МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1991

УДК 624.07:534.1

А. А. ЗЕВИН

СИММЕТРИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Рассматриваются интегральные функционалы, в которых область интегрирования обладает определенной симметрией (относительно плоскости, циклической или осевой), в то время как подынтегральные функции неинвариантны относительно соответствующих преобразований координат. Исследовано поведение минимумов таких функционалов при их симметризации.

Использование полученных результатов иллюстрируется на различных задачах механики. Показано, что симметричное распределение упругих и инерционных характеристик повышает жесткость упругих систем, поэтому осреднение параметров осесимметричных систем по окружной координате (в частности, применение конструктивно-ортотропной теории при расчете подкрепленных ребрами круглых пластин и оболочек вращения) дает завышенные значения первой частоты собственных колебаний и критической силы. Установлен характер некоторых границ областей устойчивости векторного уравнения Хилла и получены другие результаты.

Отметим, что первые результаты такого рода принадлежат Хершу, который показал, что низшая частота колебаний стержней, мембран и пластин увеличивается (не уменьшается) при симметризации их плотности [1]. Некоторые общие утверждения о поведении собственных значений самосопряженных краевых задач при симметризации их коэффициентов получены в [2]. В отличие от [2], приведенные ниже результаты применимы и к нелинейным краевым задачам.

1. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(\mathbf{u})=\int\limits_G F_1(\mathbf{u},\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big/\int\limits_G F_2(\mathbf{u},\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}=(u_1(\mathbf{x}),\ \ldots,\ u_r(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, G — область интегрирования. Функционалом вида (1.1) определяются, в частности, собственные значения самосопряженных краевых задач (в этом случае F_1, F_2 — квадратичные формы). К рассматриваемому виду принадлежит и функционал

$$J(\mathbf{u})=\int\limits_G F(\mathbf{u},\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{1.2}$$

определяющий, например, потенциальную энергию упругой системы.

Предполагается, что область G симметрична относительно плоскости $x_1=0$ либо обладает циклической симметрией по x_1 (т. е. пересечения G плоскостями $x_1=C$ и $x_1=C+\Delta$ одинаковы, где $\Delta=l/q$, $q\geqslant2$ — целое число, l — ширина области G по x_1, $0\leqslant C\leqslant(q-1)\Delta$). Если указанное условие выполняется для любого q, то область G будем называть осесимметричной.

Допустимые функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ должны удовлетворять заданным дифференциальным и другим соотношениям (в задачах механики обычно $u_i(\mathbf{x})$ — компоненты некоторой вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и ее частные производные различных порядков). Конкретный вид этих соотношений, равно как и вид функций $F_1(\mathbf{u},\ \mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{u},\ \mathbf{x})$, для дальнейшего несущественен. Необходимо лишь выполнение следующего условия: для любой допустимой функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ допустимой является также функция $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$, где в случае плоской симметрии $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})=\mathbf{u}(-x_1, \mathbf{x}^*)$, $(\mathbf{x}^*=(x_2,\ldots,x_n))$, циклической симметрии $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})=\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, k)=\mathbf{u}(x_1+k\Delta, \mathbf{x}^*)$ $(k=1, \ldots, q)$, осевой симметрии $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})=\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \alpha)=\mathbf{u}(x_1+\alpha, \mathbf{x}^*)$ $(0<\alpha\leqslant l)$ (значения $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ при $x_1>l$ определяются периодическим продолжением $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ по x_1).

Заметим, что в случае циклической и осевой симметрии указанное условие предполагает, что допустимая функция $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ периодична по $x_1(\mathbf{u}(x_1+l, \mathbf{x}^*)=\mathbf{u}(x_1, \mathbf{x}^*))$. При наличии интегральных условий, накладываемых на $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, необходимо, чтобы соответствующие подынтегральные функции были четны по x_1 (плоская симметрия), Δ — периодичны по x_1 (циклическая симметрия), не зависели явно от x_1 (осевая симметрия). Представим функции F_i $(i=1, 2)$ в виде

$$F_i=F_i^1+F_i^2 \tag{1.3}$$

В случае плоской симметрии

$$F_i^1(\mathbf{u}, x_1, \mathbf{x}^*)=F_i^1(\mathbf{u}, -x_1, \mathbf{x}^*),\quad F_i^2(\mathbf{u}, x_1, \mathbf{x}^*)=-F_i^2(\mathbf{u}, -x_1, \mathbf{x}^*),$$

т. е. (1.3) представляет собой разложение функции $F_i^2(\mathbf{u}, x_1, \mathbf{x}^*)$ на четную по $x_1(F_i^1(\mathbf{u}, x_1, \mathbf{x}^*))$ и нечетную $(F_i^2(\mathbf{u}, x_1, \mathbf{x}^*))$ составляющие.

