МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 539.3

Ю. А. АНТИПОВ, Н. Х. АРУТЮНЯН

КРУЧЕНИЕ СОСТАВНОГО ШАРА С КОЛЬЦЕВОЙ ИЛИ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрены две задачи о кручении упругого шара, составленного из двух разнородных полушарий и имеющего кольцевую (задача 1) или дискообразную (задача 2) трещину. Шар скручивается касательными окружными усилиями. Берега трещин свободны от напряжений. В отличие от [1], где задача кручения однородного шара с дискообразной трещиной формулируется в смещениях, и интегродифференциальное уравнение, которому эквивалентна эта задача, решается при помощи спектрального соотношения, полученного в этой же работе, в настоящей статье задачи 1, 2 формулируются в напряжениях, что позволило свести соответствующие интегральные уравнения к векторной задаче Римана, допускающей решение методом [2]. При этом решение интегрального уравнения, соответствующего задаче 2, ищется в классе интегрируемых функций, а уравнения задачи 1 — в классе функций, имеющих неинтегрируемые (порядка $^3/_2$) особенности в концевой точке. Получены формулы для угловых смещений берегов трещины и коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Задача 2 решена также методом [1].

1. Сведение задачи о кольцевой трещине к интегральному уравнению. Пусть упругий шар ($0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$) составлен из двух полушарий, сцепленных между собой и изготовленных из разных материалов (G_1 и G_2 — модули сдвига материалов соответственно при $0<\theta<\pi/2$ и $\pi/2<\theta<\pi$). В шаре имеется кольцевая трещина ($b<r<a$, $\theta=\pi/2\pm 0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$), и он скручивается касательными окружными усилиями, приложенными вдоль параллелей $\theta=\theta_0$, $\theta=\pi-\theta_0$ ($0<\theta_0<\pi/2$) (фиг. 1), (фиг. 2); M — величина крутящего момента. Определим угловые смещения берегов трещины и КИН.

В сформулированной задаче касательные напряжения удовлетворяют уравнению равновесия

$$r\frac{\partial}{\partial r}\tau_{r\varphi}+\frac{\partial}{\partial\theta}\tau_{\theta\varphi}+3\tau_{r\varphi}+2\operatorname{ctg}\theta\,\tau_{\theta\varphi}=0\quad(0\leqslant r<a,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi)\tag{1.1}$$

связаны с угловым смещением соотношениями

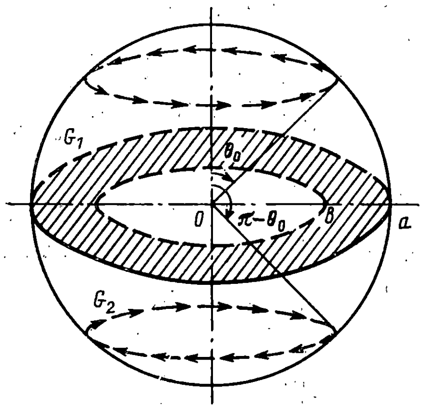
$$\tau_{r\varphi}=G_i r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right),\quad \tau_{\theta\varphi}=G_i\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)-\operatorname{ctg}\theta\frac{u_\varphi}{r}\right]\tag{1.2}$$

и удовлетворяют следующим граничным условиям ($\delta(x)$ — δ-функция):

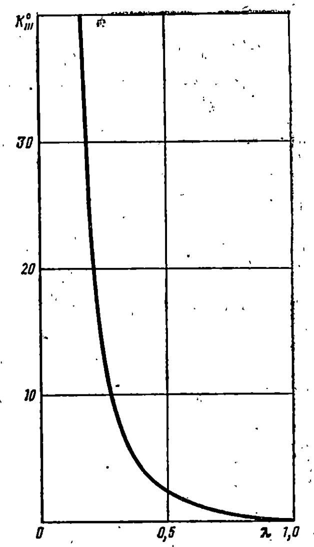
$$\begin{gathered}\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0}=\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2+0}=0\quad(b\leqslant r\leqslant a)\\ \tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0}=\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\varphi/2+0},\quad u_\varphi|_{\theta=\pi/2-0}=u_\varphi|_{\theta=\pi/2+0}\quad(0\leqslant r\leqslant b)\\ \tau_{r\varphi}|_{r=a}=\tau_0\operatorname{cosec}\theta_0[\delta(\theta-\theta_0)-\delta(\theta-\pi+\theta_0)]\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)\\ \tau_0=M(2\pi a^3\sin\theta_0)^{-1}\end{gathered}\tag{1.3}$$

Введем функцию

$$v_\varphi=r\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_\varphi}{r}\tag{1.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

тогда напряжения будут с ней связаны соотношениями

$$\tau_{r\varphi}=G_i v_\varphi, \quad r\frac{\partial}{\partial r}\tau_{\theta\varphi}=G_i\left(\frac{\partial}{\partial\theta}v_\varphi-\operatorname{ctg}\theta v_\varphi\right) \tag{1.5}$$

Подействуем на уравнение (1.1) оператором $r\partial/\partial r$ и приходим к следующей краевой задаче

