

УДК 539.375

© 1991 г.

А. П. БИРЮКОВ, Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, А. Г. ГРИГОРЬЕВ

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОТСЛАИВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СМЕЩЕНИЯ

В композитных материалах один из характерных видов трещиноподобных дефектов — отслоения по границам раздела свойств. Определение критических размеров отслоений в элементах конструкций из композитов требует знания характеристики адгезионной трещиностойкости, в качестве которой обычно принимается критическая величина удельного приращения энергии деформации тела с трещиной по границе раздела при продвижении трещин — $\partial W/\partial S$. Начиная с работ [1–3], предложен ряд схем экспериментального определения $(\partial W/\partial S)_{\text{кр}}$. В частности, известна схема [2] «пузырь под давлением», в котором осесимметричный рост отслоения в образце обеспечивается путем подачи в его полость давления газа (или жидкости). Такое однородное нагружение, как правило, приводит к неустойчивому развитию отслоения, что затрудняет проведение эксперимента и интерпретацию результатов. В связи с этим в данной работе предложена модификация указанной схемы, в которой рост отслоения стабилизируется. С этой целью вводится жесткая пластинка, ограничивающая смещения отслаиваемой пластинки в направлении перпендикулярном плоскости отслоения. Предлагаемая схема представляется особенно удобной при определении адгезионной трещиностойкости слоистых систем, содержащих резиноподобные прослойки.

Для $\partial W/\partial S$ — тарировки схемы рассматривается осесимметричная задача теории упругости о трещине на границе слоя и полупространства при условии, что над верхней поверхностью слоя на малом расстоянии H_p находится жесткая пластинка. В процессе нагружения и развития отслоения свободная поверхность слоя будет налегать на жесткую пластинку, что обеспечит устойчивый рост отслоения. Зона налегания, однако, заранее неизвестна и ее нужно определять в процессе решения задачи.

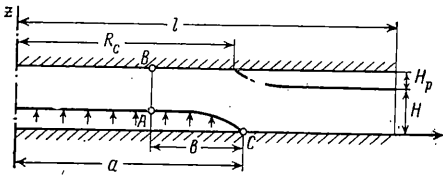
Решение указанной задачи с альтернативными условиями в форме равенств и неравенств строится методом граничных интегральных уравнений (МГИУ) [4–14].

1. Постановка граничной задачи. Анализ описанной схемы испытаний на адгезионную трещиностойкость приводит к осесимметричной задаче теории упругости о бесконечном слое толщиной (фиг. 1) со следующими граничными условиями

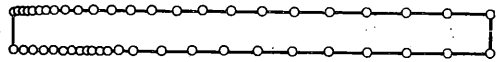
$$\begin{aligned} t_r=0, \quad t_z=p \quad \text{при} \quad z=0, \quad 0 \leq r < a \\ u_z=u_r=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad r \geq a \\ u_z=H_p, \quad t_r=0 \quad \text{при} \quad z=H, \quad 0 \leq r \leq R_c \\ t_z=t_r=0 \quad \text{при} \quad z=H, \quad r \geq R_c \end{aligned} \quad (1.1)$$

где t_r, t_z — компоненты внешних усилий на поверхности слоя, p — давление в полости отслоения, u_r, u_z — компоненты смещений на поверхности слоя, a — радиус зоны отслоения, R_c — радиус зоны налегания верхней поверхности слоя на ограничивающую пластинку, H_p — зазор между слоем и ограничивающей пластинкой.

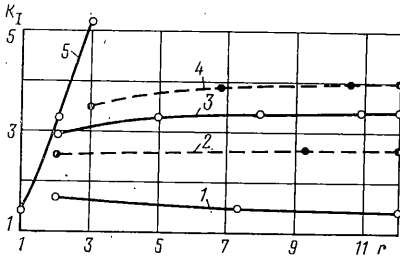
Рассмотрим результаты численного решения задачи методом ГИУ, о самом методе и использованном алгоритме будет сказано в п. 3.



