МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1991

УДК 539.3

С. Я. МАКОВЕНКО

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ТЕНЗОРА ВЛИЯНИЯ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Тензор влияния для упругого полупространства строится, как известно, с привлечением гармонических потенциалов Буссинеска [1]. В статье развивается альтернативный операторный метод [2, 3] решения данной и аналогичных задач теории упругости. Особенность метода заключается в наличии операций прямых и обратных трансцендентно-операторных преобразований, столь же эффективных при решении задач, как и интегральные преобразования, однако более простых по сравнению с последними.

1. Представление гармонических потенциалов Буссинеска в операторном виде. Рассмотрим гармоническую функцию (потенциал Буссинеска)

$$\omega=(x_3-y_3)\ln((x_3-y_3+R)/r)-R$$

$$R=\left[\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2},\quad r=\left[\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

где $x(x_i)$ — точка наблюдения, $y(y_i)$ — точка истока. Дифференцированием получаем

$$\omega_{,3}=\ln((x_3-y_3+R)/r),\quad \omega_{,33}=-\gamma^2\omega=1/R \tag{1.1}$$

где с помощью запятой и индекса после нее условно обозначается производная по переменной x_3 и принято $\gamma^2=\partial^2\ldots/\partial x_1{}^2+\partial^2\ldots/\partial x_2{}^2$. Запишем очевидное разложение

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x_3-y_3}{r}\right)^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{x_3-y_3}{r}\right)^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(\frac{x_3-y_3}{r}\right)^6+\ldots\right]$$

$$((x_3-y_3)^2/r^2<1) \tag{1.2}$$

Учитывая равенства $\gamma^2r^{-1}=r^{-3}$, $\gamma^4r^{-1}=1^2\cdot3^2\cdot r^{-5}$, $\gamma^6r^{-1}=1^2\cdot3^2\cdot5^2r^{-7}$ получим представление

$$\frac{1}{R}=\left[1-\frac{1}{2!}\gamma^2(x_3-y_3)^2+\frac{1}{4!}\gamma^4(x_3-y_3)^4-\ldots\right]\frac{1}{r}=\cos\gamma(x_3-y_3)\frac{1}{r} \tag{1.3}$$

которое и примем за операторное преобразование данной функции. Можно установить также, учитывая равенства (1.1), что

$$\omega=-\cos\gamma(x_3-y_3)r \tag{1.4}$$

Правые части равенств (1.3), (1.4) будем считать изображениями соответствующих функций $1/R$ и ω в рассматриваемом операторном преобразовании, в котором символу γ отводится роль параметра преобразования. Введем специальные обозначения для этих изображений

$$(1/R)^\vee=\cos\gamma(x_3-y_3)r^{-1},\quad \omega^\vee=-\cos\gamma(x_3-y_3)r \tag{1.5}$$

Изображения можно дифференцировать или интегрировать по переменной x_3 (или y_3). Например, с учетом $\gamma^2 r=r^{-1}$:

$$\check{\omega}_{,3}=\gamma\sin\gamma(x_3-y_3)r,\quad \check{\omega}_{,33}=\gamma^2\cos\gamma(x_3-y_3)r=\cos\gamma(x_3-y_3)r^{-1}$$

Дифференцирование изображений по переменным x_1 и x_2 носит чисто символический характер и сводится к доумножению изображений на параметры α_1 или α_2, где $\alpha_1=\partial\ldots/\partial x_1$, $\alpha_2=-\partial\ldots/\partial x_2$.

В частности, для изображений верны равенства

$$\gamma^2\check{\omega}+\check{\omega}_{,33}=0 \tag{1.6}$$

$$\gamma^2\check{\omega}_{,33}+\check{\omega}_{,3333}=0 \tag{1.7}$$

Равенство (1.6) верно и для оригинала: функция ω — гармоническая всюду в пространстве, тогда как равенство (1.7) для оригинала $1/R$ записывается в виде

$$\Delta R^{-1}=(\gamma^2+\partial^2/\partial x_3^2)R^{-1}=-4\pi\delta \tag{1.8}$$

где $\delta=\delta(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ x_3-y_3)$ — обобщенная функция Дирака [4]. Различие в равенствах (1.7), (1.8) произошло из-за различия областей определимости функции $1/R$ (все пространство) и ее изображения $(1/R)\check{}$ (подпространство, ограниченное условием (1.2), согласно которому $r\neq 0$).