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v_\varphi+4r\frac{\partial}{\partial r}v_\varphi+2v_\varphi+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}\right)-\frac{v_\varphi}{\sin^2\theta}=0$$
$$(0\leqslant r<a, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{1.6}$$

$$G_1\frac{\partial}{\partial\theta}v_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}-0\right)=G_2\frac{\partial}{\partial\theta}v_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}+0\right)=0 \quad (b<r<a)$$
$$G_1\frac{\partial}{\partial\theta}v_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}-0\right)=G_2\frac{\partial}{\partial\theta}v_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}+0\right) \quad (0\leqslant r<b) \tag{1.7}$$

$$v_\varphi(r, \pi/2-0)=v_\varphi(r, \pi/2+0) \quad (0\leqslant r<b)$$
$$G_1 v_\varphi(a, \theta)=\tau_0\operatorname{cosec}\theta_0\delta(\theta-\theta_0) \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$$
$$G_2 v_\varphi(a, \theta)=-\tau_0\operatorname{cosec}\theta_0\delta(\pi-\theta_0-\theta) \quad (\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

Пусть

$$v_\varphi(r, \theta)=v_+(r, \cos\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi/2);$$
$$v_\varphi(r, \theta)=v_-(r, \cos\theta) \quad (\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

$$\chi(r)=G_1\frac{\partial}{\partial\theta}v_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}-0\right)=G_2\frac{\partial}{\partial\theta}v_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}+0\right) \quad (\leqslant r\leqslant a) \tag{1.8}$$

тогда на основании (1.7) $\chi(r)=0$ при $b<r\leqslant a$. Принимая во внимание обозначения (1.8), краевую задачу для уравнения (1.6) для шара приведем к двум задачам V^+ и V^- для верхнего и нижнего полушариев

$(t=\cos\theta)$:

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v_\pm+4r\frac{\partial}{\partial r}v_\pm+2v_\pm+\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}v_\pm\right]-\frac{v_\pm}{1-t^2}=0$$

$$(0\leqslant r<a,\ 0<\pm t<1)$$

$$\left.\frac{\partial v_\pm}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{G_i}\chi(r),\quad v_\pm|_{t=\pm1}=0\quad(0\leqslant r\leqslant a)$$

$$v_\pm|_{r=a}=\pm G_i^{-1}\tau_0\delta(t\mp t_0)\quad(0\leqslant\pm t\leqslant1),\ t_0=\cos\theta_0$$

Функции v_+, v_- должны удовлетворять условию сшивки

$$v_+(r,\ +0)=v_-(r,\ -0)\quad(0\leqslant r\leqslant b)\tag{1.9}$$

вытекающего из условия непрерывности смещений в зоне сцепления полушариев.

Рассмотрим сначала задачу V^+. Разложим функцию $v_+(r,\ t)$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$v_+(r,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+{}^3/_2)P_{2m+1}^{(1)}(t)}{(m+1)(2m+1)}v_m^+(r)$$

$$v_m^+(r)=\int_0^1 v_+(r,t)P_{2m+1}^{(1)}(t)\,dt\quad(m=0,1,\ldots)\tag{1.10}$$

где $P_k^{(1)}(t)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода. При помощи преобразования Лежандра (1.10) задачу V^+ приведем к одномерной краевой задаче

$$\left[r^2\frac{d^2}{dr^2}+4r\frac{d}{dr}-2m(2m+3)\right]v_m^+=-\frac{\mu_m}{G_1}\chi(r)\quad(0<r<a)$$

$$v_m^+(a)=G_1^{-1}\tau_0P_{2m+1}^{(1)}(t_0),\quad |v_m^+(0)|<\infty$$

$$\mu_m=P_{2m+1}^{(1)}(0)=2\pi^{-1/2}(-1)^{m+1}(m!)^{-1}\Gamma(m+{}^3/_2)\tag{1.11}$$

Принимая во внимание функцию Грина

$$G(r,\rho)=-\frac{1}{4m+3}\left[\frac{1}{\rho}g_m\left(\frac{r}{\rho}\right)-\frac{\rho^2}{a^3}\left(\frac{r\rho}{a^2}\right)^{2m}\right]$$

$$g_m(\xi)=\xi^{2m}\quad(\xi<1),\quad g_m(\xi)=\xi^{-2m-3}\quad(\xi>1)$$

решение задачи (1.11) получим в виде

$$v_m^+(r)=\frac{\mu_m}{(4m+3)G_1}\int_0^b\left[\frac{1}{\rho}g_m\left(\frac{r}{\rho}\right)-\left(\frac{r\rho}{a^2}\right)^{2m}\frac{\rho^2}{a^3}\right]\chi(\rho)\,d\rho+$$

$$+G_1^{-1}\tau_0(ra^{-1})^{2m}P_{2m+1}^{(1)}(t_0)$$

Подставляя последнее выражение в первое равенство (1.10) и учитывая связь [3] гипергеометрической функции Гаусса с ядром Вебера — Сонина $W_{11}(r,\ \rho)=\rho(2r^2)^{-1}F({}^1/_2,\ {}^3/_2,\ 2;\ \rho^2r^{-2})$, $r>\rho$ (при $r<\rho$ r и ρ меняются местами), где $W_{kk}(r,\rho)=\int_0^\infty J_k(rt)J_k(\rho t)\,dt$, приходим к следующему выражению ($0 \leqslant r \leqslant b$):

$$G_1 r v_+(r, +0) = \int_0^b [W_{11}(r, \rho) - a W_{11}(r\rho, a^2)] \chi(\rho) \rho \, d\rho - h(r) \tag{1.12}$$

$$h(r) = \frac{\tau_0 a}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+3) (1/2)_m}{(m+1)!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2m+1} P_{2m+1}^{(1)}(t_0)$$

