МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 531.8

В. А. ГЛАЗУНОВ

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯТОРОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С УЧЕТОМ ОСОБЫХ ПОЛОЖЕНИЙ

Манипуляторы параллельной структуры имеют общий признак: выходное звено связано с основанием несколькими кинематическими цепями, каждая из которых может содержать одну или несколько приводных пар или налагать некоторое число связей на движение выходного звена (фиг. 1, 2). Такие манипуляторы в ряде технических приложений становятся перспективной альтернативой традиционным манипуляторам с последовательным расположением звеньев в силу высокой жесткости, точности, грузоподъемности [1, 2]. В ряде публикаций, например [3–5], рассматривалась кинематика подобных манипуляторов. В частности, в [3] приведено исследование манипуляторов с шестью и тремя степенями свободы, в [4] дан универсальный матричный метод определения скоростей, в [5] определены законы изменения обобщенных координат платформы Стюарта по заданному движению выходного звена.

В предлагаемой статье рассматриваются важные при синтезе и управлении и не исследованные ранее вопросы: определение группы возможных перемещений выходного звена манипуляторов параллельной структуры, построение алгоритма кинематического анализа, не требующего, в отличие от [4], обращения матриц большой размерности, разработка критериев определения особых положений и анализ свойств манипуляторов данного класса в таких положениях.

Показано, что в особых положениях манипуляторы параллельной структуры имеют некоторые свойства одноконтурных механизмов [6], в частности, мгновенную подвижность в неприводных кинематических парах [6], а также свойства манипуляторов с незамкнутыми кинематическими цепями [7], например, уменьшение числа степеней свободы выходного звена.

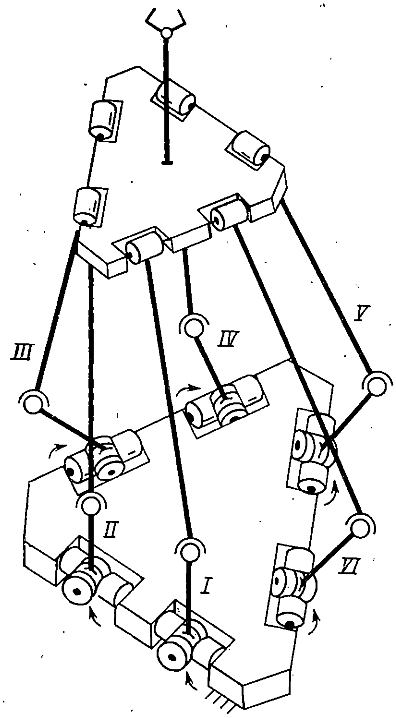
Предлагаемый универсальный подход иллюстрируется манипуляторами с шестью и четырьмя степенями свободы. В качестве математического аппарата используется теория групп винтов.

1. Манипуляторы «параллельной структуры». Манипуляторы параллельной структуры, как это следует из их названия, осуществляют движение выходного звена за счет присоединения к нему нескольких «параллельно» действующих звеньев, в отличие от манипуляторов, выходное звено которых входит в «последовательную» цепь звеньев.

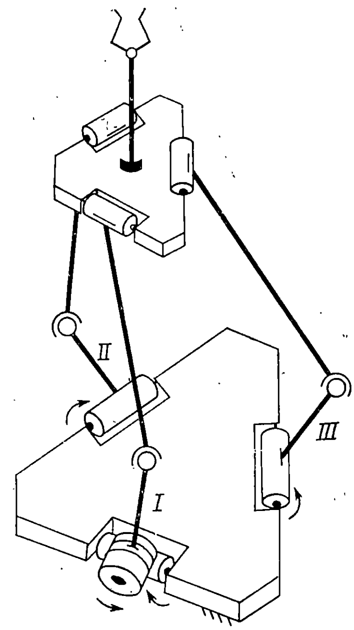
Для манипулятора параллельной структуры начальное элементарное перемещение выходного звена из заданного положения определяется совокупностью линейных комбинаций кинематических винтов — перемещений в парах каждой соединительной цепи. Необходимо определить группу возможных начальных перемещений выходного звена, поскольку без этого нельзя построить программное движение манипулятора.

