xi) = \frac{\mu}{\delta \sqrt{\pi \alpha}} \left[ c_0 (1 - \xi) + \frac{\xi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! b_{2n} (1 - \xi^{2n-1})}{(2n-2)!! (2n-1)} \right] \quad (4.14)$$

Неизвестную константу  $\alpha$ , входящую в выражение (4.12)–(4.14), найдем из условия (3.10), которое после перехода к переменной  $\xi$  принимает вид

$$d(P-1)^4/d\xi=0 \quad (\xi=1) \quad (4.15)$$

Подставляя в (4.15) выражение (4.13), получаем

$$\alpha = \frac{\pi}{\mu^2} (P_0-1)^6 \left[ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! b_{2n}}{(2n-2)!! (4n+2)} \right]^{-2} \quad (4.16)$$

Теперь если воспользоваться уравнением (3.7) при  $\xi=0$ , то можно найти коэффициент  $c_0$  в явном виде. Имеем

$$c_0 = \frac{\pi\delta}{4\mu^2} \left[ \left( 1 + \frac{8\mu^2(P_0-P^0)}{\pi\delta} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (4.17)$$

Таким образом, все параметры процесса гидроразрыва — закон распространения трещины  $L(\tau)$ , давление жидкости в ней  $P$ , интенсивность утечек через ее поверхности  $Q_L$ , глубину проникновения в пласт жидкости разрыва  $Y_f$  и давление на фронте проникновения  $P_f$  — удалось выразить через коэффициенты разложения давления в пласте (4.7)  $c_{2n+1}$  при нечетных степенях  $\xi$ , которые эффективно находятся методом последовательных приближений с использованием стандартных численных методов на основе многочленов Чебышева.

**6. Асимптотики.** Некоторые особенности автомоделного решения удастся выяснить аналитически до его численного построения. Они оказываются полезными для качественного анализа основных закономерностей процесса гидроразрыва, а также при реализации численного метода.

Найдем сначала главный член разложения автомоделного решения, которому отвечает равенство нулю коэффициентов  $b_{2n}$  в формулах (4.12)–(4.14), (4.16). Используя выражение (4.17) для  $c_0$ , получаем

$$Q_L(\xi) = 2(P_0-1)^4, \quad P(\xi) = 1 + (P_0-1)(1-\xi^{1/2})^{1/2} \quad (5.1)$$

$$Y_f(\xi) = \frac{c_0^2 \mu^2 (1-\xi)}{\pi\delta (P_0-1)^4} = \frac{\pi\delta (1-\xi)}{16\mu^2 (P_0-1)^4} \left[ \left( 1 + \frac{8\mu^2(P_0-P^0)}{\pi\delta} \right)^{1/2} - 1 \right]^2$$

Если теперь (5.1) подставить в (3.7), можно найти давление на фронте проникновения в пласт жидкости разрыва

$$\begin{aligned} P_f(\xi) &= 1 + (P_0-1)(1-\xi^{1/2})^{1/2} - \frac{2c_0^2 \mu^2 (1-\xi)}{\pi\delta} = \\ &= 1 + (P_0-1)(1-\xi^{1/2})^{1/2} - \frac{\pi\delta (1-\xi)}{8\mu^2} \left[ \left( 1 + \frac{8\mu^2(P_0-P^0)}{\pi\delta} \right)^{1/2} - 1 \right]^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Однако это распределение давления не удовлетворяет условию невозмущенности давления перед концом трещины  $P_f(1)=P^0$ . Действительно, в данном случае  $P_f(1)=1$ , т. е. давление на границе зоны проникновения  $P_f$  при приближении к концу трещины стремится к давлению жидкости в трещине  $P(1)=1$ . В результате в окрестности кончика трещины в сечении  $\xi=1$  возникает зона возмущения пластового давления. Ее характерный размер в безразмерных переменных оценивается величиной  $\eta_1 \approx \approx \sqrt{\pi\alpha}/2$ , а в размерных переменных — убывает со временем обратно пропорционально квадрату длины трещины. Этот дефект решения является следствием отбрасывания старших членов разложения.