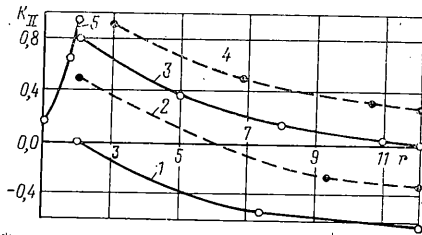
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Результаты численного решения задачи. Поставленная задача была решена для слоя конечного размера l в радиальном направлении, который определялся по результатам численного эксперимента, так, чтобы его увеличение не влияло на решение вблизи фронта трещины.

Решение было получено при следующих значениях параметров: $E=100$ кг/см², $H=1$ см, $H_p=0,01-0,07$ см, $p=1; 1,5; 2$ кг/см², $a=2-12$ см, $l=12-18$ см, коэффициент Пуассона $\nu=0,5$.

Поскольку радиус зоны контакта заранее неизвестен, то для его нахождения применялся метод последовательных приближений. Процесс прекращался при получении на верхней поверхности слоя отрицательных нормальных напряжений σ_z при $r < R_c$ и следующем условии, накладываемом на осевые перемещения: $u_z < H_p, r > R_c$.

Значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} в точке C , полученные в процессе решения задачи, как функции радиуса зоны отслоения (a) при $p=1$ кг/см², $1,5$ кг/см², 2 кг/см² и различных зазорах H_p представлены на фиг. 3–8.

На фигурах принята следующая нумерация кривых: фиг. 3–6: 1 – $H_p=0,01$ см, 2 – $0,03$ см, 3 – $0,05$ см; 4 – $0,07$ см, 5 – ограничения отсутствуют (фиг. 3, 4 – $p=1$ кг/см²), фиг. 5, 6 – $p=1,5$ кг/см², фиг. 7, 8: 1 – $H_p=0,02$ см, 2 – $0,03$ см, 3 – $0,05$ см, 4 – $0,07$ см, 5 – ограничения отсутствуют (фиг. 7, 8 – $p=2$ кг/см²).

В качестве примера на фиг. 2 показана дискретная модель слоя при $a=2$ см.

Рассмотрим поведение КИН K_I, K_{II} как функций параметра a при заданных p и H_p . До появления зоны контакта на верхней поверхности слоя КИН $K_I(a), K_{II}(a)$ быстро возрастают, а после того как прогиб слоя начинает ограничиваться сверху характер поведения $K_I(a)$ и $K_{II}(a)$ резко меняется, начинается участок ассимптотического выхода на некоторое предельное значение. Это подтверждает идею о возможности стабилизации роста трещины в условиях эксперимента. Следует также отметить, что во всех случаях КИН K_I значительно больше K_{II} , это свидетельствует о преобладании нормального отрыва в вершине трещины.

Для дальнейшего анализа рассмотрим величину $\partial W/\partial S$ – изменение упругой энергии тела при увеличении площади трещины на единицу, однозначно связанную с КИН K_I и K_{II} .

Для осесимметричной трещины имеем [15]:

$$\frac{\partial W}{\partial S} = \frac{(3-4\nu)(1+\nu)}{16E(1-\nu)} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.1)$$

Для выбранных параметров материала слоя:

$$(3-4\nu)(1+\nu)/[16E(1-\nu)] = 0,0019$$

Зависимости $\partial W/\partial S$ как функции радиуса трещины a , полученные в соответствии с (2.1) при $p=1$ кг/см² представлены на фиг. 9 (здесь 1 — $H_p=0,01$ см, 2 — 0,03 см, 3 — 0,05 см, 4 — 0,07 см).

Анализ поведения кривых $\partial W/\partial S(a)$ свидетельствует о стремлении величины $\partial W/\partial S$ к некоторому предельному значению, определяемому зазором H_p и давлением p .

Описанный характер зависимости $\partial W/\partial S(a)$ можно пояснить следующими качественными соображениями.

Условно разделим слой на две подобласти, внешнюю $r > a - b$, где b — величина порядка нескольких толщин слоя H (b , вообще говоря, зависит от H_p , однако, как было найдено в процессе решения задачи $b \approx 2H$), и внутреннюю $r < a - b$ (фиг. 1).

Внутреннюю часть слоя можно рассматривать как тонкий диск прижимаемый к верхнему основанию, причем его радиальные, а следовательно и окружные деформации стеснены. Исходя из закона Гука можно показать, что напряжения σ_r , действующие на струне AB ограничены величиной давления p в полости и в точности равно p при коэффициенте Пуассона $\nu=0,5$ и при нулевом смещении отрезка AB в радиальном направлении (вследствие несжимаемости материала).