На работоспособность манипуляторов существенно влияют особые положения. Вопрос об особых положениях манипуляторов параллельной структуры в достаточной степени не исследован, поскольку отсутствует универсальный алгоритм кинематического анализа, не требующий обращения матриц большой размерности.

В связи со сказанным в данной статье ставится задача: определение начальных перемещений выходного звена манипуляторов параллельной



Фиг. 1



Фиг. 2

структуры, разработка универсального алгоритма кинематического анализа и создание на его основе критериев определения особых положений, а также исследование этих положений.

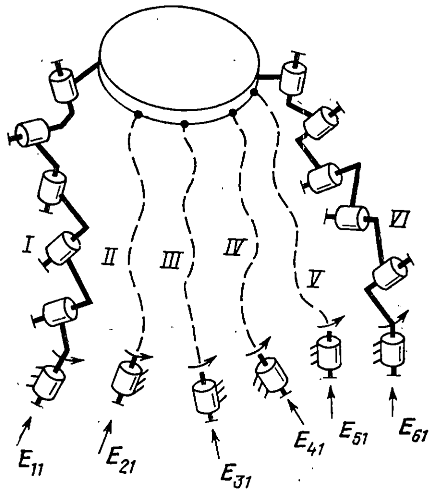
2. Кинематический анализ. Рассмотрим определение элементарных перемещений выходного звена манипулятора параллельной структуры с произвольным числом степеней свободы из некоторого начального положения. Эту задачу, актуальную при управлении, можно решить на основе предлагаемого алгоритма нахождения кинематического винта выходного звена по элементарному приращению обобщенных координат, которыми считаются относительные координаты звеньев, примыкающих к приводным парам.

Рассмотрение проводится на примере манипуляторов, изображенных на фиг. 1, 2. Первый из них имеет 6 степеней свободы $W=6$ и 6 соединительных цепей $k=6$. В каждой цепи имеется по одной приводной паре, причем эта пара сопряжена с основанием.

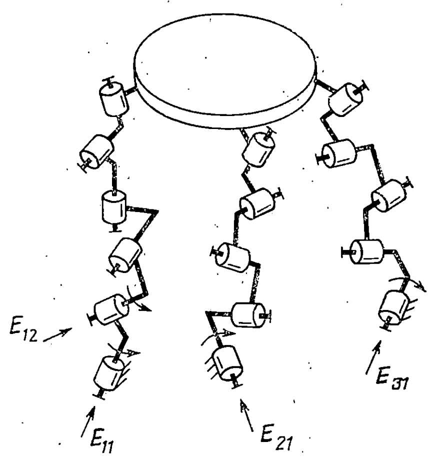
На фиг. 3 представлена расчетная схема данного манипулятора, где каждая соединительная цепь содержит лишь одноподвижные пары. Номер соединительной цепи обозначен римской цифрой. Такой схеме соответствует еще целый ряд манипуляторов с шестью степенями свободы.

Манипулятор фиг. 2 обладает 4 степенями свободы $W=4$ и тремя соединительными цепями $k=3$. На фиг. 4 представлена расчетная схема, причем приводные пары показаны круговыми стрелками.

При заторможенных всех, кроме одной, приводных парах манипулятор имеет лишь одну степень свободы, а выходное звено может перемещаться лишь по одному винту. Для его определения следует вначале для каждой соединительной цепи, кроме i-й, которая содержит единственную незаторможенную приводную пару, найти группу силовых винтов, взаимных с ортами осей неприводных пар. Далее необходимо определить группу



Фиг. 3



Фиг. 4

кинематических винтов, взаимных всем указанным силовым винтам. Кинематический винт выходного звена должен входить в указанную группу кинематических винтов, а также в группу винтов, определяемую ортами осей неприводных пар i-й соединительной цепи и ортом оси незаторможенной приводной пары. Следовательно, можно составить винтовое уравнение, куда войдут кинематические винты i-й соединительной цепи и кинематические винты выходного звена, определенные видом и расположением неприводных пар в остальных соединительных цепях.

