

УДК 531.36

© 1991 г.

В. С. ВОРОНКОВ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ВАЛА В АКТИВНЫХ МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ

Рассматривается управление положением вала в магнитном подвесе, выполненном в виде одного осевого и двух радиальных магнитных подшипников. По аналогии с известным алгоритмом осевой стабилизации вала проводится синтез алгоритма его поперечной стабилизации из условия достижения максимальной области притяжения равновесного состояния в фазовом пространстве системы. Гироскопическим эффектом, упругими и проводящими свойствами элементов конструкции пренебрегается.

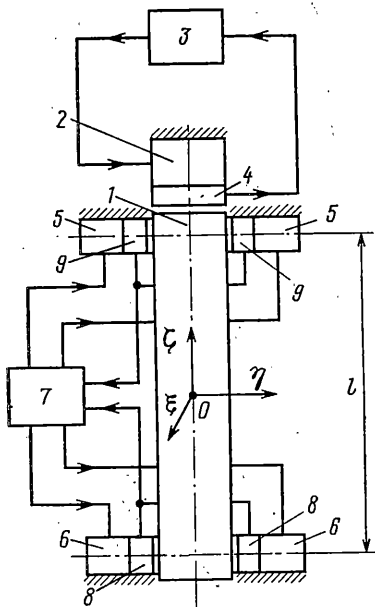
1. Постановка задачи. Одним из бурно развивающихся направлений использования магнитного подвеса в технике является его применение в качестве неконтактных подшипников роторных устройств. Простейший магнитный подвес, обеспечивающий осевую стабилизацию вала, рассмотрен в [1]. В настоящее время широкое распространение получил магнитный подвес вала, конструктивно выполненный в виде одного осевого и двух радиальных магнитных подшипников [2–4]. Вид этого подвеса при вертикальном расположении его оси изображен на фиг. 1. В центр подвеса помещено начало системы координат $0, \xi, \eta, \zeta$. С валом связана система координат $0', \xi', \eta', \zeta'$, начало которой помещено в центр его масс. В равновесном состоянии, изображенном на фиг. 1, эти системы координат совпадают. При этом вес вала 1 уравнивается подъемной силой электромагнита 2, ток в котором автоматически регулируется каналом 3 системы осевой стабилизации вала в зависимости от сигнала датчика 4 его осевого перемещения. Поперечная стабилизация вала осуществляется автоматическим регулированием тока в электромагнитах 5, 6 радиальных магнитных подшипников, расположенных на расстоянии $l/2$ от центра подвеса, каналом 7 системы поперечной стабилизации вала в зависимости от сигналов датчиков 8, 9 его поперечного перемещения. Идентичный канал системы поперечной стабилизации вала действует в плоскости, перпендикулярной плоскости фиг. 1. При хорошей развязке магнитных потоков каналы систем осевой и поперечной стабилизации вала можно считать независимыми. Кроме того предполагается, что гироскопическим эффектом, упругими и проводящими свойствами элементов конструкции можно пренебречь.

При этих предположениях поиск алгоритма управления положением вала в активных магнитных подшипниках можно осуществлять независимо по оси ξ подвеса и в плоскости η, ζ поперечного движения вала из условия получения максимальной области притяжения

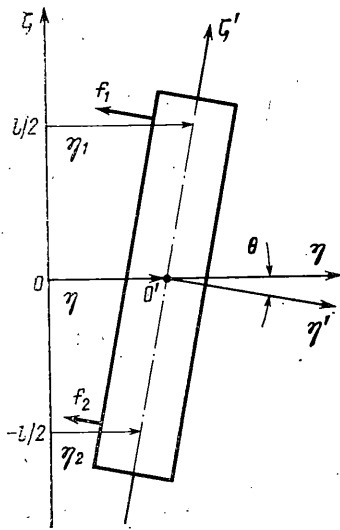
$$V[u^*(x)] = \max_{u \in U} V[u(x)] \quad (1.1)$$

равновесного состояния, расположенного в начале координат фазового пространства X при допустимых управлениях u из ограниченной области U .

