МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 539.3

С. В. КУЗНЕЦОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАТИКИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Рассматриваются вопросы построения периодических фундаментальных решений статики анизотропных упругих сред с анизотропией общего вида, исследуются свойства упругих потенциалов.

1. Введение. Вопросы, связанные с построением периодических фундаментальных решений, восходят к Рэлею [1], получившему формулу для определения вязкости медленно текущей жидкости через систему упругих шаров, погруженных в жидкость и расположенных в периодическом порядке. Основная трудность в получении этой формулы состояла в необходимости суммирования рядов вида

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{x})=\sum_{m\in\Lambda}\mathbf{E}(\mathbf{x}+\mathbf{m}),\quad \mathbf{x}\in R^n \tag{1.1}$$

где $\mathbf{E}$ — фундаментальное решение уравнений Стокса в R^n; $\mathbf{m}=\Sigma m_i\mathbf{a}_i$, $Z\ni m_i$ — целочисленные координаты, а $\mathbf{a}_i$ — базисные векторы главных периодов, причем $\wedge\mathbf{a}_i\neq 0$ $(i=\overline{1,\,n})$. В формуле (1.1) Λ — решетка периодичности. Поскольку традиционно используемые в механике сплошных сред фундаментальные решения уравнений равновесия имеют порядок убывания на бесконечности $O(r^{2-n})$, $r\to\infty$ при $n>2$ и $O(-\ln r)$, $r\to\infty$ при $n=2$, то ряд (1.1) оказывается расходящимся. Для определения суммы ряда, аналогично (1.1), Рэлеем удерживалось несколько первых слагаемых, что отвечало выделению из среды характерного объема с последующей экстраполяцией результатов на всю периодическую среду.

Концепция Рэлея получила развитие в [2], где впервые было показано, что ряд (1.1) расходится и предложено наряду с характерным объемом использовать распределенные силы противодействия со стороны условно вводимых в среду неподвижных границ. Близкий метод рассматривался в [3—5]. Используя методику [2], в [6] была получена формула для вязкости и построено периодическое фундаментальное решение уравнений Стокса в R^3. Для получения асимптотических (по диаметру включений) оценок в [6] использовался метод Эвальда [7], применявшийся ранее при определении энергии Маделунга ионных кристаллов, см. также [8]. Заметим, что в двумерном случае построение периодических фундаментальных решений для изотропных сред не встречает затруднений благодаря наличию эллиптических и родственных мероморфных функций Вейерштрасса.

В дальнейшем метод [6], а также близкий к нему метод «трансформирующих» деформаций [10], применялись для определения эффективных характеристик композитов [9—15], решению периодических задач гидродинамики [16, 17] и теплопроводности [18]. Существенной особенностью работ [9, 14—18] явилось использование фундаментальных решений Стокса для получения в дальнейшем периодических фундаментальных решений по методике [2, 6].

Для построения периодических фундаментальных решений принципиально возможны и другие подходы. При использовании главного фундаментального решения экспоненциально убывающего на бесконечности [19] ряд (1.1) оказывается абсолютно сходящимся на любом компакте в $R^n \backslash 0$. При этом, однако, возникает сложность с конструированием самого главного фундаментального решения. Другой возможный подход [20], применявшийся для решения уравнений Лапласа в n-кубе, связан с разложением δ-функции в фундаментальной области (в механике композитов фундаментальная область часто именуется ячейкой периодичности) в тригонометрический ряд и отыскании решения также в виде соответствующих разложений.

В излагаемом ниже методе на основе формулы суммирования Пуассона строятся периодические фундаментальные решения уравнений статики в анизотропных упругих средах с анизотропией общего вида; анализируются свойства полученных фундаментальных решений и соответствующих потенциалов.