Поскольку давление на отрезке AB со стороны внутренней части слоя ограничено, то смещение u_r отрезка AB есть величина ограниченная и при $a \gg H$ не зависит от a . Обозначим ее через $\delta_1(p, H_p)$.

Таким образом, для внутренней части слоя, рассматриваемой как тонкий диск, прижимаемый к верхнему основанию, на контуре которого задано смещение $u_r = \delta_1(p, H_p)$, можно получить [12] следующее решение: $u_r = \delta_1(p, H_p)r/(a-b)$. Этот результат, т. е. линейный характер смещений при $r < a - b$ подтверждается представленными на фиг. 10 графиками изменения смещений u_r, u_z по радиусу на нижней и верхней поверхностях слоя при $a=5$ см, $R_c=3,74$ см, $H_p=0,05$ см, $p=1$ кг/см² (на фиг. 10: 1 — u_r , 2 — u_z , 3 — u_r , 4 — u_z). Соответственно для деформаций имеем

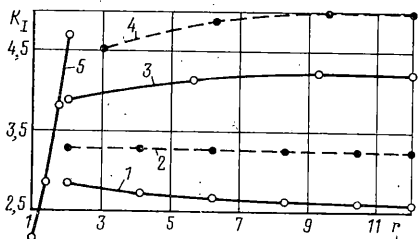
$$\varepsilon_r = \delta_1(p, H_p)/(a-b), \quad \varepsilon_\theta = \delta_1(p, H_p)/(a-b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{P(1+\nu)(2\nu-1) - E2\nu\delta_1(p, H_p)/(a-b)}{E(1-\nu)}$$

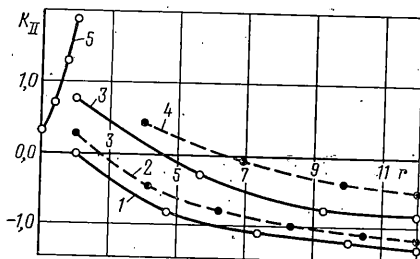
Исходя из последнего выражения получаем, что изменение толщины внутренней части слоя при коэффициенте Пуассона $\nu=0,5$ равно $\delta_2(p, H_p) = 2\delta_1(p, H_p)p/a$, где H — толщина слоя. Здесь принято, что $a \gg b$.

Работу A , совершенную давлением p при раскрытии трещины, можно теперь выразить следующим образом

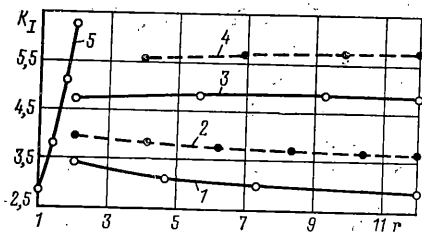
$$A = p \int_0^a 2\pi r U_z(r) dr = p\pi a^2 \left(H_p + \frac{2\delta_1(p, H_p)}{a} H \right) + p \int_{a-b}^a 2\pi r \left[U_z(r) - \left(H_p + \frac{2\delta_1(p, H_p)}{a} H \right) \right] dr \quad (2.2)$$



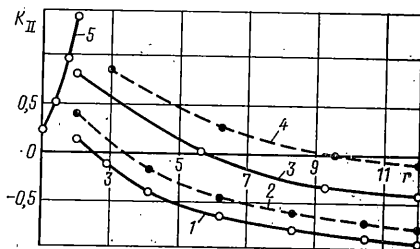
Фиг. 5



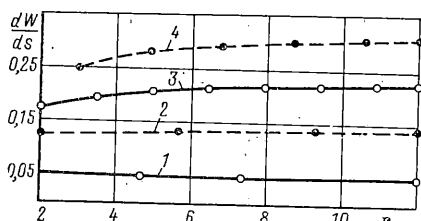
Фиг. 6



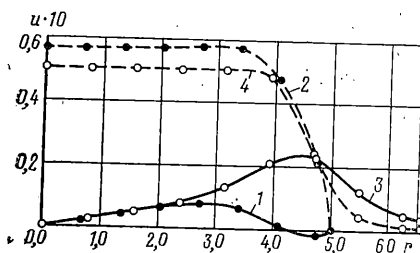
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

где H_p — зазор, H — толщина слоя, $u_z(r) - z$ — смещения поверхности трещины.