В циклически симметричной системе функции $F_i^1(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ определяются следующим образом. Пусть $a_k^i(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)$, $b_k^i(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)$ — коэффициенты разложения $F_i(\mathbf{u}, x_1, \mathbf{x}^*)$ в ряд Фурье по x_1. Тогда

$$F_i^1(\mathbf{u},\mathbf{x})=\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_{qm}^i(\mathbf{u},\mathbf{x}^*)\cos\frac{2\pi qmx_1}{l}+b_{qm}^i(\mathbf{u},\mathbf{x}^*)\sin\frac{2\pi qmx_1}{l}\right)$$

т. е. F_i^1 включает только гармоники, кратные q. В случае осевой симметрии полагаем $F_i^1=a_0^i(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)$.

Рассмотрим зависящую от параметра μ задачу минимизации функционала

$$J(\mathbf{u}, \mu)=\int_G (F_1^1(\mathbf{u},\mathbf{x})+\mu F_1^2(\mathbf{u},\mathbf{x}))d\mathbf{x}\Big/\int_G (F_2^1(\mathbf{u},\mathbf{x})+\mu F_2^2(\mathbf{u},\mathbf{x}))d\mathbf{x} \tag{1.4}$$

При $\mu=1$ функционал (1.4) совпадает с (1.1). Изменение параметра μ от единицы до нуля будем называть симметризацией функционала (1.4). Полагаем, что при $\mu\in[0, 1]$ решение $I(\mu)$ задачи (1.4) существует, причем знаменатель в (1.4) имеет одинаковый знак для любой допустимой функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Следующая теорема устанавливает вид функции $I(\mu)$.

Теорема. Функция $I(\mu)$ не возрастает на $[0, 1]$. Если $I(\mu_0)<I(0)$, то $I(\mu)$ монотонно убывает на $[\mu_0, 1]$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu)$ — минимизирующая функция, так что $J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu), \mu)=I(\mu)$. Докажем сначала неравенство $I(\mu)\leqslant I(0)$ для случая плоской симметрии. Положив в (1.4) $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, получим

$$J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \mu)=[f_1^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))+\mu f_1^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))]/[f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)+\mu f_2^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))]$$

$$f_i^k(\mathbf{u}(\mathbf{x},0))=\int_G F_i^k(\mathbf{u}(\mathbf{x},0),\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{1.5}$$

По условию, $\mathbf{u}^*(x_1, \mathbf{x}^*, \mu)=\mathbf{u}(-x_1, \mathbf{x}^*, \mu)$ также является допустимой функцией. Очевидно, что

$$J(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, 0), \mu)=[f_1^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))-\mu f_1^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))]/[f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))-\mu f_2^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))] \tag{1.6}$$

Как видно из (1.5) и (1.6), какое-либо из значений $J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \mu)$, $J(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, 0), \mu)$, во всяком случае, не больше $f_1^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))/f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))=$ $=J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), 0)=I(0)$. Поэтому и подавно $I(\mu)\leqslant I(0)$.

Рассмотрим теперь случай циклической симметрии. Положим в (1.4) $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, k, 0)=\mathbf{u}(x_1+k\Delta, \mathbf{x}^*, 0)$. Так как функции F_1^1, F_2^1 Δ — периодичны по x_1, то $f_i^1(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, k, 0))=f_i^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))$. Поэтому

$$J(\mathbf{u}^*(x, k, 0), \mu)-I(0)=\mu R_1/R_2$$

$$R_1=f_1^2(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, k, 0))f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))-f_2^2(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, k, 0))f_1^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)) \tag{1.7}$$

$$R_2=f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))(f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0))+\mu f_2^2(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, k, 0)))$$

Учитывая, что для любых l-периодических по x_1 функций $\varphi_1(x_1, \mathbf{x}^*)$, $\varphi_2(x_1, \mathbf{x}^*)$:

$$\int\limits_G \varphi_1(x_1, \mathbf{x}^*)\varphi_2(x_1+k\Delta, \mathbf{x}^*)d\mathbf{x}=\int\limits_G \varphi_1(x_1-k\Delta, \mathbf{x}^*)\varphi_2(x_1, \mathbf{x}^*)d\mathbf{x}$$

получим

$$f_i^2=\int\limits_G \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^i(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)\cos\frac{2\pi m(x_1-k\Delta)}{l}+b_m^i(\mathbf{u}, \mathbf{x}^*)\sin\frac{2\pi m(x_1-k\Delta)}{l}\right)d\mathbf{x},$$

$$m\neq pq \quad (p=1, 2, \ldots)$$

Разложив здесь косинусы и синусы разностей на соответствующие составляющие, найдем, что в (1.7) выражение $R_1=R_1(k)$ может быть записано в виде

$$R_1(k)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(c_m \sin\frac{2\pi mk}{q}+d_m\cos\frac{2\pi mk}{q}\right), \quad m\neq pq \quad (p=1, 2, \ldots)$$