Точно так же решается задача V^-. Ее решение при $t=-0$ определяется равенством (1.12), если в нем левую часть заменить на $-G_2 r v_-(r, -0)$. Реализуем условие сшивки (1.9) и получаем следующее интегральное уравнение

$$\int_0^b [W_{11}(r, \rho) - a W_{11}(r\rho, a^2)] \chi(\rho) \rho \, d\rho = h(r) \quad (0 < r < b) \tag{1.13}$$

На основании связи (1.5), (1.8) функции $\chi(r)$ с напряжением $\tau_{\theta\varphi}$:

$$\chi(r) = r \frac{\partial}{\partial r} \tau_{\theta\varphi} \Big|_{\theta=\pi/2 \pm 0}$$

решение уравнения (1.13) ищем в пространстве $H^{1, -3/2}(0, b)$, которое определим так

$$H^{\alpha, \beta}(0, b) = \{\varphi(x) : \varphi(x) = x^\alpha (b-x)^\beta \varphi_0(x), \ \varphi_0(x) \in H[0, b]\}$$

($H[0, b]$ — пространство Гельдера). Интеграл в (1.13) понимается в регуляризованном (обобщенном) смысле [4].

2. Решение интегрального уравнения (1.13). Введем замены переменных $r = bx$, $\rho = by$ и обозначения

$$\psi(y) = b y \chi(by), \quad \lambda = b/a \in (0, 1) \tag{2.1}$$

и уравнение (1.13) преобразуем к виду

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{y} l\left(\frac{x}{y}\right) - \lambda l(\lambda^2 x y)\right] \psi(y) dy = f(x) \quad (0 < x < 1) \tag{2.2}$$

$$l(\xi) = \int_0^\infty J_1(\xi\tau) J_1(\tau) d\tau, \qquad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \lambda^{2m+1} x^{2m+1}$$

$$f_m = {}^1/_2 \tau_0 a (-1)^m (4m+3) ({}^1/_2)_m [(m+1)!]^{-1} P_{2m+1}^{(1)}(t_0)$$

Решение уравнения (2.1) ищется в пространстве неинтегрируемых функций $H^{2, -3/2}(0, b)$.

Введем односторонние функции $\psi_-(x) = \psi(x)$, $f_-(x) = f(x)$ и неизвестную функцию $\psi_+(x)$ такие, что $\operatorname{supp}(\psi_-, f_-) \subset [0, 1]$, $\operatorname{supp} \psi_+ \subset [1, \infty)$ и доопределим уравнение (2.2) на полуось

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{y} l\left(\frac{x}{y}\right) - \lambda l(\lambda^2 x y)\right] \psi_-(y) dy = f_-(x) + \psi_+(x) \quad (0 < x < \infty) \tag{2.3}$$

Пусть

$$\Phi_2^-(s)=\int_0^1 \psi(y)y^{s-1}dy, \quad \Phi_1^+(s)=\int_1^\infty \psi_+(x)x^{s-1}dx \tag{2.4}$$

$$M[l](s)=\int_0^1 l(x)x^{s-1}\,dx=L(s), \quad F^-(s)=\int_0^1 f(x)x^{s-1}\,dx$$

тогда функция $\Phi_2^-(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s>0$, а $\Phi_1^+(s)$ — при $\operatorname{Re} s<{}^3/_2$ и

$$L(s)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma({}^1/_2+s/2)\Gamma(1-s/2)}{\Gamma({}^3/_2-s/2)\Gamma(1+s/2)}\left(-\frac{1}{2}<\operatorname{Re} s<\frac{3}{2}\right), \quad F^-(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m\lambda^{2m+1}}{2m+s+1}$$

Учитывая свойства преобразования Меллина

$$M\left[\int_0^\infty \psi_-(y)l\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}\right](s)=L(s)\Phi_2^-(s)$$

$$M\left[\int_0^\infty \psi_-(y)l(\lambda^2xy)dy\right](s)=\lambda^{-2s}L(s)\Phi_2^-(1-s) \tag{2.5}$$

преобразуем интегральное уравнение (2.3) к функциональному

$$L(s)\Phi_2^-(s)-\lambda^{1-2s}L(s)\Phi_2^+(s)=\Phi_1^+(s)+F^-(s), \quad \operatorname{Re} s\in(0,1)$$

где $\Phi_2^+(s)=\Phi_2^-(1-s)$. Обозначая $\Phi_1^-(s)=\Phi_1^+(1-s)$, $F^+(s)=F^-(1-s)$ и принимая во внимание, что $L(s)=L(1-s)$, приходим к векторной задаче Римана

$$\Phi_2^-(t)=\lambda^{1-2t}\Phi_2^+(t)+L^{-1}(t)\Phi_1^+(t)+L^{-1}(t)F^-(t)$$

$$\Phi_2^+(t)=\lambda^{-1+2t}\Phi_2^-(t)+L^{-1}(t)\Phi_1^-(t)+L^{-1}(t)F^+(t)$$

$$(t\in\Gamma\colon \operatorname{Re} t=\gamma,\ \gamma\in(0,1)) \tag{2.6}$$

относительно кусочно-аналитического вектора $\Phi(s)=\|\Phi_1(s),\ \Phi_2(s)\|$ с линией скачков Γ — вектор $\Phi^+(s)$ аналитичен в $D^+(\operatorname{Re} s\leqslant\gamma)$, а $\Phi^-(s)$ — в $D^-(\operatorname{Re} s\geqslant\gamma)$.