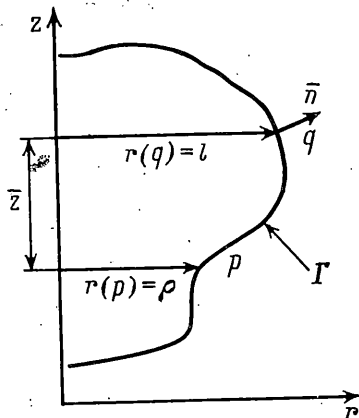
Так как, для упругого тела [15] $\delta W = \frac{1}{2} \delta A$ то:

$$\frac{\partial w}{\partial S} = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{pH_p}{2} + O\left(\frac{1}{a}\right)$$

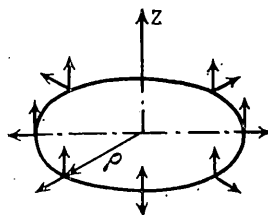
Вводя коэффициент $\psi(p)$, учитывающий уменьшение раскрытия трещины вблизи фронта, выражение для $\partial W/\partial S$, при пренебрежении членами высшего порядка малости, может быть записано следующим образом

$$\frac{\partial w}{\partial S} \approx \frac{pH_p}{2} - \frac{HH_p}{a} p\psi(p) + \frac{Hp\delta_1(p, H_p)}{a} \quad (2.3)$$

Анализ полученного выражения показывает, что характер приближения $\partial W/\partial S$ к предельному значению $pH_p/2$, при заданном p определяется соотношением между последними слагаемыми в (2.3). Уменьшение зазора H_p приводит к преобладанию последнего слагаемого, так что величина $\partial W/\partial S$ стремится в этом случае к предельному значению сверху. Этот вывод согласуется с результатами, представленными на фиг. 9. Анализ показывает, что вычисленные значения $\partial W/\partial S$ по мере увеличения параметра a довольно быстро приближаются к предельному значению $\frac{1}{2}pH_p$, например, при давлении $p=1$ кГ/см², $H_p=0,05$ см отличие $\partial W/\partial S$ от



Фиг. 11



Фиг. 12

$1/2 p H_p$ составляет примерно 20% для $a=2$ см и 10% для $a=12$ см, а при зазоре $H_p=0,01$ см соответственно 8% и 4%. Эти данные находятся в хорошем соответствии с (3).

Таким образом, результаты численного решения рассмотренной задачи подтверждаются характером асимптотического поведения решения, полученного в рамках упрощенной механической модели.

3. МГИУ решение осесимметричных задач термоупругости. 3.1. Граничное уравнение (ГИУ). Следуя прямой формулировке МГИУ [4, 5], для осесимметричного тела, нагруженного поверхностными нагрузками и объемными силами, может быть записано ГИУ [1, 2, 4]:

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(p)u_j(p) + 2\pi \int_{\Gamma} T_{ij}^0(p, q)u_j(q)r(q)d\Gamma(q) = \\
 = 2\pi \int_{\Gamma} U_{ij}(p, q)t_j(q)r(q)d\Gamma(q) + B_i(p)
 \end{aligned}
 \quad (3.1)$$

где $i, j=r, z$, точки p и q — лежат в плоскости меридиального сечения и принадлежат Γ — кривой, вращением которой вокруг оси Z образовано тело (фиг. 11), $u_j(q)$, $t_j(q)$ — компоненты смещений и усилий на границе тела в точке q . Ядра $u_{ij}(p, q)$ и $T_{ij}(p, q)$ — есть соответственно смещение и усилие в j -ом направлении в точке q вследствие приложения единичной кольцевой нагрузки в i -ом направлении в точке p . Слагаемое $B_i(p)$ представляет собой вклад от действия объемных сил, в частности, от эквивалентных им температурных воздействий. В случае, когда объемные силы обладают потенциалом, а также при стационарном распределении температуры, слагаемое $B_i(p)$ приводится к интегралу по Γ .