2. Основные уравнения, операторы и символы. Рассматривается упруго анизотропная однородная среда в R^n, уравнения статики для которой имеют вид

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{u} \equiv -\operatorname{div} \mathbf{C}\cdot\cdot\operatorname{sym}(\nabla\mathbf{u}) = 0 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}$ — матричный дифференциальный оператор уравнений статики; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; $\mathbf{C}$ — четырехвалентный тензор упругости. Предполагается, что тензор $\mathbf{C}$ строго эллиптичен, т. е.

$$\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\eta}\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\xi} > 0, \quad \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta}\in R^n, \quad \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta}\neq 0 \tag{2.2}$$

Условие (2.2) обеспечивает строгую эллиптичность оператора $\mathbf{A}$. Еще одно предположение необходимое для дальнейшего состоит в условии гиперупругости анизотропной среды,— это приводит к симметрии $\mathbf{C}$ по крайним парам индексов: $C^{ijkl} = C^{klij}$.

Преобразование Фурье

$$f^\vee(\boldsymbol{\xi}) = \int_{R^3} f(\mathbf{x}) \exp(-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})\,dx \tag{2.3}$$

примененное к оператору $\mathbf{A}$, дает соответствующий символ

$$\mathbf{A}^\vee(\boldsymbol{\xi}) = 4\pi^2 \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\xi} \tag{2.4}$$

Используя (2.4), символ $\mathbf{E}^\vee$ фундаментального решения $\mathbf{E}$ можно записать в виде

$$\mathbf{E}^\vee(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}_0^\vee(\boldsymbol{\xi}) / \det \mathbf{A}^\vee(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.5}$$

где $\mathbf{A}_0^\vee$ — матрица алгебраических дополнений символа $\mathbf{A}^\vee$. Формула (2.5) показывает, что символ $\mathbf{E}^\vee$ строго эллиптичен и положительно однороден по $\boldsymbol{\xi}$ степени -2. Обратное преобразование Фурье символа $\mathbf{E}^\vee$ дает фундаментальное решение $\mathbf{E}$ уравнений статики [21], при этом $\mathbf{E}$ оказывается однородным по $\mathbf{x}$ степени $n-2$.

3. Построение периодического фундаментального решения. Для построения периодического фундаментального решения естественно было бы воспользоваться формулой суммирования Пуассона

$$\sum_{m\in\Lambda} f(\mathbf{x}+\mathbf{m}) = \sum_{m\in\Lambda^*} f^\vee(\mathbf{m}) \exp(2\pi i \mathbf{x}\cdot\mathbf{m}) \tag{3.1}$$

применимой к функциям из $L^1(R^n)$. В этой формуле $\mathbf{\Lambda}^*$ — решетка сопряженного базиса с векторами

$$\mathbf{b}_i=(-1)^i V_Q^{-1} \perp \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n$$

где V_Q — объем фундаментальной области $V_Q=|\bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i|$. Нетрудно видеть, что при $\mathbf{m}\in\mathbf{\Lambda}^*$ $\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}_i=m_i$.

К сожалению, фундаментальное решение с символом (2.5) не принадлежит $L^1(R^n)$, что делает невозможным непосредственное применение формулы (3.1). Однако, можно получить аналог формулы Пуассона для суммирования ряда, определяющего собой периодическое фундаментальное решение.

Обозначим через $Q_n=R^n/\Lambda$ (R^n/Λ — фактор-пространство R^n по Λ) фундаментальную область; пусть Λ_0^* — решетка сопряженного базиса без нулевого узла; $\bar{L}^p(Q_n)$ — пространство интегрируемых в p-степени периодических функций, среднее значение которых в Q_n равно нулю. Следуя [20] разложим δ-функцию в Q_n в тригонометрический ряд

$$\delta_p(x)=1/V_Q\Big(1+\sum_{m^*\in\Lambda_0^*}\exp(-2\pi i\mathbf{m}^*\cdot\mathbf{x})\Big) \tag{3.2}$$

Определение. Периодическим фундаментальным решением $\mathbf{E}_p'$ будем называть решение в Q_n, удовлетворяющее условию: $\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{E}_p'=(\delta-V_Q^{-1})\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная диагональная матрица.

Этим определением фундаментальное решение $\mathbf{E}_p'$ задается с точностью до слагаемого, описывающего жесткое смещение среды.

Предложение 1. Формулой

$$\mathbf{E}_p'(\mathbf{x})=1/V_Q\sum_{m^*\in\Lambda_0^*}\mathbf{E}^\vee(\mathbf{m}^*)\exp(-2\pi i\mathbf{m}^*\cdot\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

определяется периодическое фундаментальное решение класса $\bar{L}^1$.