Задачу (2.6) решаем методом [2]. Факторизуем функцию $L(s)$:

$$L(s)=\frac{K^+(s)}{[K^-(s)]^{-1}}, \quad K^+(s)=\frac{\Gamma(1-s/2)}{2^{1/2}\Gamma({}^3/_2-s/2)}, \quad K^-(s)=\frac{\Gamma({}^1/_2+s/2)}{2^{1/2}\Gamma(1+s/2)} \tag{2.7}$$

и вводим в рассмотрение функции

$$\Psi^+(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m^+}{s-2-2m}, \quad \Psi^-(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m^-}{s+1+2m} \tag{2.8}$$

аналитические в D^+, D^- соответственно и имеющие в D^-, D^+ простые полюсы в тех же точках, что и функции $K^+(s)$, $F^+(s)$ и $K^-(s)$, $F^-(s)$ соответственно. Коэффициенты A_m^+, A_m^- находятся a posteriori.

Перепишем граничные условия (2.6) в виде

$$K^\mp(t)\Phi_2^\mp(t)-\Psi^\mp(t)=\lambda^{\pm1\mp2t}K^\mp(t)\Phi_2^\pm(t)-\Psi^\mp(t)+$$

$$+[K^\pm(t)]^{-1}\Phi_1^\pm(t)+[K^\pm(t)]^{-1}F^\mp(t) \tag{2.9}$$

Учитывая, что $\psi_-(y) \in H^{2,-3/2}(0, 1)$, $\psi_+(y) = O\{(x-1)^{-1/2}\}$ при $x \to 1+0$, по теоремам абелева типа получаем $\Phi_1^\pm(s) = O(s^{-1/2})$, $\Phi_2^\pm(s) = O(s^{1/2})$, $s \to \to \infty$, $s \in D^\pm$. Последующее применение к соотношениям (2.9) теоремы Лиувилля приводит к следующим формулам для решения задачи (2.6) (C — произвольная постоянная)

$$\Phi_1^\pm(s) = K^\pm(s)\,[C + \Psi^\mp(s)] - \lambda^{\pm 1 \mp 2s} K^\mp(s)\,[C + \Psi^\pm(s)] - F^\mp(s)$$

$$\Phi_2^\pm(s) = [K^\pm(s)]^{-1}[C + \Psi^\pm(s)], \quad s \in D^\pm \tag{2.10}$$

Для того, чтобы точки $s = -1 - 2n \in D^+$ и $s = 2 + 2n \in D^-$ были устранимыми для функций $\Phi_1^+(s)$, $\Phi_1^-(s)$ соответственно, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname*{res}_{s=-1-2n} \Phi_1^+(s) = 0, \quad \operatorname*{res}_{s=2+2n} \Phi_1^-(s) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

которые с учетом формул (2.10), (2.7) и (2.8) можно записать в виде бесконечной системы алгебраических уравнений

$$A_n^\pm = -\Delta_n \lambda^{4n+3}\left(\pm C + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^\mp}{2m+2n+3}\right) \mp h_n \lambda^{2n+1} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$\Delta_n = \frac{2(n+1)}{\pi(n+{}^1/_2)}, \qquad h_n = \frac{a\tau_0(4n+3)}{(-1)^n(2n+1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} P_{2n+1}^{(1)}(t_0)$$

Представим

$$A_n^\pm = \pm C A_{n0}^\pm + A_{n1}^\pm \tag{2.11}$$

и для определения $A_{ni}^\pm$ получим две раздельно решаемые бесконечные системы

$$A_{ni}^\pm = -\Delta_n \lambda^{4n+3}\left[\delta_{i0} + (-1)^{i+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{mi}^\mp}{2m+2n+3}\right] \mp h_n \lambda^{2n+1} \delta_{1i}$$

$$(n = 0, 1, \ldots;\ i = 0, 1)$$

Разыскивая решение в виде разложений по параметру λ

$$A_{n0}^\pm = \lambda^{4n+3} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm0}^\pm \lambda^m, \qquad A_{m1}^\pm = \lambda^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm1}^\pm \lambda^m \tag{2.12}$$

приходим к следующим рекуррентным соотношениям

$$a_{n00}^\pm = -\Delta_n, \qquad a_{n10}^\pm = a_{n20}^\pm = 0$$

$$a_{n,4k-1+i,0}^\pm = \Delta_n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_{j,4(k-j-1)+i,0}^\mp}{2n+2j+3} \quad (i = 0, 1, 2, 3;\ k = 1, 2, \ldots)$$

$$a_{n01}^\pm = \mp h_n, \qquad a_{n11}^\pm = \ldots = a_{n,2n+2,1}^\pm = 0 \tag{2.13}$$

$$a_{n,2n+2k+1+i,1}^\pm = -\Delta_n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_{j,2(k-j-1)+i,1}^\mp}{2n+2j+3} \quad (i = 0, 1;\ k = 1, 2, \ldots), \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Постоянную C найдем из условия равновесия верхнего полушария