Для простейших кусочно-линейных управлений алгоритм осевой ста-



Фиг. 1



Фиг. 2

билизации вала определен в [5] и на его основе найдены оптимальные структура и параметры регулятора, обеспечивающие максимально допустимые отклонения фазовых координат от равновесного состояния при заданных ограничениях управляющего напряжения на электромагните подвеса. Сравнительный анализ динамики систем стабилизации при различных алгоритмах управления в зависимости от параметров системы, проведенный в [6], показал, что при неудачном выборе структуры и параметров регулятора область притяжения равновесного состояния существенно уменьшается за счет появления в системе неустойчивых периодических движений. При этом найденный в [5] оптимальный алгоритм управления обеспечивает как достижение максимальной области притяжения равновесного состояния при заданном уровне ограничений управления, так и наилучшую устойчивость системы к параметрическим и внешним возмущениям. Поэтому для нахождения алгоритма поперечной стабилизации вала также используется критерий (1.1), предложенный в [7], в отличие от [8], где используется квадратичный критерий.

Действие системы поперечной стабилизации вала схематически поясняется на фиг. 2, где указаны равнодействующие силы f_i , действующие на вал со стороны верхнего ($i=1$) и нижнего ($i=2$) радиальных магнитных подшипников при его отклонении от равновесного состояния в плоскости η, ξ . При этом предполагается, что центр масс вала стабилизирован по оси ξ системой осевой стабилизации. Каждый радиальный подшипник содержит две пары идентичных диаметрально расположенных относительно вала по осям ξ, η электромагнитов, силовые характеристики которых аппроксимируются линейной функцией

$$f_i(\eta_i, I_i) = f_i(0, 0) + a\eta_i - bI_i \quad (i=1, 2)$$

где $f_i(0, 0) = 0$ — равновесные значения сил, a, b — крутизны силовых характеристик радиальных подшипников к перемещениям η_i и разностям токов I_i диаметрально расположенных относительно вала электромагнитов.

2. Математическая модель объекта и нахождение его неустойчивых переменных. С учетом принятых предположений уравнения поперечного

движения вала и изменений разности токов диаметрально расположенных электромагнитов радиальных подшипников записываются в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta} &= f_1 + f_2 = a(\eta_1 + \eta_2) - b(I_1 + I_2) \\ J\ddot{\theta} &= l(f_1 - f_2)/2 = l[a(\eta_1 - \eta_2) - b(I_1 - I_2)]/2 - \\ &- b\eta_1 + LI_1 + RI_1 = u_{ei} \quad (i=1, 2) \\ \eta &= (\eta_1 + \eta_2)/2, \quad \theta = (\eta_1 - \eta_2)/l \end{aligned} \quad (2.1)$$

где η_1, η_2 — отклонения оси ζ' вала от оси ζ подвеса в плоскостях верхнего и нижнего подшипников, I_i, u_{ei} — разности токов и напряжений на электромагнитах, диаметрально расположенных относительно вала, m, J — масса и момент инерции вала, a, b — крутизны силовых характеристик электромагнитов, L, R — индуктивность и активное сопротивление каждого электромагнита, l — расстояние между верхним и нижним радиальным подшипниками. Параметр b выражается через магнитную энергию электромагнита $W_m = L(\eta)I^2/2$ [9] в виде второй смешанной производной $b = (\partial^2 W_m / \partial \eta \partial I)_0 = (\partial^2 W_m / \partial I \partial \eta)_0$. Поэтому он входит также в выражение эдс $d[L(\eta)I]/dt|_0 = -b\dot{\eta} + LI$, наводимой в электромагните при движении вала.