где коэффициенты c_m и d_m не зависят от k. Учитывая известные равенства [3]:

$$\sum_{k=1}^{q}\sin kx=\sin\frac{(q+1)x}{2}\sin\frac{qx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{q}\cos kx=\cos\frac{(q+1)x}{2}\sin\frac{qx}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$$

найдем

$$\sum_{k=1}^{q}\sin\frac{2\pi mk}{q}=0, \qquad \sum_{k=1}^{q}\cos\frac{2\pi mk}{q}=0 \qquad (m\neq pq)$$

Поэтому $\sum R_1(k)=0$ $(k=1\div q)$. Следовательно, найдется такое $k=k^*$, что $R_1(k^*)\leqslant 0$. Так как, по условию, знаменатель в (1.1) сохраняет одинаковый знак для любой допустимой функции, то можно считать $R_2>0$, поэтому $J(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, k^*, \mu)-I(0)\leqslant 0$. Поэтому и подавно $I(\mu)-I(0)\leqslant 0$.

Для доказательства аналогичного неравенства в случае осевой симметрии необходимо в (1.4) положить $\mathbf{u}^*=\mathbf{u}(\mathbf{x}+\alpha, 0)$ и учесть, что среднее значение $R_1(\alpha)$ на $[0, l]$ равно нулю.

Предположим, что $I(\mu_0)<I_0$ при некотором $\mu_0\in(0, 1)$. Тогда

$$J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0), \mu)-I(\mu_0)=(\mu-\mu_0)P_1/P_2 \tag{1.8}$$

$$P_1=f_1^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0))f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0))-f_2^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0))f_1^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0))$$

$$P_2=(f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0))+\mu f_2^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0)))(f_2^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0))+\mu_0 f_2^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0)))$$

Учитывая, что $J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0), 0) \geqslant I(0) > I(\mu_0)$, $P_2 > 0$, из (1.8) найдем $P_1 < 0$. Поэтому $J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mu_0), \mu) < I(\mu_0)$ при $\mu > \mu_0$ и, следовательно, $I(\mu) < I(\mu_0)$. Из приведенных неравенств очевидно, что $I(\mu)$ монотонно убывает при $\mu > \mu_0$. Теорема доказана.

Таким образом, $I(\mu)$ монотонно убывает на $[0, 1]$ либо сохраняет постоянное значение $I(0)$ на некотором интервале $(0, \mu_0)$ и монотонно убывает на $(\mu_0, 1]$. В последнем случае, как видно из доказательства, $J(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \mu) \equiv I(\mu)$ на $(0, \mu_0)$. Поэтому функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера при любом $\mu \in [0, \mu_0]$. Практически такая ситуация возможна лишь в специальных случаях, например, когда параметр μ характеризует асимметрию масс или жесткостей упругих опор, расположенных в узлах собственной формы колебаний. В общем случае $I(\mu)$ монотонно убывает на $[0, 1]$.

Замечание. Предположим, что функции $F_i(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ четны по $\mathbf{u}$ (такой случай, например, имеет место, когда $F_i(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ — квадратичные формы). При этом в случае циклической и осевой симметрии доказанная теорема остается справедливой, если $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ удовлетворяет антипериодическим краевым условиям по x_1 $(\mathbf{u}(0, \mathbf{x}^*) = -\mathbf{u}(l, \mathbf{x}^*))$. Действительно, полагая $\mathbf{u}(x_1, \mathbf{x}^*) = -\mathbf{u}(x_1 + l, \mathbf{x}^*)$, найдем, что функции $F_i(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ l-периодичны по x_1, поэтому доказательство теоремы полностью сохраняется.

В некоторых случаях можно получить более детальную информацию о поведении $I(\mu)$, используя следующее простое утверждение: если некоторый функционал $\Phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mu)$ при любой допустимой $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ является вогнутой функцией параметра μ, то и минимум функционала $F(\mu)$ также вогнут по μ. Действительно, пусть $\Phi(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \mu_0) = F(\mu_0)$, тогда вогнутая функция $\Phi(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \mu)$ удовлетворяет неравенству $\Phi(\mathbf{u}^*(\mathbf{x}), \mu) \geqslant F(\mu)$ в силу определения $F(\mu)$. Так как μ_0-произвольная точка, то функция $F(\mu)$ вогнута.