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \tau_{\theta\varphi}\big|_{\theta\pi/2-0} r^2\, dr\, d\varphi + M = 0 \tag{2.14}$$

Для того, чтобы вычислить интеграл, содержащийся в последнем равенстве, учтем следующее соотношение [5]:

$$\int\limits_{c_1}^{c_2}\left[\frac{h(x)}{(x-c_1)^{\alpha}(c_2-x)^{\beta}}\right]' g(x)\,dx = -\int\limits_{c_1}^{c_2}\frac{h(x)g'(x)}{(x-c_1)^{\alpha}(c_2-x)^{\beta}}\,dx \qquad (2.15)$$

$$0<\operatorname{Re}(\alpha,\beta)<1$$

в котором значение сходящегося интеграла справа определяет регуляризованное значение для расходящегося интеграла, стоящего слева. Имеем на основании (1.2), (1.4) и (2.15):

$$\int\limits_0^b \tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0} r^2\,dr = -\frac{G_1}{3}\int\limits_0^b \frac{\partial}{\partial\theta} v_\varphi|_{\theta=\pi/2-0} r^2\,dr$$

Принимая во внимание формулу (1.8), условие равновесия (2.14) запишем в виде

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^b \varphi(r) r^2\,dr = M/2\pi$$

которое с учетом формул (2.1), (2.4) и (2.10) примет вид

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^2\left(C+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_m^-}{2m+3}\right)=\frac{M}{2\pi}$$

Подставляя в последнее равенство выражение (2.11), находим константу C:

$$C=\frac{1}{1-\omega_0}\left(\frac{3M}{4(2\pi)^{1/2}b^2}-\omega_1\right), \qquad \omega_i=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{mi}^-}{2m+3} \qquad (2.16)$$

3 Формулы для КИН и углового смещения. Введем в рассмотрение

$$K_{\text{III}} = \lim_{r\to b-0}\,[2\pi(b-r)]^{1/2}\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0}$$

тогда имеем следующее асимптотическое равенство

$$r\frac{\partial}{\partial r}\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0} \sim \frac{bK_{\text{III}}}{2^{3/2}\pi^{1/2}}(b-r)^{-3/2}, \qquad r\to b-0$$

Учитывая соотношение (1.8), получим

$$K_{\text{III}}=2^{3/2}\pi^{1/2}b^{-1}N, \qquad N=\lim_{r\to b-0}(b-r)^{3/2}\chi(r) \qquad (3.1)$$

С одной стороны по теореме абелева типа

$$\Phi_2^-(s)\sim Nb^{-1/2}\Gamma(-1/2)s^{1/2}, \quad s\to\infty, \quad s\in D^- \qquad (3.2)$$

С другой стороны из формул (2.10) следует $\Phi_2^-(s)\sim Cs^{1/2}$, $s\to\infty$, $s\in D^-$. Сопоставляя это поведение с (3.2) находим $N=-1/2(b\pi^{-1})^{1/2}C$, откуда с учетом равенства (3.1) и (2.16) приходим к окончательной формуле для КИН

$$K_{\text{III}}=(2b^{-1})^{1/2}(\omega_0-1)^{-1}[3M(4b^2)^{-1}(2\pi)^{-1/2}-\omega_1] \qquad (3.3)$$

Отсюда можно получить асимптотическую формулу для КИН, удобную при $\lambda\to 0$. Для этого подставим (2.16) в (3.3) и учтем (2.12). В результате находим

$$K_{\mathrm{III}}=-{}^3/_4\pi^{-1/2}a^{-5/2}M\lambda^{-1/2}+(2^{1/2}3^{-1}a^{-1/2}h_0+\pi^{-3/2}a^{-5/2}M)\lambda^{1/2}+$$
$$+2^{1/2}a^{-1/2}5^{-1}h_1\lambda^{5/2}+2^{1/2}a^{-1/2}7^{-1}h_2\lambda^{9/2}+O(\lambda^{13/2}),\quad \lambda\to 0$$

Определим теперь функцию v_φ, через которую при помощи (1.4) выражается угловое смещение u_φ. Вследствие (1.12) имеем

$$v_\varphi(bx,\ \pi/2\mp 0)=\pm(bxG_i)^{-1}[Q(x)-f(x)]$$

$$Q(x)=\int_0^1[l(x/y)/y-\lambda l(\lambda^2xy)]\psi(y)dy$$

Учитывая свойства (2.5) преобразования Меллина, получим

$$Q(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L(s)[\Phi_2^-(s)-\lambda^{1-2s}\Phi_2^+(s)]x^{-s}\,ds$$

Подставляя в последнее выражение формулы (2.7) и (2.10), находим при помощи теории вычетов

$$Q(x)=(2/\pi)^{1/2}C[x^{-2}(1-x^{-2})^{-1/2}-\lambda^3x(1-\lambda^4x^2)^{-1/2}]+\frac{1}{x^2}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^-q_m\left(\frac{1}{x}\right)+$$
$$+\lambda^3x\sum_{m=0}^{\infty}A_m^+q_m(\lambda^2x),\qquad 1<x<\lambda^{-1}$$

$$q_m(\xi)=(2/\pi)^{1/2}(2m+3)^{-1}F({}^1/_2,\ m+{}^3/_2,\ m+{}^5/_2,\ \xi^2)$$

Вследствие [3] при $\xi\to 1$:

$$q_m(\xi)=\frac{\Gamma(m+{}^3/_2)}{2^{1/2}(m+1)!}\xi^{-2m-3}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(1-\xi^2)^{1/2}F\left(m+2,1;\frac{3}{2};\ 1-\xi^2\right)$$