Введением безразмерных переменных $x_1 = \eta_1/\eta_m, x_2 = x_1 t_m, x_3 = I_1/I_m, x_4 = \eta_2/\eta_m, x_5 = x_4 t_m, x_6 = I_2/I_m, u_i = u_{ei}/u_m$ ($i=1, 2$) и времени $t' = t/t_m$ с помощью масштабов $\eta_m = bI_m/a, I_m = u_m/R, t_m^2 = m/2a$ уравнения (2.1) приводятся к безразмерному стандартному виду

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.2)$$

с элементами матриц A и B : $a_{11} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{22} = a_{25} = a_{31} = a_{34} = a_{35} = a_{36} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = a_{46} = a_{52} = a_{55} = a_{61} = a_{62} = a_{65} = a_{64} = 0$; $a_{12} = a_{45} = 1$; $a_{21} = -a_{23} = a_{54} = -a_{56} = (1 + \kappa)/2$; $a_{24} = -a_{26} = a_{51} = -a_{53} = (1 - \kappa)/2$; $a_{32} = a_{65} = h/T$; $a_{33} = a_{66} = -1/T$; $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = b_{32} = b_{41} = b_{42} = b_{51} = b_{52} = b_{61} = 0$; $b_{31} = b_{62} = 1/T$, где безразмерные параметры объекта управления характеризуют: $\kappa = ml^2/4J$ — отношение момента инерции невесомого стержня длиной l с массами $m/2$ на концах к моменту инерции вала (для цилиндрического вала длиной l параметр $\kappa = 3$), $h = b^2/aRt_m$ — эффективность демпфирования поперечных колебаний вала за счет рассеяния их энергии на активном сопротивлении электромагнитов, $T = L/Rt_m$ — отношение постоянной времени электромагнитов к выбранному масштабу времени.

Собственные значения λ матрицы A определяются по характеристическому уравнению неуправляемого объекта

$$\begin{aligned} \det |A - \lambda E| &= \chi_{10}(\lambda) \chi_{20}(\lambda) = 0 \\ \chi_{10}(\lambda) &= (T\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) + h\lambda = 0 \\ \chi_{20}(\lambda) &= (T\lambda + 1)(\lambda^2 - \kappa) + h\kappa\lambda = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\chi_{10}(\lambda), \chi_{20}(\lambda)$ — характеристические уравнения объекта при поступательном движении вала по оси η и при его поворотах относительно центра масс на угол θ . Поскольку в характеристических полиномах происходит по одной смене знака в последовательности коэффициентов, то на основании правила Декарта [10] два корня λ_1, λ_2 характеристического уравнения (2.3) больше нуля, а остальные $\lambda_3 - \lambda_6$ имеют отрицательные реальные части. Значения этих корней при условии $h \ll 1$ приближенно равны $\lambda_1 \approx 1, \lambda_2 \approx \kappa^{1/2}, \lambda_3 \approx -1, \lambda_4 \approx -\kappa^{1/2}, \lambda_5 \approx \lambda_6 \approx -1/T$.

По собственным значениям матрицы A определяется невырожденное преобразование переменных

$$y = Dx \quad (2.4)$$

со следующими компонентами матрицы D ($j=1-6$):

$$d_{j1} = (T\lambda_j + 1)v_{j1}/\lambda_j, \quad d_{j2} = [(T\lambda_j + 1)\lambda_j^{-1} - h]v_{j1}/\lambda_j, \quad d_{j3} = -Tv_{j1}$$

$$d_{j4} = (T\lambda_j + 1)v_{j2}/\lambda_j, \quad d_{j5} = [(T\lambda_j + 1)\lambda_j^{-1} - h]v_{j2}/\lambda_j, \quad d_{j6} = -Tv_{j2}$$

приводящие систему (2.2) к канонической форме

$$\dot{y} = \Lambda y - \nu u \quad (2.5)$$

где $\Lambda = DAD^{-1}$ — жорданова форма матрицы A , $-\nu = DB$ — матрица коэффициентов при векторе функций управления, имеющая следующий транспонированный вид

$$\nu^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Для получения максимальной области притяжения, как следует из [7], достаточно оптимальным образом управлять неустойчивой частью объекта. При допустимых управлениях в виде простейших кусочно-линейных функций

$$u_i = \begin{cases} u^+, & [(\beta y)_i \geq u^+] \\ (\beta y)_i, & [-u^- \leq (\beta y)_i \leq u^+] \\ -u^-, & [-u^- \geq (\beta y)_i, \quad (\beta y)_i = \sum_{j=1}^6 \beta_{ij} y_j \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (2.7)$$