Под единичной кольцевой нагрузкой (фиг. 12) подразумевается нагрузка, приложенная на кольце радиуса $r(p)$ с интенсивностью f так, что $2\pi r(p)f=1$.

Если граница в т. p гладка, то $c_{ij}(p)=\delta_{ij}/2$, в случае нерегулярной границы $c_{ij}(p)$ являются функциями величины угла в т. p [8].

Ядра $u_{ij}(p, q)$ могут быть получены либо интегрированием по кольцу фундаментального решения, соответствующего приложению сосредоточенной нагрузки в трехмерном случае [10], либо используя представление Галеркина в цилиндрической системе координат [4]. Выражение для усилий $T_{ij}(p, q)$ могут быть получены дифференцированием $u_{ij}(p, q)$ по $r(q)$ и $z(q)$ [4], используя соотношения между напряжениями и смеще-

ниями в цилиндрической системе координат, а также компоненты вектора внешней нормали $\mathbf{n}=(n_r, n_z)$ и так далее. Выражения для $B_i(p)$, аналогично выражениям для ядер $u_{ij}(p, q)$, также могут быть получены в результате двух указанных подходов.

В целях проверки, в данной работе был осуществлен вывод всех функций, входящих в ГИУ (4) с использованием первого подхода. При этом была обнаружена опечатка в выражениях для $T_{ij}(p, q)$, приведенных в [4]. Кроме того, оказалось, что ряд авторов [3] необоснованно полагают $B_z(p) \equiv 0$ в случае действия центробежных сил. Тестовый расчет вращающегося диска с учетом выражения для $B_z(p)$ показал существенное повышение точности по сравнению с вариантом $B_z(p) \equiv 0$.

3.2. Численная реализация МГИУ. В данной работе для аппроксимации границы и неизвестных задачи используются изопараметрические квадратичные граничные элементы [5]. Каждый элемент определяется тремя узлами, с которыми связаны неизвестные задачи.

При изопараметрическом представлении координат, перемещений и поверхностных усилий имеем

$$\begin{bmatrix} r(\xi) \\ z(\xi) \\ u_i(\xi) \\ t_i(\xi) \end{bmatrix} = N_c(\xi) \begin{bmatrix} r_c \\ z_c \\ u_{ic} \\ t_{ic} \end{bmatrix}, \quad i=r, z, \quad c=1, 2, 3 \quad (3.2)$$

где r_c, z_c, u_{ic}, t_{ic} — узловые значения координат, перемещений и усилий, $N_c(\xi)$ — функции формы элемента $N_c(\xi)$ имеет следующий вид

$$N_1(\xi) = -1/2\xi(1-\xi), \quad N_2(\xi) = 1-\xi^2, \quad N_3(\xi) = 1/2\xi(1+\xi)$$

Подставляем (5) в (4) получаем дискретное представление ГИУ

$$\begin{aligned} C_{ij}(p)u_j(p) \pm 2\pi \sum_{l=1}^k \sum_{c=1}^3 u_j^{l,c} \int_{\Gamma^l} T_{ij}(p, q) N^c(\xi) r(q) d\Gamma^l = \\ = 2\pi \sum_{l=1}^k \sum_{c=1}^3 t_j^{l,c} \int_{\Gamma^l} U_{ij}(p, q) N^c r(q) d\Gamma^l + B_i(p), \quad i, j=r, z \end{aligned} \quad (3.3)$$

где k — число элементов на границе Γ , l — номер элемента, $d\Gamma^l = J_l(\xi) d\xi$, $J_l(\xi)$ — якобиан преобразования глобальных координат к локальной координате элемента ξ , $\xi \in [-1, 1]$, причем

$$J_l(\xi) = \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \text{где } \frac{\partial r}{\partial \xi} = \sum_{c=1}^3 \frac{\partial N^c(\xi)}{\partial \xi} r^{cl}, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{c=1}^3 \frac{\partial N^c(\xi)}{\partial \xi} z^{cl},$$

r^{cl} и z^{cl} — r и z координаты узлов элемента с номером l .