Таким образом, приближенное решение (5.1), (5.2) совпадает с точным решением в середине трещины ( $\xi=0$ ), где расположена скважина, и все сильнее отклоняется от точного решения по мере приближения к концу трещины ( $\xi=1$ ). Такая же тенденция поведения сохраняется и



для уточненных приближенных решений, получаемых с учетом следующих членов разложения. Это обстоятельство связано с тем, что построенное разложение автоматического решения не учитывает явно особенностей его поведения вблизи кончика трещины.

Чтобы найти асимптотику точного решения в окрестности кончика трещины, достаточно воспользоваться уравнениями (3.5)–(3.7). Из (3.7) имеем

$$Q_L = \frac{P - P_f}{Y_f} \approx \frac{1 - P^0}{Y_f} \quad (\xi \rightarrow 1) \quad (5.3)$$

Подстановка этого соотношения в (3.6) дает уравнение относительно  $Y_f$ , которое интегрируется в явном виде

$$Y_f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(1 - P^0)}{\delta \alpha} (1 - \xi^2)} \quad (\xi \rightarrow 1) \quad (5.4)$$

Далее из (5.3) и (3.5) можно найти асимптотики поведения  $Q_L(\xi)$  и  $P(\xi)$  в окрестности кончика трещины. В итоге получаем соотношения

$$Q_L(\xi) \sim \Delta^{-1/2}, \quad P(\xi) - 1 \sim \Delta^{3/2}, \quad Y_f(\xi) \sim \Delta^{1/2}, \quad \Delta = 1 - \xi^{1/2} \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

Сравнивая их с формулами (5.1), видим, что для точного решения приведенное давление  $P(\xi) - 1$  и глубина зоны проникновения  $Y_f(\xi)$  вблизи кончика трещины стремятся к нулю медленнее, чем это предсказывают формулы первого приближения (5.1). Кроме того, распределение фильтрационных утечек  $Q_L(\xi)$  вблизи кончика трещины имеет корневую особенность точно так же, как и в стационарной задаче о фильтрации жидкости из неподвижной трещины бесконечной проводимости [9].

**6. Обсуждение результатов.** Цель расчетов заключалась в исследовании влияния двух основных параметров — проницаемости пласта  $k$  и вязкости жидкости разрыва  $\mu_f$  на динамику главных показателей процесса гидроразрыва — размер трещины  $l$ , ее раскрытие  $2w$ , объем  $V$ , глубину проникновения в пласт жидкости разрыва  $y_f$  и общее количество профильтровавшей в пласт жидкости  $V_f$ . Остальные параметры фиксировались:  $2H = 2h = l_0 = 10$  м;  $E = 10^4$  МПа;  $\nu = 0,25$ ;  $\sigma = 50$  МПа;  $\kappa = 0,1$  м<sup>2</sup>/с;  $m = 0,1$ ;  $\mu_0 = 5$  мПа·с;  $p^0 = 20$  МПа;  $p_0 = 52,5$  МПа.

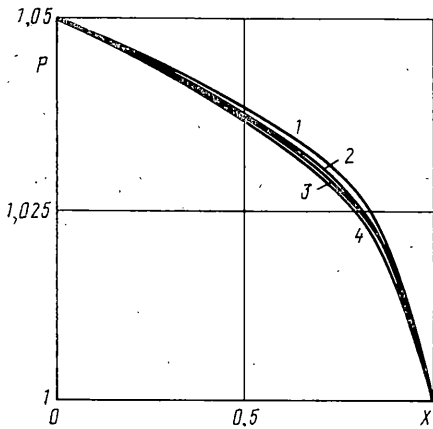
Начальный размер трещины  $l_0 = 10$  м был выбран достаточно произвольно, так как он слабо влияет на конечные показатели процесса при  $l \gg l_0$ .