Совершенно аналогично показывается, что если при любой допустимой $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ функция $\Phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mu)$ выпукла, то и максимум такого функционала $F(\mu)$ — выпуклая функция.

Указанные условия вогнутости и выпуклости, очевидно, выполняются, если параметр μ входит в функционал линейно. Поэтому из приведенного результата непосредственно следует, что если в (1.4) $F_2^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \equiv 0$, то $I(\mu)$ — вогнутая функция. Если $F_1^2(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \equiv 0$, причем числитель в (1.4) сохраняет постоянный знак для любой допустимой функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, то $I^{-1}(\mu)$ — выпуклая функция. Действительно, в этом случае задача (1.4) эквивалентна задаче максимизации функционала $J^{-1}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mu)$, линейного по μ.

Ниже рассматривается использование полученных результатов в различных задачах механики.

2. В теории оптимального проектирования упругих систем [4—6 и др.] типичной является следующая вариационная задача: найти оптимальное управление $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_p(\mathbf{x}))$, максимизирующее функционал

$$I(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \tag{2.1}$$

где $J(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ — функционал вида (1.1) или (1.2).

Наиболее часто максимизируется низшая частота собственных колебаний ω_1, эйлерова критическая сила P_k, потенциальная энергия упругой деформации. В соответствии с вариационным принципом Релея

$$\omega_1^2(\mathbf{h}) = \min_{\mathbf{u}} [U_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}) / T_0(\mathbf{u}, \mathbf{h})] \tag{2.2}$$

где $U_0(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ — максимальное значение потенциальной энергии упругой деформации системы, $\omega_1^2 T_0(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ — максимальное значение кинетической энергии.

Величина P_k допускает аналогичное вариационное определение $P_k(\mathbf{h}) = \min\limits_{\mathbf{u}} [U_0(\mathbf{u}, \mathbf{h})/R_0(\mathbf{u}, \mathbf{h})]$, где $P_k R_0(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ — работа внешних сил на перемещениях, отвечающих возмущенной форме равновесия.

Управлением служат геометрические характеристики сечений, физические характеристики материала, плотность армирования и т. д. Обычно оно должно удовлетворять ограничениям вида

$$\int\limits_G h_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = V_i, \quad h_i^- \leqslant h_i \leqslant h_i^+ \quad (i=1, \ldots, p) \tag{2.3}$$

Предположим, что геометрическая схема системы (область G) обладает каким-либо из рассмотренных видов симметрии. Если $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ входит в числитель и знаменатель отношения (1.1) линейно, то симметризация функционала не нарушает ограничений (2.3), поэтому в соответствии с доказанной теоремой оптимальное управление $\mathbf{h}^*(\mathbf{x})$ также должно быть симметричным.

Пусть, например, стержневая система загружена осевыми силами $P_i = \alpha_i P$, где i — номер стержня ($i=1, \ldots, r$), P — параметр. В рассматриваемом случае

$$U_0 = \sum_{i=1}^{r} \int\limits_0^{l_i} (EJ_{i1}(s) y_{i1}''^2 + EJ_{i2}(s) y_{i2}''^2(s))ds$$

$$R_0 = \sum_{i=1}^{r} \int\limits_0^{l_i} \alpha_i (y_{i1}'^2(s) + y_{i2}'^2(s))ds, \qquad y_{ik}'(s) = \frac{dy_{ik}(s)}{ds}$$

где l_i — длина, $J_{i1}(s)$, $J_{i2}(s)$ — моменты инерции сечения i-го стержня относительно главных центральных осей, $y_{i1}(s)$, $y_{i2}(s)$ — соответствующие перемещения.

Предположим, что функции $J_{i1}(s)$, $J_{i2}(s)$ и величины α_i определяются из условия максимума P_k, причем

$$\sum_{i=1}^{r} \int\limits_0^{l_i} J_{i1}(s)ds = C_1, \qquad \sum_{i=1}^{r} \int\limits_0^{l_i} J_{i2}(s)ds = C_2, \qquad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$$

Если схема и опорные закрепления симметричны относительно плоскости, то можно утверждать, что моменты инерции J_{ik} и коэффициенты α_i симметрично расположенных стержней должны быть равны. В циклической системе все q граней должны быть одинаковы.

Квадрат низшей частоты рассматриваемой системы при фиксированном $P < P_k$ определяется отношением (2.2), в числитель которого линейно входят величины J_{i1}, J_{i2} и α_i, в знаменатель — погонные плотности стержней $\rho_i(s)$. Здесь также можно утверждать, что при заданных суммарных значениях указанных характеристик максимум ω_1 достигается при их симметричном распределении.