ограниченных на уровнях u^+ , $-u^-$, поиск оптимального по критерию (1.1) алгоритма управления, по аналогии с [5], делается из условий зависимости вектора функций управления только от неустойчивых переменных и обеспечения асимптотической устойчивости неустойчивой подсистемы при этом управлении. Достаточность этих условий следует из [7], если мы определим оптимальность управления неустойчивой частью объекта, которая для системы (2.2) в координатной форме имеет вид

$$y_1 \dot{=} \lambda_1 y_1 - u_1 - u_2, \quad y_2 \dot{=} \lambda_2 y_2 - u_1 + u_2 \quad (\lambda_2 > \lambda_1 > 0) \quad (2.8)$$

При неизменной структуре регулятора эти условия являются и необходимыми, поскольку необходимость обеспечения управлением асимптотической устойчивости неустойчивой подсистемы очевидна. Необходимость зависимости вектора функций управления только от неустойчивых переменных, т. е. выбор матрицы коэффициентов допустимых управлений (2.7) в виде

$$\beta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & -\beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

обусловлена требованием принадлежности к области притяжения всего фазового пространства Y^- устойчивой подсистемы. Знаки компонент матрицы здесь выбраны в виде, удобном для дальнейшего исследования.

3. Синтез алгоритмов, оптимальных по устойчивости. Для нахождения семейства алгоритмов управления, оптимальных по критерию (1.1) определяются условия асимптотической устойчивости равновесного состояния неустойчивой подсистемы (2.8), расположенного в начале координат ее фазового пространства Y^+ при векторе функций управления (2.7), (2.9). Эти условия определяются из анализа корней характеристического уравнения

$$\chi(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = 0 \quad (3.1)$$

которые имеют отрицательные реальные части при выполнении неравенств

$$a_1 = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{22} - \lambda_1 - \lambda_2 > 0 \quad (3.2)$$

$$a_0 = \lambda_1 \lambda_2 + 2(\beta_{11} \beta_{22} + \beta_{12} \beta_{21}) - \lambda_1(\beta_{12} + \beta_{22}) - \lambda_2(\beta_{11} + \beta_{21}) > 0$$

задающих в четырехмерном пространстве параметров управления (2.9) область асимптотической устойчивости системы. Если предположить, что параметры управления пропорциональны корням λ_1, λ_2 характеристического уравнения (2.3):

$$\beta_{11} = \beta_1 \lambda_1, \quad \beta_{12} = \beta_1 \lambda_2, \quad \beta_{21} = \beta_2 \lambda_1, \quad \beta_{22} = \beta_2 \lambda_2 \quad (3.3)$$

где β_1, β_2 — коэффициенты пропорциональности, то неравенства (3.2) преобразуются к виду $\beta_1 + \beta_2 > 1, (2\beta_1 - 1)(2\beta_2 - 1) > 0$ и удовлетворяются при условиях

$$\beta_1 > 0,5, \quad \beta_2 > 0,5 \quad (3.4)$$

Параметры β_1, β_2 имеют физический смысл коэффициентов усиления по напряжению усилителей мощности и при условии их идентичности

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_0 > 0,5 \quad (3.5)$$

корни характеристического уравнения (3.1) становятся чисто действительными $\bar{\lambda}_1 = -(2\beta_0 - 1)\lambda_1, \bar{\lambda}_2 = -(2\beta_0 - 1)\lambda_2$. Предположение (3.3) соответствует выделению в четырехмерном пространстве параметров управления (2.9) плоскости параметров β_1, β_2 , в которой область асимптотической устойчивости задается простыми соотношениями (3.4).