Выбор давления нагнетания производился из следующих соображений. Обычно диапазон изменения давления нагнетания ограничен сверху из-за опасности разрыва породы в вертикальном направлении. По данным [20] величина  $(p_0 - \sigma)/\sigma$  относительного превышения бокового давления при гидроразрыве, как правило, заключена в пределах  $0,001 \div 0,05$ . Полагая  $(p_0 - \sigma)/\sigma = 0,05$ , получаем  $p_0 = 1,05 \sigma = 52,5$  МПа.

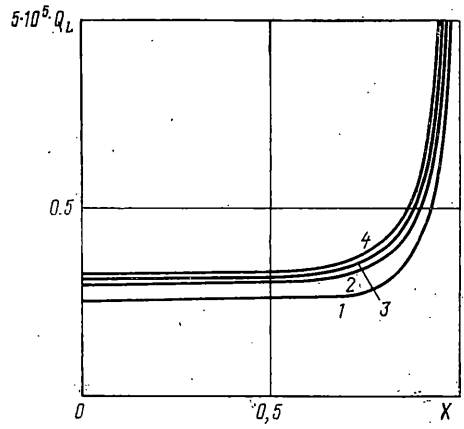
Наконец, отметим, что высота трещины  $2H$  в рамках модели Перкинса — Керна не определяется, а должна задаваться из дополнительных соображений. В расчетах считалось, что она совпадает с толщиной пласта  $2h = 10$  м.

Рассматривались четыре варианта процесса, отвечающие двум значениям вязкости жидкости разрыва  $\mu_f = 50$  и  $500$  мПа·с и двум значениям проницаемости пласта  $k = 0,01$  и  $0,1$  мкм<sup>2</sup>. Соответствующие значения безразмерных параметров  $\mu$  и  $\delta$  приведены ниже

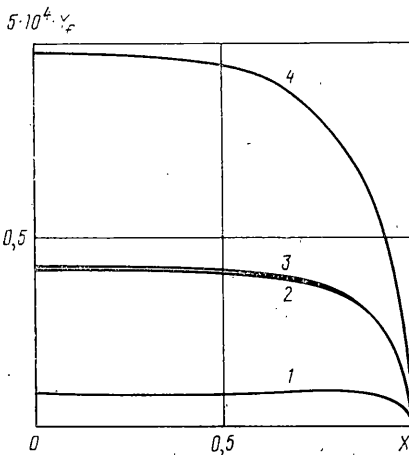
Вариант	1	2	3	4
$\mu_f$ , Па·с	0,05	0,05	0,5	0,5
$k$ , мкм <sup>2</sup>	0,01	0,1	0,01	0,1
$\mu$	10	10	100	100
$\delta$	$10^3$	$10^2$	$10^4$	$10^3$
$\alpha \cdot 10^{13}$	7,74	18,3	0,183	0,819
$\Pi_1 \cdot 10^2$	3,61	3,52	3,5	3,48
$\Pi_2 \cdot 10^{-4}$	0,412	1,87	1,87	4,24
$Y_f(0) \cdot 10^{-4}$	0,401	2,05	2,1	4,93
$\Omega_V \cdot 10^2$ , м <sup>2</sup>	5,32	5,2	5,16	5,12
$\Omega_f \cdot 10^4$	0,326	14,8	1,48	33,6
$\Omega_y \cdot 10^3$ , м <sup>-1</sup>	0,793	40,7	4,07	97,7
$\Omega_Q$ , м <sup>4</sup> /с	1,9	2,08	0,208	0,211
$\Omega_l$ , м <sup>4</sup> /с	$7,9 \cdot 10^4$	$1,87 \cdot 10^3$	$1,87 \cdot 10^3$	83,5