В осесимметричных системах, в которых $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ входит в числитель и знаменатель функционала (1.1) линейно, оптимальным является управление $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, не зависящее от окружной координаты. Пусть, например, $h(\mathbf{x})$ — оптимизируемая по условию максимума ω_1 или P_k толщина оболочки вращения. Если оболочка рассчитывается по безмоментной теории, то $h(\mathbf{x})$ входит в выражения $U_0(\mathbf{u}, h)$ и $T_0(\mathbf{u}, h)$ линейно [7], поэтому оптимальное распределение толщины осесимметрично. Тот же вывод справедлив, если $h(\mathbf{x})$ — толщина наружных слоев трехслойной моментной оболочки или круглой пластинки. Здесь в выражение $U_0(\mathbf{u}, h)$ входит также энергия изгиба, пропорциональная цилиндрической жесткости $D(h)$ [7]. Так как обычно величина h мала по сравнению с толщиной внутреннего слоя, то полагают $D(h)\sim h$ [4], поэтому оптимальная толщина h постоянна по окружной координате.

Если в осесимметричной системе управление $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ входит в выражения $F_i(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ нелинейно, то оптимальность осесимметричного распределения $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ нуждается в дополнительном обосновании. Поясним возникающие при этом особенности на задаче оптимизации толщины моментной оболочки; здесь $D(h)\sim h^3$.

В соответствии с доказанной теоремой величина функционала (2.1) увеличится, если заменить h и h^3 их средними по окружной координате x_1 значениями

$$h_C(x_2)=\frac{1}{l}\int\limits_0^l h(x_1,x_2)dx_1, \qquad d(x_2)=\frac{1}{l}\int\limits_0^l h^3(x_1,x_2)dx_1$$

где $l=l(x_2)=2\pi R(x_2)$, $R(x_2)$ — радиус оболочки.

При фиксированном $h_C(x_2)$ значение $d(x_2)$ (и, следовательно, соответствующая величина I) будут наибольшими, если $h(x_1, x_2)$ принимает только экстремальные значения h_- и h_+. При этом, как нетрудно проверить, $d(x_2)=d^*(x_2)=h_+^3-(h_+-h_C(x_2))(h_+^2+h_+h_-+h_-^2)$.

Полагая в выражениях $U_0(\mathbf{u}, h)$ и $T_0(\mathbf{u}, h)$ $h(x_1, x_2)=h_C(x_2)$, $h^3(x_1, x_2)=d^*(x_2)$, получим одномерную задачу оптимизации по $h_C(x_2)$; пусть $h_C^*(x_2)$ — ее решение, I_* — соответствующее значение функционала (2.1). Если $h_C^*(x_2)$ принимает только значения h_- и h_+, то и в исходной задаче оптимальным является осесимметричное управление $h(x_1, x_2)=h_C^*(x_2)$. Если же на некоторых интервалах $h_-<h_C^*(x_2)<h_+$, то здесь $d(x_2)<d^*(x_2)$, поэтому при $h(x_1, x_2)=h_C^*(x_2)$ (а также при любом другом допустимом управлении) $I<I_*$. Таким образом, здесь величина I_*, найденная из решения одномерной задачи, дает верхнюю оценку функционала $I(h(\mathbf{x}))$. Для отыскания максимума $I(h(\mathbf{x}))$ необходимо решать исходную двумерную задачу; вопрос о том, окажется ли соответствующее оптимальное решение осесимметричным, остается открытым.

3. Расчет симметризованных систем значительно проще исходных (особенно в случае осевой симметризации), поэтому симметризацию можно использовать для получения верхних оценок минимумов функционалов вида (1.1) и (1.2).

Пусть, например, круглый штамп с плоским основанием вдавливается в неоднородное изотропное упругое полупространство. Потенциальная энергия упругой деформации полупространства определяется выражением [7]:

$$U_0=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\infty\Big[\mu\left(\varepsilon_r^2+\varepsilon_\varphi^2+\varepsilon_z^2+\frac{1}{2}(\varepsilon_{r\varphi}^2+\varepsilon_{rz}^2+\varepsilon_{z\varphi}^2)\right)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}(\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi+\varepsilon_z)^2\Big]\,r\,dr\,d\varphi\,dz \qquad (3.1)$$

$$\varepsilon_r=\partial u_r/\partial r,\quad \varepsilon_\varphi=u_r/r+\partial u_\varphi/r\partial\varphi,\quad \varepsilon_z=\partial u_z/\partial z,\quad \varepsilon_{rz}=\partial u_z/\partial r+\partial u_r/\partial z$$

$$\varepsilon_{r\varphi}=\partial u_\varphi/\partial r-u_\varphi/r+\partial u_r/r\partial\varphi,\quad \varepsilon_{\varphi z}=\partial u_\varphi/\partial z+\partial u_z/r\partial\varphi$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты; u_r, u_φ, u_z — соответствующие перемещения точек полупространства; ε_r, ε_φ, ε_z, $\varepsilon_{r\varphi}$, ε_{rz}, $\beta_{\varphi z}$ — компоненты тензора деформаций; λ, μ — постоянные Ламе, зависящие в рассматриваемом случае от r, φ, z.