Доказательство. Действуя оператором $\mathbf{A}$ на фундаментальное решение $\mathbf{E}_p'$ и принимая во внимание (3.2), получаем: $(\delta-V_Q^{-1})\mathbf{I}$. Остается показать, что $\mathbf{E}_p'\in\bar{L}^1$.

Пусть W — окрестность нуля в R^n, целиком содержащаяся в Q_n. Обозначим через φ характеристическую функцию $R^n\backslash W$, положим $\mathbf{F}(\xi)=\varphi(\xi)\mathbf{E}^\vee(\xi)$. Рассмотрим обратное преобразование Фурье тензорной функции $\mathbf{F}:\mathbf{F}^\wedge=\varphi^\wedge*\mathbf{E}$. Записывая $\mathbf{F}$ в виде $\mathbf{E}^\vee+(\varphi-1)\mathbf{E}^\vee$, видим, что $\mathbf{F}^\wedge(\mathbf{x})=\mathbf{E}(\mathbf{x})+(\varphi^\wedge-\delta)*\mathbf{E}(\mathbf{x})$, но второе слагаемое в этой формуле представляет собой (бесконечно) гладкую функцию, поскольку $(\varphi^\wedge-\delta)*\mathbf{E}(\mathbf{x})$ представляет собой обратное преобразование Фурье функции с компактным носителем $(\varphi-1)\mathbf{E}^\vee(\xi)$ класса L^1 в R^n.

Рассматривая производные $\partial_\xi^\alpha\mathbf{F}(\xi)$ с мультииндексом α таким, что $|\alpha|>n-2$, видим, что $\partial_\xi^\alpha\mathbf{F}(\xi)\in L^1(R^n)$. Отсюда вытекает оценка $|\mathbf{x}|^\alpha|\mathbf{F}^\wedge(\mathbf{x})|=o(1)$, $|\mathbf{x}|\to\infty$, показывающая, что $\mathbf{F}^\wedge\in L^1$. Таким образом, для функции $\mathbf{F}^\wedge$ справедлива формула суммирования Пуассона

$$\sum_{m\in\Lambda}\mathbf{F}^\wedge(\mathbf{x}+\mathbf{m})=\sum_{m\in\Lambda^*}\mathbf{F}(\mathbf{m})\exp(2\pi i\mathbf{x}\cdot\mathbf{m}) \tag{3.4}$$

определяющая функцию класса $L^1(Q_n)$. Но ряд в правой части (3.4) с точностью до множителя и слагаемого совпадает с рядом, стоящим в правой части (3.3), так что $\mathbf{E}_p'\in\bar{L}^1(Q_n)$.

Следствие 1. Периодическое фундаментальное решение $\mathbf{E}_p'$ представимо в виде

$$\mathbf{E}_p'(\mathbf{x})=\mathbf{E}(\mathbf{x})+\mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in Q_n \tag{3.5}$$

где тензорная функция $\mathbf{G}$ принадлежит классу $C^\infty(R^n)$.

Доказательство вытекает из доказательства предложения 1, в ходе которого было получено представление $\mathbf{F}^\wedge(\mathbf{x})=\mathbf{E}(\mathbf{x})+(\varphi^\wedge-\delta)*\mathbf{E}(\mathbf{x})$, где второе слагаемое принадлежит классу $C^\infty(R^n)$. Выделяя в левой части (3.4) слагаемое, отвечающее нулевому узлу, получаем

$$\sum_{m\in\Lambda}\mathbf{F}^\wedge(\mathbf{x}+\mathbf{m})=\mathbf{E}(\mathbf{x})+(\varphi^\wedge-\delta)*\mathbf{E}(\mathbf{x})+\sum_{m\in\Lambda_0}\mathbf{F}^\wedge(\mathbf{x}+\mathbf{m}) \tag{3.6}$$

Полученная ранее оценка $|\mathbf{x}|^\alpha|\mathbf{F}^\wedge(\mathbf{x})|=o(1)$, $|\mathbf{x}|\to\infty$ при больших α показывает, что ряд в правой части (3.6) абсолютно и равномерно сходится на любом компакте в R^n. Аналогичным образом устанавливается непрерывная дифференцируемость суммы этого ряда.