Подстановка в допустимые управления (2.7) оптимальных параметров (3.3), (3.5) и выражений неустойчивых переменных через переменные x с помощью преобразования (2.4), (2.6):

$$\begin{aligned} y_1 &= (T\lambda_1 + 1)\lambda_1^{-1}(x_1 + x_2) + [(T\lambda_1 + 1)\lambda_1^{-2} - h\lambda_1^{-1}] \cdot \\ &\quad \cdot (x_2 + x_5) - T(x_3 + x_6) \\ y_2 &= (T\lambda_2 + 1)\lambda_2^{-1}(x_1 - x_2) + [(T\lambda_2 + 1)\lambda_2^{-2} - h\lambda_2^{-1}] \cdot \\ &\quad \cdot (x_2 - x_5) - T(x_3 - x_6) \end{aligned}$$

дает аналитическое решение задачи поиска оптимального по критерию (1.1) управления

$$u^* = \begin{cases} u^+ & (\beta_0 \sigma \geq u^+) \\ \beta_0 \sigma & (-u^- \leq \beta_0 \sigma \leq u^+) \\ -u^- & (-u^- \geq \beta_0 \sigma, \beta_0 > 0,5, \sigma = C^* x) \end{cases} \quad (3.6)$$

где C^* — матрица оптимальных параметров, имеющая следующие компоненты

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{24} = 2 + T(\lambda_1 + \lambda_2) \\ c_{12} &= c_{25} = 2(T - h) + (\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_1 \lambda_2, \quad c_{13} = c_{26} = -T(\lambda_1 + \lambda_2) \\ c_{14} &= c_{21} = -c_{16} = -c_{23} = T(\lambda_1 - \lambda_2), \quad c_{15} = c_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Предельный переход при $\beta_0 \rightarrow \infty$ в случае симметричных ограничений

$$u^- = u^+ \quad (3.7)$$

приводит управление (3.6) к релейному виду $u^* = u^+ \text{sign } C^* x$, который соответствует релейному закону управления $u_1^* = u^+ \text{sign}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2), u_2^* = -u^+ \text{sign}(\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2)$, оптимальному по быстродействию для неустойчивой подсистемы.

4. Структура фазового пространства системы при оптимальном управлении. В качестве иллюстрации геометрических особенностей фазового пространства Y исследуемой системы (2.5) рассматривается его структура при найденном оптимальном алгоритме управления. В начале координат этого пространства расположено равновесное состояние 0.

$$u_1 = u_2 = 0; y_1 = y_2 = \dots = y_6 = 0.$$

Поскольку все фазовое пространство Y^- устойчивой подсистемы является областью притяжения нулевого равновесного состояния, то ограниченность области притяжения и вся специфика управления объектом проявляется в структуре фазового пространства Y^+ неустойчивой подсистемы (2.8), которым является плоскость y_1, y_2 , изображенная на фиг. 3.

Кроме нулевого равновесного состояния, подсистема (2.8) имеет равновесные состояния, соответствующие ограничениям обоих управлений, которые для простоты выбираются симметричными (3.7). Координаты этих равновесных состояний определяются из уравнений (2.8) при различных комбинациях ограничений управлений

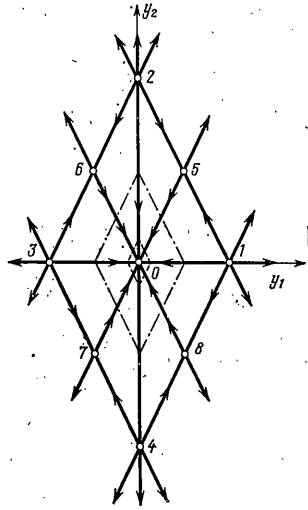
1. $u_1 = u^+, u_2 = u^+; y_1 = 2u^+/\lambda_1, y_2 = 0$
2. $u_1 = u^+, u_2 = -u^+; y_1 = 0, y_2 = 2u^+/\lambda_2$
3. $u_1 = -u^+, u_2 = -u^+; y_1 = -2u^+/\lambda_1, y_2 = 0$
4. $u_1 = -u^+, u_2 = u^+; y_1 = 0, y_2 = -2u^+/\lambda_2$