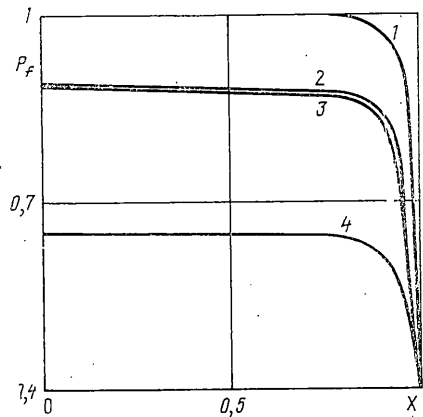
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Здесь же указаны найденные значения параметра  $\alpha$ , характеризующего скорость распространения трещины. Безразмерные автомодельные распределения давления в трещине  $P$ , плотности фильтрационного потока через ее поверхности  $Q_L$ , глубины проникновения в пласт жидкости разрыва  $Y_f$  и давления на фронте проникновения  $P_f$  для этих вариантов показаны на фиг. 2–5. Обозначения кривых на всех графиках совпадают с номерами вариантов.

Отметим некоторые особенности найденных автомодельных решений. Давление в трещине  $P$  (фиг. 2) ведет себя почти линейно по  $X$  в средней части трещины и быстро убывает вблизи ее концов. Оно очень слабо меняется от варианта к варианту, незначительно убывая с ростом вязкости жидкости разрыва и проницаемости пласта.

Функция  $Q_L(X)$ , определяющая утечки, также весьма слабо зависит от параметров  $\mu$  и  $\delta$  (фиг. 3). При этом утечки почти постоянны в средней части трещины и резко возрастают к ее концам. Соответствующим образом меняется толщина слоя проникновения в пласт жидкости разрыва  $Y_f(X)$  (фиг. 4): в средней части трещины она почти постоянна, а вблизи концов трещины резко убывает до нуля. Однако  $Y_f$  значительно сильнее зависит от параметров  $\mu$  и  $\delta$ , чем  $Q_L$ . Сходный вид имеют и распределения давления на фронте проникновения  $P_f$  (фиг. 5): только  $P_f$  еще более круто, чем  $Y_f$ , стремятся к своему предельному значению  $p^0/\sigma$  при  $X \rightarrow 1$ .

Интересно отметить, что для второго и третьего вариантов, отличающихся десятикратными разнонаправленными изменениями вязкости жидкости разрыва и проницаемости пласта при постоянстве их отношения  $k/\mu_f$ , соответствующие функции  $Y_f$  и  $P_f$ , практически совпадают. Если теперь сравнить эти варианты с первым и четвертым, то окажется, что увеличения и вязкости жидкости разрыва и проницаемости пласта приводят к одним и тем же последствиям — при достижении трещинами одинаковой длины толщина слоя проникновения возрастает.

Полученный результат оказывается довольно неожиданным. Казалось бы, с увеличением вязкости жидкости разрыва утечки должны убывать. Однако увеличение вязкости при фиксированном давлении нагнетания приводит к уменьшению темпа закачки в трещину жидкости разрыва. При этом скорость распространения трещины падает, а время гидроразрыва возрастает. В результате оказывается, что несмотря на увеличение вязкости закачиваемой жидкости объем утечек через поверхности трещины возрастает.

Выразим основные показатели гидроразрыва через параметры автомодельных решений. Используя (2.1), (2.3), (3.2)–(3.4) получаем следующие выражения для объема трещины  $V$ , объема утечек  $V_f$ , максимальной глубины проникновения в пласт жидкости разрыва  $y_{f_0} = y_f(0, t)$  и размера трещины:

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_{-l}^l \langle w \rangle dx = \frac{4\pi(1-\nu^2)\sigma H^2}{E} \Pi_1 l; \quad \Pi_1 = \int_0^1 (P-1) dX \\
 V_f &= 4mh \int_{-l}^l y_f dx = \frac{64mkh^2}{\pi H^2} \left[ \frac{E}{(1-\nu^2)\sigma} \right]^3 \Pi_2 l^3, \quad \Pi_2 = \int_0^1 dX Y_f \\
 Y_{f_0} &= y_{f_0} Y_f(0) = \frac{8kh}{\pi H^2} \left[ \frac{E}{(1-\nu^2)\sigma} \right]^3 Y_f(0) l^2 \\
 l &= \left\{ l_0^4 + \alpha \left[ \frac{(1-\nu^2)\sigma}{E} \right]^6 \left( \frac{\pi H^4}{4kh} \right)^2 \times t \right\}^{1/4}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Значения величин  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $Y_f(0)$ , входящих в формулы (6.1), приводятся в табл. 1.