Если граница Γ содержит n узлов, то обходя последовательно все узловые точки, получаем в соответствии с (3.3) следующее матричное уравнение [8, 11]:

$$[T][u] = [G][t] + [B] \quad (3.4)$$

где $[T]$ — матрица размерности $2n \times 2n$, $[u]$ — вектор перемещений граничных узлов размерности $2n$, $[G]$ — матрица размерности $2n \times 3n$, $[t]$ — вектор поверхностных усилий размерности $3n$, $[B]$ — вектор размерности

2n, учитывающий вклад от температурных воздействий и центробежных сил. Расширение размерности $[G]$ и $[t]$ связано с тем, что при нерегулярной границе и произвольных граничных условиях компоненты вектора поверхностных усилий на стыках элементов могут иметь разрыв. В этом случае следует рассматривать компоненты вектора $[t]$ независимо на каждом элементе.

Выделяя неизвестные компоненты усилий и перемещений и формируя из них вектор $[X]$ из (3.4) получаем итоговую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$[A][X] \sim [D] \quad (3.5)$$

Решение (3.5) выполняется методом исключения Гаусса с выбором ведущего элемента.

Если тело состоит из нескольких подобластей, то при формировании итоговой СЛАУ из уравнений (7), записанных для каждой из подобластей, необходимо учитывать дополнительные условия совместности и равновесия на границах раздела различных подобластей:

$$u_i^m(p) = u_i^l, \quad t_i^m(p) = -t_i^l(p)$$

где l, m — номера соседних подобластей.

После решения (8) напряжения на границе определяются на основании закона Гука и уравнений равновесия [5, 6].

При моделировании трещин для описания полей перемещений и напряжений вблизи вершины используются специальные граничные элементы [8], учитывающие асимптотическое поведение перемещений и усилий. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений выполняется по значениям перемещений и усилий в области трещины также с учетом их асимптотического представления [8].

При численной реализации (3.3) требуется вычисление следующих интегралов (коэффициентов влияния):

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 U_{ij}(p, q(\xi)) N_c(\xi) J_i(\xi) r(q(\xi)) d\xi \quad (3.6)$$

$$L_{ij} = \int_{-1}^1 T_{ij}(p, q(\xi)) N_c(\xi) J_i(\xi) r(q(\xi)) d\xi \quad (3.7)$$

которые в случае криволинейной границы и при использовании квадратных элементов определяются численно.

При вычислении (3.6), (3.7) необходимо определять значения полных эллиптических интегралов первого и второго рода $K(\pi/2; k^2)$, $E(\pi/2; k^2)$, где $k^2 = 4\rho l / [(\rho + l)^2 + z^2]$, входящих в подынтегральные функции. Для их вычисления используется методика предложенная в [9], учитывающая асимптотическое поведение $K(\pi/2; k^2)$ при $k^2 \rightarrow 1$, когда $q(\xi) \rightarrow p$.

Когда точки p и q принадлежат разным элементам, подынтегральные функции в (3.6), (3.7) не являются сингулярными. В этом случае, как показывает опыт, для вычисления M_{ij} и L_{ij} достаточно использовать четырехточечную формулу Гаусса.

Когда же точка p принадлежит элементу, по которому выполняется интегрирование, функции в (3.6), (3.7) не являются сингулярными. В этом случае, как показывает опыт, для вычисления M_{ij} и L_{ij} достаточно использовать четырехточечную формулу Гаусса.

Когда же точка p принадлежит элементу, по которому выполняется интегрирование, функции $U_{ij}(p, q(\xi))$ содержат «слабую» особенность

вида $\ln 1/\eta$, $\eta \rightarrow 0$, а $T_{ij}(p, q(\xi))$, кроме того — «сильную» особенность вида $1/\eta$, $\eta \rightarrow 0$ при $q(\xi) \rightarrow p$.

В случае «слабой» особенности в [4] предлагается использовать специальные квадратурные формулы с логарифмической весовой функцией:

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right) f(t) dt = \sum_{i=1}^{i=m} f(t_i) w_i \quad (3.8)$$

Однако в осесимметричной задаче особенность вида $\ln 1/\eta$, $\eta \rightarrow 0$ «скрыта» в полном эллиптическом интеграле первого рода $K(\pi/2; k^2)$. Поэтому, чтобы избежать трудностей преобразования (3.6), (3.7) к виду (3.8) было использовано предложенное в [13], нелинейное преобразование локальной координаты ξ , $\xi \in [-1, 1]$, якобиан которого обращается в нуль в точке особенности ξ , $\xi = -1, 0, 1$. Такое преобразование регулирует подинтегральную функцию и позволяет существенно снизить порядок квадратурной формулы, необходимый для достижения приемлемой точности.