2. Вспомогательные операторные решения, соответствующие начальным перемещениям и напряжениям. За начальную плоскость примем плоскость $x_3=0$. Пусть в каждой точке этой плоскости заданы начальный вектор перемещений $\mathbf{u}^\circ$ и начальный вектор напряжений σ°. В соответствии с модельными задачами метода начальных функций[1] можем записать

$$\mathbf{u}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}^\circ+\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}^\circ \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}^\circ+\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}^\circ \tag{2.2}$$

где $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ соответственно поле вектора перемещений и поле тензора напряжений, $\mathbf{K}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$ — тензоры-операторы над начальными функциями, удовлетворяющие граничным условиям

$$\mathbf{K}|_{x_3=0}=\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{R}|_{x_3=0}=\mathbf{E},\quad \mathbf{l}|_{x_3=0}=\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{P}|_{x_3=0}=0$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{n}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ — орты прямоугольной системы координат, $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Представления (2.1), (2.2) основываются на операторных решениях двух модельных задач.

Модельная задача 1. Пусть вектор перемещений $\mathbf{u}$ выражается через три потенциальные функции $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ в форме

$$\mathbf{u}=\mathbf{a}_1-2c\nabla\nabla\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{n}_3\nabla\cdot\mathbf{a}_0+g\nabla\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{n}_3$$

$$c={}^1/_2(1-\nu)^{-1},\ g=\nu(1-\nu)^{-1} \tag{2.3}$$

где ν — коэффициент Пуассона, $\nabla\ldots=\mathbf{n}_i\partial\ldots/\partial x_i$ — оператор Гамильтона.

Потенциальные функции $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ удовлетворяют в области равенствам

$$\Delta\mathbf{a}_0=0,\quad \mathbf{a}_1=\mathbf{a}_{0,3}=\Delta\mathbf{a}_2 \tag{2.4}$$

где $\Delta\ldots=\gamma^2\ldots+\partial^2\ldots/\partial x_3^2$ — оператор Лапласа, а на границе $x_3=0$ условиям

$$\mathbf{a}_0=\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_{2,3}=0,\ \mathbf{a}_1=\mathbf{u}^\circ \tag{2.5}$$

[1] *Маковенко С. Я.* Модельные задачи метода начальных функций. М., 1988. 7 с.— Деп. в ВИНИТИ 25.10.88, № 7665-В88.

В таком случае, как и требуется, $\mathbf{u}|_{x_3=0}=\mathbf{u}^\circ$, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_3|_{x_3=0}=0$. Решением модельной задачи (2.4), (2.5) являются выражения

$$\mathbf{a}_1=f_1\mathbf{u}^\circ,\quad \mathbf{a}_2=f_2\mathbf{u}^\circ,\quad \mathbf{a}_0=f_0\mathbf{u}^\circ$$

$$f_0=\gamma^{-1}\sin\gamma x_3,\quad f_1=f_{0,3},\quad f_2={}^1/_2 x_3 f_0$$

Модельная задача 2. Общее решение выражается в форме Буссинеска — Галеркина через две потенциальные векторные функции $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}_1$:

$$\mathbf{u}=(\mathbf{b}_0-c\nabla\nabla\cdot\mathbf{b}_1)/\mu \tag{2.6}$$

где μ — модуль сдвига. В области и на границе на потенциальные функции накладываются ограничения:

$$\Delta\mathbf{b}_0=0,\ \Delta\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_0 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{b}_0=\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_{1,3}=0,\ \mathbf{b}_{0,3}=\boldsymbol{\sigma}^\circ \text{ при } x_3=0 \tag{2.8}$$

Как следствие, $\mathbf{u}|_{x_3=0}=0$, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}_3|_{x_3=0}=\boldsymbol{\sigma}^\circ$.

Решением модельной задачи (2.7), (2.8) являются выражения

$$\mathbf{b}_0=f_0\boldsymbol{\sigma}^\circ,\quad \mathbf{b}_1=f\boldsymbol{\sigma}^\circ$$

$$f={}^1/_2(\sin\gamma x_3-\gamma x_3\cos\gamma x_3)/\gamma^3$$

Суммируя решения (2.3), (2.6), а также учитывая очевидные соотношения $f_2=f_{,3}$, $f_1=\Delta f_{,3}$, $f_0=\Delta f$ приходим к выражению (2.1), а затем, на основании зависимости $\boldsymbol{\sigma}=2\mu[\nu\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{u}/(1-2\nu)+{}^1/_2(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^T)]$ и к (2.2).