Следствие 2. Периодическое фундаментальное решение вещественно-аналитично в $Q_n\backslash 0$.

Доказательство. Рассматривая разложение (3.5), видим, что первое слагаемое вещественно-аналитично в $R^n\backslash 0$, как фундаментальное решение дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами [19]. Функция $\mathbf{G}$ из (3.5) также вещественно-аналитична, поскольку представляет собой сумму двух вещественно-аналитических слагаемых: $(\varphi^\wedge-\delta)*\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и абсолютно сходящегося ряда с аналитическими членами.

В следующем предложении конкретизируются свойства периодического фундаментального решения, рассматриваемого как интегральный оператор, действующий в соответствующих функциональных пространствах в Q_n.

Предложение 2. *а*) $\mathbf{E}_p'\in(\bar{L}^2, \bar{L}^2)$; *б*) $\mathbf{E}_p'$ — строго эллиптично в $\bar{L}^2(Q_n)$.

Доказательство а) вытекает из периодического аналога теоремы Марцинкевича о мультипликаторах и ограниченности мультипликаторов

$$\mathbf{E}^\vee(\mathbf{m})=\begin{cases}0, & \text{если } \mathbf{m}=0\\ \mathbf{E}^\vee(\mathbf{m}), & \text{если } \mathbf{m}\neq 0\end{cases}$$

при любых $\mathbf{m}\in\Lambda^*$. Доказательство *б*) следует из строгой эллиптичности $\mathbf{E}^\vee$ и соответствующих мультипликаторов.

Замечание. Идея суммирования расходящихся рядов вида $\sum\limits_{m\in\Lambda}|\mathbf{x}+\mathbf{m}|^{-\alpha}$, $0<\alpha<n$ и обоснование соответствующей формулы Пуассона содержится в [22].

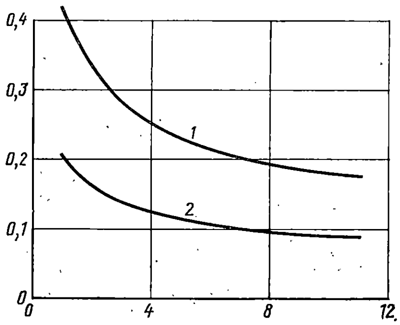
4. Свойства потенциалов. Пусть $\bar{\Omega}\subset Q_n$ — собственно регулярная область с границей $\partial\Omega$. Следующими формулами определяется соответственно объемный потенциал, потенциал простого и двойного слоя:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})=\int_\Omega \mathbf{E}_p'(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{y})dy \tag{4.1}$$

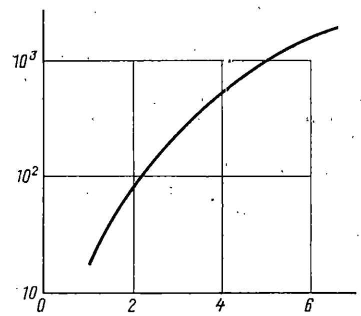
$$\mathbf{V}(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega}\mathbf{E}_p'(\mathbf{x}-\mathbf{y}')\cdot\alpha(\mathbf{y}')dy' \tag{4.2}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x})=\int_{\partial\Omega}\beta(\mathbf{y}')\cdot\mathbf{T}(\mathbf{v}_{y'},\partial_{y'})\cdot\mathbf{E}_p'(\mathbf{x}-\mathbf{y}')dy' \tag{4.3}$$

где $\mathbf{T}(\mathbf{v}_{y'},\partial_{y'})$ — оператор напряжений на граничном многообразии $\partial\Omega$;



Фиг. 1



Фиг. 2

$\mathbf{v}$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$; $\partial y'$ — индуцированная на $\partial\Omega$ мера Лебега; $\mathbf{f}$, α, β — векторные плотности со значениями в R^n.