Нетрудно показать, что эти равновесные состояния являются неустойчивыми типа «неустойчивый узел» [11]. Они изображены на фиг. 3 под приведенными выше номерами. Еще одна группа равновесных состояний системы (2.8) соответствует ограничениям одного из двух управлений (2.7), (2.9):

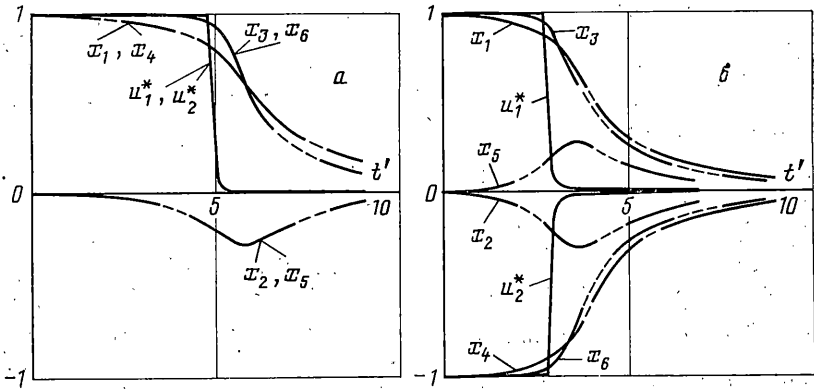
5. а) $u_1 = u^+$ б) $\begin{cases} \lambda_1 y_1 - u^+ - u_2 = 0 \\ \lambda_2 y_2 - u^+ + u_2 = 0 \end{cases}$
 $u_2 = \beta_{21} y_1 - \beta_{22} y_2$
6. а) $u_1 = \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2, u_2 = -u^+$ б) $\begin{cases} \lambda_1 y_1 - u_1 + u^+ = 0 \\ \lambda_2 y_2 - u_1 - u^+ = 0 \end{cases}$
 в) $\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 + 2u^+ = 0$
7. а) $u_1 = -u^+, u_2 = \beta_{21} y_1 - \beta_{22} y_2$ б) $\begin{cases} \lambda_1 y_1 + u^+ - u_2 = 0 \\ \lambda_2 y_2 + u^+ + u_2 = 0 \end{cases}$
 в) $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + 2u^+ = 0$
8. а) $u_1 = \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2, u_2 = u^+$ б) $\begin{cases} \lambda_1 y_1 - u_1 - u^+ = 0 \\ \lambda_2 y_2 - u_1 + u^+ = 0 \end{cases}$
 в) $\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 - 2u^+ = 0$

где под пунктом а) указаны виды управлений, под пунктами б), в) — уравнения, которым удовлетворяют координаты этой группы равновесных состояний. Также нетрудно показать, что равновесные состояния 5–8 являются неустойчивыми типа «седло», причем, как следует из выражений 5–8 в), входящие в них усы сепаратрис совпадают с лучами неустойчивых узлов 1–4. При выполнении условий (3.3), (3.4) равновесные состояния 5–8 расположены в центре отрезков, соединяющих неустойчивые узлы 1–4, нулевое равновесное состояние принадлежит области линейности управления, границы которой изображены на фиг. 3 пунктиром, и асимптотически устойчиво.

Максимальные размеры области линейности системы, изображенные на фиг. 3 штрих-пунктирной линией, определяются минимальными значениями β_1, β_2 в неравенствах (3.4), при которых сохраняется асимп-



Фиг. 3



Фиг. 4

тотическая устойчивость нулевого равновесного состояния. Для параметров управления, не удовлетворяющих условиям (3.3), но принадлежащих области асимптотической устойчивости (3.2), седла 5–8 расположены несимметрично относительно узлов 1–4. Однако и в этом случае область притяжения нулевого равновесного состояния получается максимальной, задаваемой границами в виде сепаратрис седел 5–8, выходящих из неустойчивых узлов 1–4.