Таким образом, размер трещины  $l$  при больших временах растет пропорционально  $t^{1/4}$ . В коэффициент пропорциональности входит параметр  $\alpha k^{-2}$ , который с увеличением проницаемости  $k$  и вязкости жидкости разрыва  $\mu_f$  убывает (см. вывод), поэтому скорость роста трещины в этом случае замедляется.

Так как параметр  $\Pi_1$  от варианта к варианту меняется очень слабо, то объем трещины  $V$  фактически определяется лишь ее длиной и не зависит явно от  $k$  и  $\mu_f$ :  $V \sim l$ .

Глубина проникновения в пласт жидкости разрыва  $y_{f_0}$  и объем утечек  $V_f$ , напротив, довольно сильно зависят от этих параметров, причем  $y_{f_0}$  и  $V_f$  растут с увеличением как проницаемости пласта  $k$ , так и вязкости жидкости разрыва  $\mu_f$ .

На развитой стадии гидроразрыва ( $l \gg l_0$ ) объем отфильтрованной в пласт жидкости  $V_f \sim l^3$  растет значительно быстрее, чем объем трещины  $V \sim l$ . Поэтому расход закачиваемой в пласт жидкости  $Q_0$  при больших  $l$  определяется динамикой утечек. Имеем

$$Q_0 = \frac{d}{dt}(V + V_f) \approx \frac{dV_f}{dt} = \frac{3\pi m \alpha \Pi_2 \times H^4}{k} \left[ \frac{(1-\nu^2)\sigma}{E} \right]^3 l^{-1} \tag{6.2}$$

Именно это обстоятельство фактически уже было использовано выше при построении автомодельного решения: в уравнении неразрывности потока в трещине (первом уравнении (3.1)) был отброшен соответствующий член, учитывающий изменение объема трещины. В связи с этим расход  $Q_0$ , выраженный через параметры решения по формуле

$$Q_0 = 4 \langle wv \rangle \Big|_{x=0} = - \frac{\pi \sigma H^4}{\mu_f} \left[ \frac{(1-\nu^2)\sigma}{E} \right]^3 \frac{d(P-1)^4}{dX} \Big|_{x=0} l^{-1} \tag{6.3}$$

должен совпадать с заданным асимптотической формулой (6.2). Приравнявая правые части этих формул, получаем соотношение

$$- \frac{d(P-1)^4}{dX} \Big|_{x=0} = \frac{3m\alpha}{\sigma} \frac{\alpha \Pi_2 \mu_f}{k} \tag{6.4}$$

Используя данные, приведенные выше, можно убедиться, что параметр  $\alpha \Pi_2 \mu_f / k$ , а следовательно, и величина  $d(P-1)^4 / dX$  при  $X=0$ , слабо меняются от варианта к варианту. Это означает, что расход  $Q_0$  жидкости, закаченной в трещину, практически не зависит от проницаемости пласта  $k$  и изменяется обратно пропорционально вязкости жидкости разрыва  $\mu_f$ .

Подставив в формулы (6.1), (6.2) значения параметров (2.3), приведем их к виду

$$V = \Omega_V l, \quad V_f = \Omega_f l^3, \quad y_{f_0} = \Omega_y l^2, \quad Q_0 = \Omega_Q l^{-1} \quad (6.5)$$

$$l = (l_0^4 + \Omega_l t)^{1/4}$$

Коэффициенты  $\Omega_V$ ,  $\Omega_f$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_Q$  и  $\Omega_l$  приводятся в первом выводе, при этом величины  $V$ ,  $V_f$ ,  $y_{f_0}$ ,  $Q_0$ ,  $l$  и  $t$  имеют размерности соответственно,  $\text{м}^3$ ,  $\text{м}^3$ ,  $\text{м}$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$  и  $\text{с}$ .