Поскольку для любой области $\overline{\Omega}\subset Q_n$, или, в более общем случае для любого борелевского подмножества $\Omega\subset Q_n$ существует собственное вложение Ω в Q_n, удобно при анализе свойств объемного потенциала отождествлять пространства $L^p(\Omega)$ с подпространствами в $L^p(Q_n)$, порожденными функциями с носителем в Ω и продолженными нулем в $Q_n\backslash\Omega$. При переходе к H^s-пространствам периодических обобщенных функций, для которых конечна H^s-норма

$$\|f\|_s^2=\sum_{m\in\Lambda}(1+|m|^s)^2|f_m|^2<\infty, \qquad s\geqslant 0$$

вложение $H^s(\Omega)$ в $H^s(Q_n)$ также возможно, но при этом накладываются определенные ограничения на гладкость границы $\partial\Omega$ [22]. Далее через $\overline{H}^s(Q_n)$ обозначено подпространство в $H^s(Q_n)$ функций с нулевым средним значением.

Предложение 3. *а*) Объемный потенциал (4.1) задает топологический изоморфизм из $\overline{H}^{s-2}(Q_n)$ в $\overline{H}^s(Q_n)$ при $s>n/2$; *б*) Если граница $\partial\Omega$ представляет собой вложенное компактное многообразие класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha>0$, то потенциал простого слоя (4.2) непрерывен, как отображение из $L^2(\partial\Omega)$ в $\overline{H}^1(Q_n)$; *в*) В условиях предыдущего пункта потенциал двойного слоя (4.3) непрерывен из $L^2(\partial\Omega)$ в $\overline{L}^2(Q_n)$.

Доказательство *а*). Отображение K: $\overline{H}^{s-2}\to\overline{H}^s$ очевидно, непрерывно и инъективно. Пусть g — произвольный элемент из $\overline{H}^s$. В силу строгой эллиптичности $\mathbf{A}$ и того факта, что при $s>2+n/2$ $H^{s-2}\subset C(Q_n)$, существует единственный элемент $f\in\overline{H}^{s-2}$, что $f=\mathbf{A}g$ (единственными нетривиальными регулярными решениями уравнения $\mathbf{A}g=0$ в Q_n являются константы, но $\overline{H}^s$ их не содержит). Применение теоремы Банаха завершает доказательство этого пункта.

Для доказательства *б*) рассмотрим представление (3.5) для $\mathbf{E}_p'$. Свертка $\alpha*\mathbf{G}$ непрерывна при отображении из $L^2(\partial\Omega, R^n)$ в $H^1(Q_n, R^n)$, поскольку $\mathbf{G}\in C^\infty$. Свертка $\alpha*\mathbf{E}$ также непрерывна в указанных пространствах, что вытекает из теорем Жиро [23] о потенциалах простого слоя. Остается показать, что среднее значение $\alpha*\mathbf{E}_p'$ в Q_n равно нулю, но это следует из представления (3.3) для $\mathbf{E}_p'$. Доказательство *в*) аналогично предыдущему.

5. Пример. Рассматривается задача построения периодического фундаментального решения в R^3 для изотропной среды, тензор упругости которой в компонентной форме записывается в виде

$$C^{ijmn}=\mu(\delta^{im}\delta^{jn}+\delta^{in}\delta^{jm})+\lambda\delta^{ij}\delta^{mn} \tag{5.1}$$

где λ, μ — константы Ламе. Подстановка (5.1) в (2.4), (2.5) после несложных алгебрaических преобразований дает

$$E^{\sim}(\xi)=(2\pi)^{-2}[\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}[(\lambda+3\mu)|\xi|^{-2}-2(\lambda+\mu)\xi\otimes\xi|\xi|^{-4}] \qquad (5.2)$$

Заметим, что (5.2) удается аналитически обратить по Фурье, что приводит к известной формуле для фундаментального решения Кельвина $E(x)=[4\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}\cdot[(\lambda+3\mu)|x|^{-1}+(\lambda+\mu)x\otimes x|x|^{-3}]$.