Угловые смещения u_φ берегов трещины имеют вид

$$u_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}\mp 0\right)=r\int_b^r v_\varphi\left(\rho,\frac{\pi}{2}\mp 0\right)\frac{d\rho}{\rho}+r\,\mathrm{const},\qquad b<r<a$$

4. Дискообразная трещина в составном шаре (метод векторной задачи Римана). Задача формулируется в виде краевой задачи для уравнения (1.1) при граничных условиях (1.3) на сферической поверхности шара, а также условиях на круге $\theta=\pi/2$, $0<r<a$:

$$\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0}=\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2+0}=0\quad(0\leqslant r<b)$$

$$\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0}=\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2+0},\ \ u_\varphi|_{\theta=\pi/2-0}=u_\varphi|_{\theta=\pi/2+0}\quad(b\leqslant r\leqslant a)$$

Введем в рассмотрение функцию $v(r,\ \cos\theta)=v_\varphi(r,\ \theta)$, где v_φ связана со смещением u_φ формулой (1.4). Тогда получим следующую краевую задачу

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v+4r\frac{\partial}{\partial r}v+2v+\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t^2)\frac{\partial v}{\partial t}\right]-\frac{v}{1-t^2}=0$$

$$(0\leqslant r<a,\ \ |t|<1)$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\pm 0}=0\quad (0\leqslant r<b),\qquad G_1\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=+0}=G_2\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=-0}\qquad (b<r<a) \tag{4.1}$$

$$v|_{t=+0}-v|_{t=-0}=\chi(r)\quad (0\leqslant r\leqslant a),\ \operatorname{supp}\chi\subset[0,a]$$
$$v|_{r=a}=\tau_0 G_1^{-1}\beta(t-t_0)-\tau_0 G_2^{-1}\delta(t+t_0),\quad |t|\leqslant 1 \tag{4.2}$$

Подлежащая определению функция $\chi(r)$ должна удовлетворять следующему условию замкнутости разреза

$$\left|\int_0^b \chi(r)\frac{dr}{r}\right|<\infty \tag{4.3}$$

Действительно, имеем

$$\int_0^b \chi(r)\frac{dr}{r}=\int_0^b\frac{\partial}{\partial r}\left(\left.\frac{u_\varphi}{r}\right|_{\theta=\pi/2-0}-\left.\frac{u_\varphi}{r}\right|_{\theta=\pi/2+0}\right)dr=$$
$$=-\lim_{r\to+0}\left(\left.\frac{u_\varphi}{r}\right|_{\theta=\pi/2-0}-\left.\frac{u_\varphi}{r}\right|_{\theta=\pi/2+0}\right)=\text{const}$$

Задачу (4.2) решаем при помощи преобразования Лежандра

$$v_k(r)=\int_{-1}^{1}v(r,\tau)P_k^{(1)}(\tau)\,d\tau,\qquad v(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+{}^1/_2}{k(k+1)}P_k^{(1)}(t)\,v_k(r)$$

и аналогично [1] приходим к следующему выражению

$$v(r,t)=\frac{\varkappa}{4\pi^{1/2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(m+{}^1/_2)}{(m+1)!}P_{2m+1}^{(1)}(t)\int_b^a\frac{\partial v}{\partial t}(\rho,+0)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\rho}\overset{\circ}{g}_{2m+1}\left(\frac{r}{\rho}\right)-\left(\frac{r\rho}{a^2}\right)^{2m+1}\frac{\rho}{ar}\right]d\rho+w(t)\chi(r)+$$
$$+\frac{d^2}{dr^2}r^2\int_0^b\chi(\rho)\frac{1}{2\pi^{1/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(m+{}^1/_2)}{2m(2m+1)m!}P_{2m}^{(1)}(t)\left[\frac{1}{\rho}g_{2m}^{\circ}\left(\frac{r}{\rho}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{r\rho}{a^2}\right)^{2m}\frac{\rho}{ar}\right]d\rho+\tau_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+{}^1/_2)}{k(k+1)}P_k^{(1)}(t)\left(\frac{r}{a}\right)^{k-1}[G_1^{-1}P_k^{(1)}(t_0)-$$
$$-G_2^{-1}P_k^{(1)}(-t_0)],\qquad \varkappa=1-G_1G_2^{-1} \tag{4.4}$$

$$g_k^{\circ}(\xi)=\xi^{k-1},\quad \xi<1;\quad g_k^{\circ}(\xi)=\xi^{-k-2},\quad \xi>1$$

$$w(t)=\frac{(1-t^2)^{1/2}}{2}\operatorname{sgn}t-\frac{1}{2\pi^{1/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m+{}^1/_2)(-1)^m\Gamma(m-{}^1/_2)}{2m(2m+1)(m+1)!}P_{2m}^{(1)}(t)$$