Приведем несколько конкретных результатов расчетов по формулам (6.5). Найдем конечные показатели процесса гидроразрыва при создании трещин размерами  $l=50$  и  $100$  м. Значения  $V$ ,  $V_f$ ,  $y_{f_0}$ ,  $Q_0$  и  $t$  приведены ниже

N	1	2	3	4	1	2	3	4
$l$ , м	50	50	50	50	100	100	100	100
$V$ , $\text{м}^3$	2,66	2,6	2,58	2,56	5,32	5,2	5,16	5,12
$V_f$ , $\text{м}^3$	4,08	185	18,5	420	32,6	1480	148	3360
$y_{f_0}$ , см	2	102	10,2	244	7,9	407	40,7	977
$Q_0$ , $\text{м}^3/\text{мин}$	2,38	2,5	0,25	0,253	1,19	1,25	0,125	0,126
$t$ , мин	1,32	55,7	55,7	1256	21,1	890	890	20 100
$Q_0^*$ , $\text{м}^3/\text{мин}$	3,09	3,32	0,332	0,335	1,54	1,66	0,166	0,167

Напомним, что  $Q_0$  — расход закачиваемой жидкости в момент времени  $t$ . Здесь же приведены значения осредненного по времени расхода  $Q_0^* = V_f/t > 0$ . Тот факт, что величины  $Q_0$  и  $Q_0^*$  близки, означает, стадия нагнетания жидкости разрыва с большими расходами весьма непродолжительна.

Раскрытие  $2w_0$  в середине трещины для всех вариантов одинаково, так как оно зависит лишь от давления нагнетания, и составляет 4,7 мм.

Из данных приведенных выше следует, что при малых вязкостях жидкости разрыва и малых проницаемостях (1-й вариант) объем трещины сопоставим с объемом утечек; при больших вязкостях и проницаемостях (4-й вариант)  $V \ll V_f$ . Увеличение проницаемости при  $\mu_f = \text{const}$  приводит к резкому увеличению утечек и соответственно времени разрыва при почти неизменном расходе закачиваемой жидкости (см. варианты 1 и 2 или 3 и 4).

Наконец, увеличение вязкости  $\mu_f$  при постоянстве проницаемости (см. варианты 1 и 3 или 2 и 4) приводит к обратно пропорциональному уменьшению расхода  $Q_0$ , но к значительно меньшему, чем при увеличении проницаемости, росту утечек.

Как следует из формул (6.5), при удвоении размера объема трещины время гидроразрыва возрастает в 16 раз, глубина проникновения в пласт жидкости разрыва — в 4 раза, а объем отфильтровавшейся в пласт жидкости 8 раз.

Если задаться одним из параметров, входящих в эти формулы, можно вычислить все остальные параметры: например, по объему закачанной жидкости  $V_f$  можно найти размер трещины  $l$  и время разрыва  $t$ .

С другой стороны, формулы (6.5) могут быть использованы для уточнения параметров модели по измерениям двух любых из входящих в них величин. Очевидно, что измеряемые величинами в данном случае естественно считать объем закачанной жидкости  $V_f$  и расход  $Q_0$ . Исключая из соответствующих формул (6.5) размер трещины  $l$ , получаем

$$V_f Q_0^3 = \Omega_f \Omega_Q^3 = \text{const} \quad (6.6)$$

Отсюда следует, что измеряемая в процессе гидроразрыва функция  $V_f Q_0^3$  со временем должна стремиться к некоторой постоянной величине.

Из формул (6.6) и (6.5), в частности, можно выразить вертикальный размер трещины  $H$  через другие параметры и измеряемую величину  $V_f Q_0^3$ :

$$H = \frac{(V_f Q_0^3)^{1/8}}{(12\alpha\kappa)^{3/8}} \left[ \frac{kE}{\pi h m^2 \Pi_2^2 (1-\nu^2) \sigma} \right]^{1/4} \quad (6.7)$$

Здесь параметры  $\alpha$  и  $\Pi_2$  находятся из автомоделного решения; они зависят от безразмерных комплексов  $\mu$  и  $\delta$ , а от  $H$  не зависят. Остальные величины, входящие в правую часть (6.7), должны быть измерены.