Операторы в решениях (2.1), (2.2) удобно представить в виде произведения регулярных тензоров-операторов (помечены штрихом) и трансцендентно-операторной функции f:

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}'f,\quad \mathbf{l}=\mathbf{l}'f,\quad \mathbf{P}=\mathbf{P}'f,\quad \mathbf{R}=\mathbf{R}'f$$

$$\mathbf{K}'=\nabla\cdot\mathbf{n}_3\Delta\mathbf{E}-2c\nabla\nabla\nabla\cdot\mathbf{n}_3+(\mathbf{c}_{III}+g\mathbf{c}_{II})\cdot\cdot\mathbf{n}_3\nabla\Delta$$

$$\mathbf{l}'=\mu^{-1}(\mathbf{E}\Delta-c\nabla\nabla),\quad \mathbf{P}'=2\mu[g\mathbf{E}\nabla\Delta\nabla\cdot\mathbf{n}_3-2c\nabla\nabla\nabla\nabla\cdot\mathbf{n}_3+$$

$$+g\nabla\nabla n_3\Delta+{}^1/_2(\mathbf{c}_{II}+\mathbf{c}_{III})\cdot\cdot(\nabla\mathbf{n}_3\nabla\Delta+\nabla\mathbf{E}\Delta\nabla\cdot\mathbf{n}_3)]$$

$$\mathbf{R}=[g\mathbf{E}\nabla\Delta+(\mathbf{c}_{II}+\mathbf{c}_{III})\cdot\cdot\nabla\mathbf{E}\Delta-2c\nabla\nabla\nabla]$$

Здесь $\mathbf{c}_{II}=\mathbf{n}_s\mathbf{n}_k\mathbf{n}_s\mathbf{n}_k$, $\mathbf{c}_{III}=\mathbf{n}_s\mathbf{n}_k\mathbf{n}_k\mathbf{n}_s$ — изотропные тензоры [5].

3. Операторное изображение тензора влияния Кельвина — Сомильяна. В соответствии с представлениями Буссинеска — Галеркина [6] и Папковича — Гудьера [7]:

$$\mathbf{u}=-\mathbf{l}'\cdot\mathbf{A}+\nabla B,\quad \boldsymbol{\sigma}=-\mathbf{R}'\cdot\mathbf{A}-2\mu(\mathbf{E}T-\nabla\nabla B) \tag{3.1}$$

где вектор $\mathbf{A}$ и функция B определяются из уравнений

$$\Delta\Delta\mathbf{A}=\mathbf{X},\ \Delta B=T,\ T=(1+\nu)/(1-\nu)\alpha_T\Theta \tag{3.2}$$

где α_T — коэффициент линейного теплового расширения, Θ — температура.

Для построения тензора влияния в неограниченном пространстве от единичной силы $\mathbf{l}$, приложенной в точке истока y, и бесконечной температуры в этой точке, в равенствах (3.2) следует положить

$$\mathbf{X}=\mathbf{l}\delta,\ T=\delta \tag{3.3}$$

и потребовать, чтобы на бесконечности

$$\mathbf{u}\to 0,\ \boldsymbol{\sigma}\to 0 \tag{3.4}$$

Этим условиям удовлетворяют решения $\mathbf{A}=-{}^1/_8\pi^{-1}R\mathbf{l}={}^1/_8\pi^{-1}[\omega-(x_3-y_3)\omega_{,3}]\mathbf{l}$, $B=-{}^1/_4\pi^{-1}(1/R)$. Операторные изображения этих же решений, в соответствии с представлениями (1.5), принимают вид

$$\mathbf{A}^\vee={}^1/_8\pi^{-1}[\omega^\vee-(x_3-y_3)\omega_{,3}{}^\vee]\mathbf{l},\quad B^\vee=-{}^1/_4\pi^{-1}(1/R)^\vee \tag{3.5}$$

Таким образом, согласно соотношениям (3.1), (3.5) приходим к операторным изображениям искомых тензоров влияния

$$\mathbf{u}_0{}^\vee={}^1/_8\pi^{-1}(\mathbf{l}'\cdot\mathbf{l}-\nabla\Delta)\zeta r \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0{}^\vee={}^1/_8\pi^{-1}(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{l}-2\mu\nabla\nabla\Delta)\zeta r \tag{3.7}$$

$$\zeta=\cos\gamma(x_3-y_3)+(x_3-y_3)\gamma\sin\gamma(x_3-y_3)$$

4. Построение тензора влияния для упругого полупространства с защемленной кромкой. Пусть в точке истока y (при $y_3>0$) имеет место сосредоточенное воздействие (3.3) и требуется построить тензор влияния (и силовой тензор влияния) в области $x_3\geqslant 0$ при соблюдении условия жесткого защемления кромки полупространства

$$\mathbf{u}|_{x_3=0}=0 \tag{4.1}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F=-\omega_+ +(x_3+y_3)\omega_{+,3}-x_3y_3\omega_{+,33} \tag{4.2}$$