5. Вычислительный эксперимент. В результате проведенного исследования найдены условия выполнения критерия (1.1), по которым аналитически определено семейство алгоритмов управления (2.7), (2.9), (3.2), обеспечивающих максимальную область притяжения равновесного состояния в фазовом пространстве системы (2.2) поперечной стабилизации вала в двух радиальных магнитных подшипниках. Переходные процессы оптимальной системы с параметрами $\kappa=3$, $h=0,4$, $T=2$, $u^- = u^+ = 1$, $\beta_0=10$ были рассчитаны численно при начальных условиях, выбираемых в области притяжения нулевого равновесного состояния вблизи неустойчивых узлов 1 и 2, что соответствует максимально возможным отклонениям вала по координате η и углу Φ . Вид переходных процессов в этих случаях изображен соответственно на фиг. 4а, б, откуда следует, что они являются аperiodическими и происходят по однотипным переменным синхронно в обоих магнитных подшипниках, причем в фазе при поступательных отклонениях вала и в противофазе – при угловых. Время переходных процессов, если судить по времени нахождения управле-

ний на ограничениях, пропорционально корням λ_1, λ_2 , т. е. поступательные отклонения обрабатываются в $\kappa^{1/2}$ раз дольше, чем угловые.

По аналогии с системой осевой стабилизации вала [5], реализация полученного алгоритма поперечной стабилизации вала осуществляется с помощью датчиков 8, 9 перемещения (фиг. 1) с последующей коррекцией их сигналов по скорости перемещения вала и введением обратной связи усилителей мощности по разностям токов I . Существующие механические ограничения на поступательные и угловые перемещения вала должны принадлежать области притяжения равновесного состояния, максимальные размеры которой зависят от выбранных ограничений управляющих напряжений и токов.

Автор благодарит О. Д. Поздеева за ценные замечания, сделанные при обсуждении данной работы. В составлении программ численного расчета принимала участие студентка ГГУ Мухина О. А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов Г. Г., Неймарк Ю. И., Поздеев О. Д., Цветков Ю. В. Экспериментальное исследование колебаний безопорного вращающегося вала // Динамика машин. М.: Машиностроение, 1969. С. 127–138.
2. Васильев В. С., Сердюк Г. Б. Установка с магнитной подвеской для исследования моментов токоподводов приборов с подвижной системой // Измерит. техника. 1977. № 6. С. 56.
3. Журавлев Ю. Н., Ветлицын А. М., Хмылко Н. В. Экспериментальное исследование электромагнитных опор для высокоскоростных роторов // Станки и инструменты. 1982. № 5. С. 13–14.
4. Кочетов Д. А., Крайцова Е. В., Позняк Э. Л. Устойчивость и вынужденные колебания вращающегося ротора в электромагнитном подвесе активного типа. // «Нелинейные колебания механических систем»: Тез. докл. Всесоюз. конф. Горький; Изд-во Горьк. ун-та. 1987. Ч. 1. С. 208.
5. Воронков В. С. Синтез системы стабилизации магнитного подвеса и экспериментальное исследование ее динамики // Изв. вузов Приборостроение. 1984. Т. 27. № 8. С. 32–37.
6. Воронков В. С., Поздеев О. Д. Исследование систем стабилизации магнитного подшипника. // Изв. АН СССР МТТ. 1980. № 4. С. 30–39.
7. Степаньянц Г. А. Теория динамических систем. М.: Машиностроение, 1985. 247 с.
8. Журавлев Ю. Н. Синтез линейной оптимальной системы управления магнитным подвесом жесткого ротора. // Машиноведение. 1987. № 4. С. 49–56.
9. Мартыненко Ю. Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 831 с.
11. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
20.VII.1989