Таким образом, формула (6.7) в принципе позволяет найти сложно определяемый, а чаще всего просто неизвестный параметр модели — высоту трещины гидроразрыва  $2H$  по данным измерений расхода  $Q_0$  и объема закачанной жидкости  $V_f$ .

Резюмируем полученные результаты.

При создании вертикальной трещины гидроразрыва большой протяженности в режиме нагнетания с постоянным давлением на забое скважины большая часть жидкости разрыва отфильтровывается в пласт, причем объем утечек на единицу длины или объема трещины возрастает с увеличением размера трещины пропорционально квадрату ее длины.

При фиксированной конечной длине трещины и одном из том же давлении нагнетания время гидроразрыва и объем утечек возрастает с ростом проницаемости пласта и вязкости жидкости разрыва. Это означает, что создавать трещины гидроразрыва технологически и экономически выгоднее жидкостью небольшой вязкости, а высоковязкие жидкости следует использовать лишь на стадии закрепления трещин. Естественно, этот вывод не распространяется на режимы нагнетания с постоянным расходом, при которых давление нагнетания должно расти со временем и с увеличением вязкости жидкости разрыва.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва пласта. // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475–486.
3. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1964. № 4. С. 3–56.
4. Daneshy A. A. On the design of vertical hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1973. V. 25. No. 1. P. 83–97.
5. Geertsma J., De Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petrol. Technol. 1969. V. 21. No. 12. P. 1571–1581.
6. Howard G. C., Fast C. R. Hydraulic fracturing // SPE Monograph Series, V. 11, Dallas. 1970.
7. Желтов Ю. П., Желтов Ю. В. О распространении горизонтальной трещины в горной породе под воздействием нефилтующейся жидкости в случае постоянного горного давления // Изв. АН СССР. ОТН., механ. и машиностроения. 1959. № 5. С. 166–169.
8. Желтов Ю. П. Деформации горных пород — М.: Недра, 1966. 198 с.
9. Abe H., Mura T., Keer L. M. Growth rate of a penny shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // J. Geophysical Res. 1976. V. 81. № 29. P. 5335–5340.
10. Nilson R. H. Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fractures driven in a permeable medium by a constant inlet pressures // Int. J. for Numeric. and Analyt. Meth. in Geomech. 1988. V. 12. P. 477–495.
11. Wong S. K., Cleary M. P. Numerical simulation of unsteady fluid flow and propagation of a circular hydraulic fracture // Int. J. for Numeric. and Analytic. Meth. in Geomech. 1985. № 9. P. 1–14.
12. Nordgren R. P. Propagation of a vertical hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1972. V. 12. No. 4. P. 306–314.
13. Perkins T. K., Kern L. R. Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1961. V. 13. No. 9. P. 937–949.
14. Biot M. A., Masse L., Medlin W. L. A two-dimensional theory of fracture propagation // SPE Prod. Eng. 1986. V. 1. No. 1. P. 17–30.
15. Cleary M. P. Comprehensive design formulae for hydraulic fracturing // SPE Paper No. 9259, 55th Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Dallas, September 21–24, 1980.
16. Nolte K. G., Smith M. B. Interpretation of fracturing pressures // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33. No. 9. P. 1767–1775.
17. Palmer I. D., Carroll H. B., Jr. Three-dimensional hydraulic fracture propagation in the presence of stress variation // Soc. Petrol. Eng. J. 1983. V. 23. No. 6. P. 870–878.
18. Settari A. Simulation of hydraulic fracturing processes // Soc. Petrol. Eng. J. 1980. V. 20. No. 6. P. 487–500.
19. Енгов В. М., Завозский А. Ф., Стелин И. Б., Хараидзе Д. М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва — Материалы 9 Всес. семинара «Численные методы решения задач фильтрации многофазной несмешиваемой жидкости» (Якутск, 1988 г.).
20. Завозский А. Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 103–109.