В соответствии с принципом Лагранжа при фиксированной осадке штампа Δ действительные перемещения u_r, u_φ, u_z доставляют минимум функционалу (3.1) в классе дифференцируемых 2π-периодических по φ функций, удовлетворяющих условию $u_z(r, \varphi, 0) = \Delta$ при $r \leqslant R$, где R — радиус штампа.

Введем в (3.1) параметр ε, полагая $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon(\mu - \mu_0)$, $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon(\lambda - \lambda_0)$, где μ_0, λ_0 — средние по φ значения μ и λ, т. е.

$$\mu_0(r, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(r, \varphi, z)\,d\varphi, \qquad \lambda_0(r, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(r, \varphi, z)\,d\varphi$$

Значению $\varepsilon = 1$ отвечает заданная система, значению $\varepsilon = 0$ — система с осредненными по φ коэффициентами μ и λ. В соответствии с доказанной выше теоремой минимум функционала (3.1) $U_0(\varepsilon)$ монотонно убывает на $[0, 1]$. Так как $U_0 = {}^1/_2 P\Delta$, где P — приложенная к штампу вертикальная сила, то в системе с осредненными коэффициентами заданной осадке Δ отвечает сила $P_0 > P$. Следовательно, при одинаковых силах осадка в осредненной системе $\Delta_0 < \Delta$. Таким образом, решение осредненной задачи, размерность которой на единицу меньше исходной, позволяет получить нижнюю оценку осадки штампа.

В механике часто встречаются системы, характеристики которых по одной или нескольким координатам быстро осциллируют (среды с периодической структурой, перфорированные либо подкрепленные ребрами пластинки и оболочки и т. д.). При определении интегральных характеристик таких систем (частот собственных колебаний, критических сил и др.) переменные параметры иногда заменяют их средними значениями. В соответствии с доказанной теоремой в осесимметричных системах осреднение по угловой координате дает завышенные значения функционалов вида (1.1) и (1.2).

Пусть, например, круглая пластинка либо оболочка вращения подкреплена n равноотстоящими радиальными либо продольными ребрами соответственно. В выражение U_0 линейно входят изгибные, а также (в случае оболочки) продольные и крутильные жесткости ребер EJ, EF и GI_k.

Применив циклическую симметризацию порядка q ($q = 2, 3, \ldots$), получим систему с qn ребрами, суммарные характеристики которых равны характеристикам исходной системы. Минимумы функционалов вида (1.1) и (1.2) при этом увеличатся.

Используя осевую симметризацию, получим систему с «размазанными» по угловой координате ребрами. Такая конструктивно-ортотропная модель широко применяется при расчете подкрепленных ребрами, а также гофрированных пластин и оболочек [8, 9 и др.]. Из полученных результатов следует, что для круглых пластин и оболочек вращения с переменными по угловой координате параметрами конструктивно-ортотропная модель дает завышенные значения основной частоты и критической силы.

Заметим, что исходную систему с n ребрами можно рассматривать как полученную циклической симметризацией порядка n системы с одним ребром, жесткости которого равны суммарным жесткостям заданной системы. Соответствующие значения P_k^1 и ω_1^1 дают нижние оценки P_k^n и ω_1^n заданной системы.

Отметим, что указанным выше условиям осевой симметрии могут удовлетворять системы, геометрическая схема которых не является осесимметричной. Такие условия выполняются, например, для замкнутой некруговой цилиндрической оболочки, так как ее форма определяется кривизной $K(x_1)$, входящей в выражение U_0 [7] (кроме $K(x_1)$, в U_0 линейно входят функции $K^2(x_1)$, dK/dx_1, $(dK/dx_1)^2$). Заменив их средними значениями, получим систему с постоянными коэффициентами, расчет которой эквивалентен расчету круговой цилиндрической оболочки. Соответствующие значения ω_1^* и P_k^* могут служить верхними оценками ω_1 и P_k исходной системы.