Учитывая равенства

$$\frac{d}{dt}P_{2m+1}^{(1)}(0)=0,\qquad \frac{d}{dt}w(0)=-\frac{1}{2}$$

и реализуя первое из (4.1) условие, получаем интегродифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2} r \int_0^b \rho\chi(\rho)\,[W_{00}(r,\rho) - aW_{00}(r\rho, a^2)]\,d\rho = -h^*(r) \qquad (0<r<b)$$

$$h^*(r) = \tau_* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m+1)\Gamma(m+{}^1/_2)(-1)^m}{\pi^{1/2} m!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2m-1} P_{2m}^{(1)}(t_0)$$

$$\tau_* = \tau_0 (G_1^{-1} + G_2^{-1}) \tag{4.5}$$

После двукратного интегрирования по r уравнения (4.5) и обозначений (2.1) приходим к уравнению (2.2), в котором

$$l(\xi) = \int_0^\infty J_0(\xi\tau) J_0(\tau)\,d\tau, \qquad f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \lambda^{2m} x^{2m}$$

$$f_0 = C, \qquad f_m = a\tau_* \frac{(4m+1)\Gamma(m+{}^1/_2)(-1)^{m-1}}{\pi^{1/2} m!\, 2m(2m+1)} P_{2m}^{(1)}(t_0)$$

C — произвольная постоянная. Следуя далее схеме п. 2, получаем решение соответствующей задачи Римана в виде

$$\Phi_1^{\pm}(s) = K^{\pm}(s)\Psi^{\mp}(s) - \lambda^{\pm 1 \mp 2s} K^{\mp}(s)\Psi^{\pm}(s) - F^{\mp}(s)$$

$$\Phi_2^{\pm}(s) = [K^{\pm}(s)]^{-1} \Psi^{\pm}(s) \tag{4.6}$$

$$K^+(s) = \frac{\Gamma({}^1/_2 - s/2)}{2^{1/2}\Gamma(1-s/2)}, \qquad K^-(s) = \frac{\Gamma(s/2)}{2^{1/2}\Gamma({}^1/_2 + s/2)}$$

$$\Psi^+(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^+}{s-2m-1}, \qquad \Psi^-(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^-}{s+2m}$$

$$F^+(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_m \lambda^{2m}}{1-s+2m}, \qquad F^-(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_m \lambda^{2m}}{s+2m}$$

Коэффициенты $A_m^{\pm}$ определяются формулой (2.11), а также разложениями по параметру λ:

$$A_{n,i}^{\pm} = \lambda^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nmi}^{\pm} \lambda^m$$

Рекуррентные соотношения (2.13) в данном случае примут вид

$$a_{n0i}^{\pm} = \mp h_{ni}, \qquad a_{n1i}^{\pm} = \ldots = a_{n,2n,i}^{\pm} = 0$$

$$a_{n,2n+2k-1+m,i}^{\pm} = -\frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_{j,2(k-j-1)+m,i}^{\mp}}{2n+2j+1} \qquad (m=0, 1;\ k=1, 2, \ldots)$$

$$h_{n0} = (2/\pi)^{1/2}\delta_{n0}, \quad h_{n1} = (1-\delta_{n0})\,[K^+(-2n)]^{-1} f_n \quad (n=0, 1, \ldots)$$

Постоянная C, входящая в (2.11), находится из условия замкнутости разреза (4.3), которое можно записать в виде $|\Phi_2^-(-1)|<\infty$. Подставляя в последнее неравенство выражение для $\Phi_2^-(-1)$ из (4.6), имеем

$$\left|\lim_{s\to-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{CA_{m0}^-+A_{m1}^-}{2m+s}\right|<\infty$$

Откуда получаем

$$C=-\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{m0}^-}{2m-1}\right)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_{m1}^-}{2m-1}$$

Найдем теперь формулу для КИН

$$K_{\rm III}=\lim_{r\to b+0}\,[2\pi(r-b)]^{1/2}\tau_{\theta\varphi}|_{\theta=\pi/2-0}=2(2\pi b)^{1/2}G_1\lim_{x\to1+0}\,(x-1)^{3/2}\frac{\partial v}{\partial t}(bx,+0) \tag{4.7}$$

Дифференцируя равенство (4.4) по t и полагая затем $t=+0$, имеем при $b<r<a$:

$$\left(1-\frac{\varkappa}{2}\right)\frac{\partial v}{\partial t}(r,+0)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}r\int_0^b\rho\chi(\rho)\,[W_{00}(r,\rho)-aW_{00}(r\rho,a^2)]\,d\rho+{}^1/_2h(r).$$

Подставляем последнее соотношение в равенство (4.7), учитываем связь интеграла с ядром Вебера — Сонина и интеграла с ядром Коши и получаем

$$K_{\rm III}=\left(\frac{2\pi}{b}\right)^{1/2}G_*\lim_{x\to1+0}\,(x-1)^{3/2}\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_0^1\psi(y)\,\frac{y}{x^2}\frac{dy}{y-x},\qquad G_*=\frac{2}{G_1^{-1}+G_2^{-1}}.$$

Пусть $y\psi(y)\sim N(1-y)^{-1/2}$, $y\to1-0$, тогда $K_{\rm III}=({}^1/_2\pi b^{-1})^{1/2}G_*N$. Принимая во внимание формулу (4.6), по теореме абелева типа находим окончательно

$$K_{\rm III}=(2b)^{-1/2}G_*\sum_{m=0}^{\infty}A_m^-$$

Аналогично задаче о кольцевой трещине в данном случае приходим к асимптотическому разложению для КИН

$$K_{\rm III}=M\lambda^{3/2}(\pi^{3/2}a^{5/2}\sin\theta_0)^{-1}[{}^5/_3P_2^{(1)}(t_0)-$$
$$-{}^3/_5\lambda^2P_4^{(1)}(t_0)+{}^9/_{245}\lambda^4P_6^{(1)}(t_0)]+O(\lambda^{13/2}),\ \lambda\to0 \tag{4.8}$$