где функция ω_+ отличается от функции ω лишь тем, что в последней параметр y_3 заменен на $-y_3$. Сама функция F и все ее производные очевидно всюду неособенные в полупространстве $x_3\geqslant 0$ (за исключением, быть может, бесконечной точки глубины). Операторное изображение функции (4.2) записывается в виде

$$F^\vee=(\chi\varkappa-4\gamma^6 f\psi)r$$

$$\varkappa=\zeta|_{x_3=0}=\cos\gamma y_3+\gamma y_3\sin\gamma y_3$$

$$\chi=\zeta|_{y_3=0}=\cos\gamma x_3+x_3\gamma\sin\gamma x_3$$

$$\psi=f|_{x_3=y_3}={}^1/_2(\sin\gamma y_3-y_3\gamma\cos\gamma y_3)$$

Понадобятся также операторы $\mathbf{K}''=(2-c)^{-1}\gamma^{-2}\mu\mathbf{l}'$, $\mathbf{P}''=(2-c)^{-1}\gamma^{-2}\mu\mathbf{R}'$ причем, как легко проверить,

$$\mathbf{K}''\cdot\mathbf{n}_3\chi|_{x_3=0}=\mathbf{n}_3,\quad \mathbf{K}''\cdot\mathbf{n}_3 f|_{x_3=0}=0$$

Решение искомой задачи в операторном виде представляем так

$$\mathbf{u}^\vee=\mathbf{K}''\cdot\mathbf{n}_3 LF^\vee+\mathbf{u}_0{}^\vee+\mathbf{u}_+{}^\vee$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\vee=\mathbf{P}''\cdot\mathbf{n}_3 LF^\vee+\boldsymbol{\sigma}_0{}^\vee+\boldsymbol{\sigma}_+{}^\vee$$

где $\mathbf{u}_0{}^\vee$, $\boldsymbol{\sigma}_0{}^\vee$ — определяются выражениями (3.6), (3.7):

$$\mathbf{u}_+{}^\vee={}^1/_8(\mathbf{l}'\cdot\mathbf{l}_+ +\nabla\Delta)\zeta_+ r/\pi$$

$$\boldsymbol{\sigma}_+{}^\vee={}^1/_8(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{l}_+ +2\mu\nabla\nabla\Delta)\zeta_+ r/\pi$$

$$\zeta_+=\cos\gamma(x_3+y_3)+(x_3+y_3)\gamma\sin\gamma(x_3+y_3)$$

$$\mathbf{l}_+=(-\mathbf{E}+2\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3)\cdot\mathbf{l}$$

где L — произвольный оператор над $F^\vee$. Остается заметить, что

$$(\mathbf{u}_0{}^\vee+\mathbf{u}_+{}^\vee)|_{x_3=0}={}^1/_4(c\partial\nabla_- \ldots/\partial y_3+\mathbf{n}_3\Delta_-)\cdot\mathbf{l}\varkappa r/(\pi\mu)$$

$$\nabla_-=\mathbf{n}_1\partial\ldots/\partial x_1+\mathbf{n}_2\partial\ldots/\partial x_2-\mathbf{n}_3\partial\ldots/\partial y_3,\quad \Delta_-=\gamma^2+\partial^2\ldots/\partial y_3{}^2$$

и из граничного условия (4.1) следует

$$L=-{}^1/_4(c\partial\nabla_-\ldots/\partial y_3+\mathbf{n}_3\Delta_-)\cdot\mathbf{l}/(\pi\mu)$$

Тензор влияния для рассматриваемого полупространства (без температурной составляющей) определяется соотношением $\mathbf{u}^\vee=\mathbf{U}^\vee\cdot\mathbf{l}$ откуда

$$\mathbf{U}^\vee={}^1/_4\pi^{-1}/-\mathbf{l}'\cdot\mathbf{n}_3[(2-c)^{-1}\gamma^{-2}(c\partial\nabla_-\ldots/\partial y_3+$$
$$+\mathbf{n}_3\Delta_-)F^\vee-\zeta_+ r\mathbf{n}_3]+{}^1/_2\mathbf{l}'(\zeta-\zeta_+)r\} \quad (4.3)$$