4. Колебания систем с периодически изменяющимися параметрами, динамическая устойчивость упругих систем, прохождение волн в средах с периодической структурой и другие задачи механики приводят к анализу областей устойчивости векторного уравнения Хилла

$$\frac{d}{dt}\left((M_0+\mu M_1(\omega t))\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)+(P_0+\mu P_1(\omega t))\mathbf{u}=0$$
$$M_1(\omega t)=M_1(\omega t+2\pi),\quad P_1(\omega t)=P_1(\omega t+2\pi) \tag{4.1}$$

где $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)^т$, P_0, M_0 — симметрические положительно определенные матрицы, $M_1(\omega t)$, $P_1(\omega t)$ — симметрические матрицы с нулевыми средними значениями на $[0, 2\pi/\omega]$, $\mu>0$, $M_0+\mu M_1>0$, $P_0+\mu P_1>0$.

Представим $M_1(\omega t)$ и $P_1(\omega t)$ в виде $M_1(\omega t)=M_г(\omega t)+\varepsilon M_н(\omega t)$, $P_1(\omega t)=P_г(\omega t)+\varepsilon P_н(\omega t)$, $\varepsilon>0$, $M_г(\omega t)=M_г(-\omega t)$, $P_г(\omega t)=P_г(-\omega t)$, $M_н(\omega t)=-M_н(-\omega t)$, $P_н(\omega t)=-P_н(-\omega t)$.

Заменой $\tau=\omega t$, $\mathbf{x}=\mathbf{u}+\omega M\mathbf{u}^\cdot$ уравнение (4.1) приводится к каноническому виду

$$J\mathbf{x}^\cdot=\lambda H(\tau)\mathbf{x} \tag{4.2}$$

$$J=\begin{vmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{vmatrix},\quad H(\tau)=\begin{vmatrix}P(\tau) & 0\\ 0 & M^{-1}(\tau)\end{vmatrix},\quad \lambda=\frac{1}{\omega},\quad \mathbf{x}^\cdot=\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$$

Так как $H(\tau)>0$, то при $\lambda\in(0, \lambda_1)$ (т. е. при достаточно больших ω) уравнение (4.2) устойчиво [10]. При $\lambda=\lambda_1(\mu, \varepsilon)$ уравнение (4.1) имеет антипериодическое решение $u(\tau)=-u(\tau+2\pi)$; $\omega_1(\mu, \varepsilon)=1/\lambda_1$ $(\mu, \varepsilon)\to 2\omega_n^0$ при $\mu\to 0$, где ω_i^0 $(\omega_i^0\leqslant\omega_{i+1}^0)$ — частоты собственных колебаний системы (4.1) при $\mu=0$.

Величина $\lambda_1^2(\mu, \varepsilon)$ допускает следующее вариационное определение

$$\lambda_1^2=\min_u\left[\int_{-\pi}^{\pi} u^{\cdot T}(\tau)\,(M_0+\mu M_г(\tau)+\mu\varepsilon M_н(\tau))\,u^\cdot(\tau)\,d\tau\Big/\right.$$
$$\left.\Big/\int_{-\pi}^{\pi} u^T(P_0+\mu P_г(\tau)+\mu\varepsilon P_н(\tau))\,u(\tau)\,d\tau\right] \tag{4.3}$$

причем допустимые функции $u(\tau)$ должны удовлетворять условиям $u(-\pi)=-u(\pi)$, $u^\cdot(-\pi)=-u^\cdot(\pi)$.

Поскольку подынтегральные функции четны по u, $u^\cdot$, то в соответствии с приведенным в п. 1 замечанием доказанная теорема справедлива и в случае антипериодических краевых условий. Поэтому имеет место следующее утверждение: функция $\omega_1(\mu, \varepsilon)$ монотонно возрастает по μ и ε. Действительно, плоская симметризация относительно $\tau=0$ соответствует уменьшению ε до $\varepsilon=0$ при фиксированном μ; осевая симметризация — уменьшению μ до $\mu=0$; в соответствии с теоремой $\lambda_1(\mu, \varepsilon)=1/\omega_1(\mu, \varepsilon)$ убывает по μ и ε.

Если $M_1(\omega t)\equiv 0$ (т. е. инерционное возбуждение отсутствует), то функция $\omega_1^2(\mu, \varepsilon)$ выпукла по μ и ε. Действительно, в этом случае $\omega_1^2=1/\lambda_1^2$

является максимумом функционала, линейного по μ и ε. Отсюда, в частности, следует, что при фиксированном ε нижней оценкой $\omega_1^2(\mu)$ может служить функция

$$\omega_-^2(\mu)=(2\omega_n^0)^2+\mu a, \quad a=d\omega_1^2(\mu)/d\mu|_{\mu=0}$$

Величина a может быть легко найдена методом возмущений. Пусть, например, $P_1(\tau)=\cos\tau P_1$ $(P_1=\|p_{ik}\|_1^n)$, тогда $a=2\omega_n^{02}(\mathbf{u}_n^{\mathrm{T}}P_1\mathbf{u}_n)/(\mathbf{u}_n^{\mathrm{T}}P_0\mathbf{u}_n)$, где $\mathbf{u}_n^{\mathrm{T}}=(u_n^1,\ldots,u_n^n)$ — n-я собственная форма системы (4.1) при $\mu=0$.