которое можно записать в следующем виде

$$K_{\rm III}=-\frac{M\cos\theta_0\lambda^{3/2}}{\pi^{3/2}a^{5/2}}\left[5-\frac{3}{2}(4\cos^2\theta_0-3\sin^2\theta_0)\lambda^2\right]+O(\lambda^{9/2}),\qquad\lambda\to0 \tag{4.9}$$

5. Дискообразная трещина (метод ортогональных многочленов). Для того, чтобы воспользоваться результатами [1], сформулируем краевую задачу для смещения $u_\varphi(r,\theta)=u(r,\cos\theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t^2)\frac{\partial u}{\partial t}\right]-\frac{u}{1-t^2}=0\qquad(0\leqslant r<a,\ |t|<1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right)_{r=a}=\frac{\tau_0}{G_1}\delta(t-t_0)-\frac{\tau_0}{G_2}\delta(t+t_0)\qquad(|t|\leqslant1)$$

$$u|_{t=-0}-u|_{t=+0}=-2\chi(r)\quad (0\leqslant r\leqslant a),\ \operatorname{supp}\chi\subset[0,b]$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+0}-\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=-0}=\varkappa\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+0}\quad (0\leqslant r\leqslant a),\qquad \varkappa=1-\frac{G_1}{G_2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=-0}=0\quad (0\leqslant r<b) \tag{5.1}$$

Задача (5.1) решается при помощи преобразования Лежандра

$$u_k(r)=\int_{-1}^{1} u(r,\tau)P_k^{(1)}(\tau)\,d\tau\qquad (k=2,3,\ldots)$$

$$u(r,t)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{P_k^{(1)}(t)}{k(k+1)}u_k(r)+Cr(1-t^2)^{1/2}$$

где C — произвольная постоянная. Аналогично [1] приходим к следующему интегродифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d}{d\xi}\int_0^1 W_{00}(\xi,\eta)\chi(b\eta)\,d\eta+\lambda\int_0^1 V(\lambda^2\xi\eta)\chi(b\eta)\,d\eta=-h(b\xi)$$

$$(0\leqslant\xi<1),\ \lambda=b/a \tag{5.2}$$

Функция $V(x)$ определена в [1], а $h(x)$ отличается от соответствующей функции в [1] постоянным множителем

$$h(b\xi)=M_*\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(m-{}^1/_2)}{m!}(4m+1)P_{2m}^{(1)}(t_0)\lambda^{2m}\xi^{2m}$$

$$M_*=M(G_1^{-1}+G_2^{-1})(8\pi^{3/2}a^2\sin\theta_0)^{-1}$$

Решение уравнения (5.2) ищется в виде ряда по многочленам Гегенбауэра

$$\chi(b\eta)=M_*\sum_{k=0}^{\infty}X_k\eta C_{2k+1}^{(3/2)}((1-\eta^2)^{1/2}) \tag{5.3}$$

(коэффициенты X_k находятся при помощи рекуррентных соотношений в [1]), и КИН определяется формулой

$$K_{\rm III}=\frac{M}{\pi^{3/2}a^2b^{1/2}\sin\theta_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+{}^5/_2)}{k!}X_k$$

Из этого соотношения следуют асимптотические разложения при $\lambda\to0$, совпадающие с (4.8) и (4.9).

Заметим, что методом ортогональных многочленов может быть решено и интегродифференциальное уравнение (4.5), если воспользоваться спектральным соотношением (его построение аналогично [1]):

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\xi\int_0^1 W_{00}(\xi,\eta)\eta(1-\eta^2)^{m+1/2}P_n^{1,m+1/2}(1-2\eta^2)\,d\eta=$$

$$=-2[n!(m+n+1)!]^{-1}\Gamma(n+m+{}^3/_2)\Gamma(n+{}^5/_2)\xi P_{n+m}^{1,1/2-m}(1-2\xi^2)$$
$$(0\leqslant\xi<1;\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots) \qquad (5.4)$$

При $m=-2,\ -3,\ldots$ интеграл в последнем равенстве понимается в регуляризованном смысле.

Полагаем в (5.4) $m=0$ и ищем решение в виде (5.3). При этом условие замкнутости (4.3) выполняется автоматически.

В заключение отметим, что как следует из соотношений (3.3) и (4.8) коэффициент интенсивности напряжений в составном шаре как при кольцевой, так и дискообразной трещине не зависит от G_1 и G_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антипов Ю. А., Арутюнян Н. Х.* Кручение упругого шара с дискообразной трещиной // МТТ. 1990. № 3. С. 30–37.
2. *Антипов Ю. А.* Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 7. С. 29–33.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними.– М.: Физматгиз, 1958, 439 с.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.– М.: Наука, 1982. 344 с.
6. *Нишанян Ю. С.* О двух задачах, связанных с кручением составной сферы // Докл. АН Арм. ССР. 1971. 52. № 1. С. 19–25.

Одесса, Москва

Поступила в редакцию 5.IX.1990