5. Построение тензора влияния для упругого полупространства со свободной кромкой. Граничное условие в данном случае записывается так

$$\mathbf{n}_3\cdot\boldsymbol{\sigma}|_{x_3=0}=0 \quad (5.1)$$

Введем следующие операторы $\mathbf{R}''=-{}^1/_2\mu^{-1}(1-\nu)\gamma^{-4}\mathbf{P}'$, $\mathbf{l}''=-{}^1/_2\mu^{-1}\cdot(1-\nu)\gamma^{-4}\mathbf{K}'$. Непосредственно проверяется, что

$$\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{R}''\cdot\mathbf{n}_3\chi|_{x_3=0}=\mathbf{n}_3, \quad \mathbf{n}_3\cdot\mathbf{R}''\cdot\mathbf{n}_3 f|_{x_3=0}=0$$

Решение краевой задачи представляем в виде

$$\mathbf{u}^\vee=\mathbf{l}''\cdot\mathbf{n}_3 LF^\vee+\mathbf{u}_0^\vee+\mathbf{u}_+^\vee \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\vee=\mathbf{R}''\cdot\mathbf{n}_3 LF^\vee+\boldsymbol{\sigma}_0^\vee+\boldsymbol{\sigma}_+^\vee \quad (5.3)$$

где $\mathbf{u}_0^\vee$, $\boldsymbol{\sigma}_0^\vee$ — по-прежнему определяются выражениями (3.6), (3.7) (L — произвольный оператор над $F^\vee$):

$$\mathbf{u}_+^\vee={}^1/_8(\mathbf{l}'\cdot\mathbf{l}_+-\nabla\Delta)\zeta_+ r/\pi$$

$$\boldsymbol{\sigma}_+^\vee={}^1/_8(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{l}_+-2\mu\nabla\nabla\Delta)\zeta_+ r/\pi$$

$$\mathbf{l}_+=(\mathbf{E}-2\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3)\cdot\mathbf{l}$$

Вычисления приводят к соотношению

$$\mathbf{n}_3\cdot(\boldsymbol{\sigma}_0^\vee+\boldsymbol{\sigma}_+^\vee)|_{x_3=0}={}^1/_4\pi^{-1}\mathbf{n}_3\{[\nabla_-(g\Delta_--2c\partial^2\ldots/\partial y_3^2-$$
$$-2\mathbf{n}_3\partial\Delta_-\ldots/\partial y_3]\cdot\mathbf{l}+2\mu\gamma^2\Delta_-\}\varkappa r$$

Из граничного условия (5.1) теперь следует

$$L=-{}^1/_4\{[\nabla_-(g\Delta_--2c\partial^2\ldots/\partial y_3^2)-$$
$$-2\mathbf{n}_3\partial\Delta_-\ldots/\partial y_3]\cdot\mathbf{l}+2\mu\gamma^2\Delta_-\}$$

и операторные решения (5.2), (5.3), таким образом, полностью определены. Тензор влияния (без учета температурного слагаемого) для полупространства со свободной кромкой в операторном изображении приводится к виду

$$\mathbf{U}^\vee={}^1/_4\pi^{-1}\{-\mathbf{l}''\cdot\mathbf{n}_3[\nabla_-(g\Delta_--2c\partial^2\ldots/\partial y_3^2)-$$
$$-2\mathbf{n}_3\partial\Delta_-\ldots/\partial y_3]F^\vee+{}^1/_2\mathbf{l}'(\zeta+\zeta_+)r-\mathbf{l}'\cdot\mathbf{n}_3\mathbf{n}_3\zeta_+ r\} \quad (5.4)$$

Для перехода от операторных изображений к оригиналам достаточно, например, в выражениях (4.3) или (5.4) заменить изображение функции $F^\vee$ ее оригиналом (4.2) и, соответственно, ζr и $\zeta_+ r$ на R и R_+. Таким образом, рассмотренный операторный метод значительно упрощает процедуру построения тензоров влияния в полупространстве, делает выкладки более формальными и стандартными, позволяет избежать интегральных преобразований и соответствующих трудностей, связанных с вычислением обратных преобразований, и может быть поэтому рекомендован для исследования широкого круга краевых задач линейной теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Малиев А. С.* О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного тела // Сб. науч. тр. Ленингр. электротехн. ин-та инж. ж.-д. транс. 1952. Т. 4. С. 180–244.
3. *Власов В. З.* Метод начальных функций в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 7. С. 49–69.
4. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
5. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. Киев: Вищ. шк., 1975. 216 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XI.1989