Подстановка символа (5.2) в формулу (3.3) дает периодическое фундаментальное решение. Для оценки скорости сходимости ряда (3.3) на фиг. 1 показаны зависимости для компонент: (1) $-E_p^{11}$; (2) $-E_p^{22}$, $|x|=1$ от числа узлов m^* по каждому из направлений при суммировании ряда (3.3). Заметим, что выделение особенности вида $|x|^{-1}$ в соответствии с (3.5) обеспечивает равномерную сходимость рассматриваемого ряда всюду в Q_n. Это позволяет ограничиться исследованием скорости сходимости на единичной сфере $\|x|=1$. Приведенные на фиг. 1 графики соответствуют простой кубической (*SC*) структурной решетке. Аналогичные зависимости имеют место и для других типов структурных решеток.

Зависимость затрат процессорного времени в сек. для ЭВМ типа IBM PC AT от числа узлов приведена на фиг. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strutt J. W. S. (Lord Rayleigh)* On the influence of obstacles arranged in rectangular order on the properties of the medium // Phys. Mag. 1892. V. 34. № 241. P. 481–502.
2. *Burgers J. M.* On the influence of a suspension upon the sedimentation velocity // Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 1941. V. 44. P. 1045–1057, 1177–1184.
3. *Brinkman H. C.* Calculation of the viscous force exerted by flaving fluid on a dense swarm of particles // Appl. Scient. Res. 1947. V. 1. Ser. A. № 1. P. 27–34.
4. *Brinkman H. C.* On the permeability of the media consisting of closely packed porous particles // Appl. Scient. Res. 1948. V. 1. Ser. A. № 2. P. 81–86.
5. *Debye P., Bueche A. M.* Intrinsic viscosity, diffusion and sedimentation rate of polymers in solution // J. Chem. Phys. 1948. V. 16. № 6. P. 573–579.
6. *Hasimoto H.* On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres // J. Fluid Mech. 1959, V. 5. № 2. P. 317–328.
7. *Ewald P. P.* Die Berechnung optische und elektrostatischer Gitterpotentiale // Ann. Physik. 1921. B. 64. P. 253–287.
8. *Walpole L. J.* The elastic behaviour of a suspension of spherical particles // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1972. V. 25. Pt 2. P. 153–160.
9. *Zurovsky M., Brenner H.* Effective conductivities of composite materials composed of cubic arrangements of spherical particles embedded in an isotropic matrix // ZAMP. 1977. V. 28. № 6. P. 979–992.
10. *Nemat-Nasser S., Taya M.* On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids // Quart. Appl. Math. 1981. V. 39. № 1. P. 43–59.
11. *Nemat-Nasser S., Taya M.* On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids: comments and corrections // Quart. Appl. Math. 1985. V. 43. № 2. P. 187–188.
12. *Nemat-Nasser S., Iwakuma T., Hejazi M.* On composites with periodic microstructure // Mech. Mater. 1982. V. 1. № 3. P. 239–267.
13. *Iwakama T., Nemat-Nasser S.* Composites with periodic microstructure // Computers and Struct. 1983. V. 16. № 1–4. P. 13–19.
14. *Nunan K. C., Keller J. B.* Effective elasticity tensor of a periodic composite // J. Mech. Phys. Solids. 1984. V. 32. № 4. P. 259–280.
15. *Sangani A. S., Lu W.* Elastic coefficients of composites containing spherical inclusions in a periodic array // J. Mech. Phys. Solids. 1987. V. 35. № 1. P. 1–21.
16. *Sangani A. S., Acrivos A.* Slow flow through a periodic array of spheres // Intern. J. Multiphase Flow. 1982. V. 8. № 4. P. 343–360.
17. *Zick A. A., Homsy G. M.* Stokes flow through periodic arrays of spheres // J. Fluid Mech. 1982. V. 115. P. 13–26.
18. *Zick A. A.* Heat conduction through periodic arrays of spheres // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1983. V. 26. № 3. P. 465–469.
19. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965. 379 с.
20. *Titchmarsh E. C.* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. P. 2. Oxford.: Clarendon press, 1958. 404 p.
21. *Кузнецов С. В.* Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных упругих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50–54.
22. *Wainger S.* Special trigonometric series in K-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. 1965. № 59. 102 p.
23. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 256 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.X.1989