Пусть $\varepsilon=0$, $M_1(\tau)\equiv0$, $\omega_2(\mu)$ — вторая граница первой области неустойчивости ($\omega_2(\mu)\to2\omega_n^0$ при $\mu\to0$). Так как при $\varepsilon=0$ $P_1(\tau)$ — четная функция, то одной из границ $\omega_1(\mu)$, $\omega_2(\mu)$ отвечают четные, другой — нечетные решения. Поэтому соответствующие значения $\lambda_i(\mu)=1/\omega_i(\mu)$ доставляют минимум функционалу (4.3) при условиях $\mathbf{u}^\cdot(0)=\mathbf{u}(\pi)=0$ либо $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}^\cdot(\pi)=0$.

Следовательно, функция $\omega_2^2(\mu)$ также выпукла. Учитывая, что $d\omega_2^2/d\mu=-a$ при $\mu=0$, найдем, что нижней оценкой $\omega_2^2(\mu)$ может служить функция $(2\omega_n^0)^2-\mu a$.

Областям неустойчивости, примыкающим при $\mu=0$ к точкам ω_i^0, отвечают решения $\mathbf{u}_k(\tau)$ с периодом 2π. Функция $\mathbf{u}_k(\tau)$ доставляет минимум функционалу (4.3) при условиях

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{u}_k^T(\tau)(P_0+\mu P_1(\tau))\mathbf{u}_\nu(\tau)d\tau=0 \quad (\nu=1,\ldots,k-1) \tag{4.4}$$

Первому собственному значению $\lambda_1^*(\mu)\equiv0$ отвечает собственная функция $\mathbf{u}_1(\tau)=\mathrm{const}$. Функции $\omega_2^*(\mu)=1/\lambda_2^*(\mu)$ и $\omega_3^*(\mu)=1/\lambda_3^*(\mu)$ образуют область неустойчивости, примыкающую к ω_n^0 ($\overset{*}{\omega}_{2,3}(\mu)\to\omega_n^0$ при $\mu\to0$). Так как $P_1(\tau)=P_1(-\tau)$ ($\varepsilon=0$), то одна из функций $\mathbf{u}_2(\tau)$, $\mathbf{u}_3(\tau)$ четна, другая нечетна. Очевидно, что последняя доставляет абсолютный минимум функционалу (4.3) в классе нечетных 2π-периодических функций, так как для них условие (4.4) при четных $\mathbf{u}_\nu(\tau)$ автоматически выполняется. Следовательно, одна из функций $\omega_2^{*2}(\mu)$, $\omega_3^{*2}(\mu)$ выпукла.

Для скалярного уравнения Хилла

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_0^2(1+\mu p(\omega t))u=0, \qquad p(\omega t)=\sum_{k=1}^{n}p_k\cos k\omega t$$

имеем $a=2\omega_0^2p_1$. Из полученных выше результатов следует, что границы основной области неустойчивости $\omega_1(\mu)$ и $\omega_2(\mu)$ ($\omega_{1,2}(\mu)\to2\omega_0$ при $\mu\to0$) удовлетворяют неравенствам $\omega_{1,2}(\mu)>2\omega_0(1\pm{}^1/_2\mu p_1)^{1/2}$.

Вторая область неустойчивости ограничена функциями $\omega_2^*(\mu)$ и $\omega_3^*(\mu)$, примыкающими к ω_0 при $\mu=0$. По доказанному выше, одна из функций $\omega_2^{*2}(\mu)$, $\omega_3^{*2}(\mu)$ выпукла.

Заметим, что для остальных областей неустойчивости полученные выше утверждения о границах, вообще говоря, не имеют места (как это видно, например, из выражений $\omega_i^2(\mu)$ для уравнения Матье [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hersh J.* Proprietes de convexite du type de Weyl pour des problems de vibration ou d'equilibre // Zeit. für angew. Math. und Phys.– 1961. V. 12.– N 4.– P. 298–321.
2. *Зевин А. А.* Оценки собственных значений краевых задач с периодическими коэффициентами // Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 5. М.: Наука, 1971. 1108 с.

4. *Арман Ж.-Л. П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977. 142 с.
5. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
6. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.
7. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем/Под ред. В. В. Болотина. 352 с.
8. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А.* Теория ребристых оболочек. Киев: Наукова думка, 1980. 368 с.
9. *Андреева Л. Е.* Упругие элементы приборов. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
10. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
31.V.1989