Как было определено, в случае, когда точка P совпадает со средним узлом ($\xi = 0$), следует разделить «особенный» элемент на два, для которых координата особенности ξ принимает соответственно значения 1 и -1 . Это позволяет избавиться от осцилляций решения задачи на элементе.

В случае «сильной» особенности возможно использование специальных балансных соотношений [4, 5, 6], позволяющих определять сумму внеинтегрального слагаемого и интеграла вида (3.7), понимаемого в смысле Коши. В плоском и трехмерном случаях балансное соотношение основывается на том факте, что перемещения тела как жесткого должны удовлетворять (3.4), при этом усилия на границе не возникают. В случае осесимметричной задачи такой прием невозможен для координаты r . В этой ситуации используется решение для тела, подвергнутого гидростатическому сжатию. Однако этот прием невозможен при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.5$. В данной работе, после апробирования различных вариантов, был выбран следующий «смешанный» способ определения интегралов (3.7). Интегралы, содержащие $T_{rz}(p, q(\xi))$, $T_{zz}(p, q(\xi))$ и соответствующие внеинтегральные слагаемые, определялись на основе соотношения для смещения тела как жесткого в z -направлении. А интегралы (3.7), содержащие $T_{zr}(p, q(\xi))$ и $T_{rr}(p, q(\xi))$, определялись на основе методики, предложенной в работе [14], при этом в [14] была обнаружена неточность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malyshev B. M., Salganik R. L.* The strength of adhesive joints using the theory of cracks // Intern. J. Fract. Mech. 1965. V. 1, № 2. P. 114–128.
2. *Вильямс М., Андерсон Дж.* Адгезионная механика разрушения // Механика разрушения. Разрушение материалов. М.: Мир, 1979. С. 216–238.
3. *Abdul-Mihsein M. J., Bakr A. A., Parker A. P.* Stresses in axisymmetric rotating bodies determined by the boundary integral equation method // J. Strain Analysis. Eng. Des. 1985. V. 20, № 2. P. 79–86.
4. *Bakr A. A., Fenner R. T.* Boundary integral equation analysis of axisymmetric thermoelastic problems // J. Strain Analysis Eng. Des. 1983. V. 18, № 4. P. 239–251.
5. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
6. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
7. *Cruse T. A., Snow D. W., Wilson R. B.* Numerical solutions in axisymmetric elasticity // Comput. and Struct. 1977. V. 7, № 3. P. 445–451.
8. *Перельмутер М. Н.* Решение двумерных задач с криволинейными трещинами методом граничных интегральных уравнений // Всесоюз симпоз. «Метод дискрет-

- ных особенностей в задачах математической физики»: Тез. докл. Харьков: изд. Харьк. ун-та, 1985. С. 91–92.
9. *Guiggiani M., Casalini P.* On the numerical implementation of BEM for axisymmetric elasticity // *Boundary elements VIII Conf.* 1986. P. 695–706.
 10. *Kermandis T.* A numerical solution for axially symmetrical elasticity problems // *Intern. J. Solids Structures.* 1975. V. 11. № 4. P. 493–500.
 11. *Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.* Исследование пространственного напряженного состояния составных конструкций с учетом термоупругой деформации и центробежных сил методом граничных элементов // Численная реализация физико-механических задач прочности: Тез. докл. II Всесоюз. конф. Горький, Горьк. ун-т, 1987. С. 74.
 12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
 13. *Telles J. C.* A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals // *Intern. Numer. methods in Eng.* 1987. V. 24. № 5. P. 959–973.
 14. *Guiggiani M., Casalini P.* Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements // *Intern. J. Numer. Methods in Eng.* 1987. V. 24. № 9. P. 1711–1720.
 15. *Салганик Р. Л.* О хрупком разрушении клеенных тел // *ПММ.* 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957–962.
 16. *Вайншельбаум В. М., Гольдштейн Р. В.* Об одном классе смешанных осесимметричных задач теории упругости для многослойной среды. М. 1975. 75 с. (Препринт/АН СССР. Ин-т проблем механики; № 61).
 17. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.V.1989