Из указанного уравнения можно найти кинематический винт выходного звена, соответствующий элементарному приращению одной обобщенной координаты. Подобную операцию следует проделать W раз (W — число степеней свободы) и найти кинематический винт, соответствующий приращениям всех обобщенных координат. На основе линейной комбинации найденных кинематических винтов можно определить и группу движений выходного звена.

Для манипулятора с шестью степенями свободы (фиг. 1, 3) предложенный алгоритм иллюстрируется следующим образом. Затормозив приводные пары соединительных цепей II ... VI следует найти для каждой из них единственный (с точностью до множителя) силовой винт $\mathbf{P}_i$, взаимный с пятью ортами $\mathbf{E}_{i2} \dots \mathbf{E}_{i6}$ осей неприводных пар ($i=2 \dots 6$ — номер соединительной цепи). Для этого составляются уравнения [6]:

$$p_{ix}x_{ij}^{\circ}+p_{iy}y_{ij}^{\circ}+\dots+p_{iz}^{\circ}z_{ij}=0 \quad (i=2\dots 6,\ j=2\dots 6) \tag{1}$$

где $p_{ix} \dots p_{iz}^{\circ}$, $x_{ij} \dots z_{ij}^{\circ}$ — плюккеровы координаты винтов P_i и ортов $\mathbf{E}_{i2} \dots \mathbf{E}_{i6}$.

Затем нужно найти единственный с точностью до множителя кинематический винт Ξ_1, взаимный с силовыми винтами $P_2 \dots P_6$.

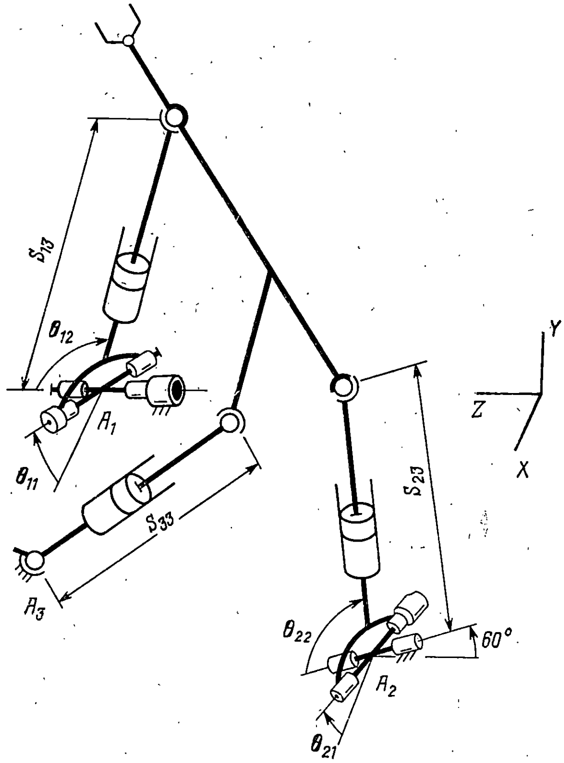
Далее составляется винтовое уравнение

$$\mathbf{E}_{11}d\theta_{11}+\mathbf{E}_{12}d\theta_{12}+\dots+\mathbf{E}_{16}d\theta_{16}=d\xi_1\Xi_1=d\Psi \tag{2}$$

где $d\xi_1$ — неизвестный вещественный множитель, характеризующий относительное элементарное перемещение «звеньев», примыкающих к «винтовой паре», шаг и расположение которой определяются винтом Ξ_1, $d\theta_{ij}$ ($j=1 \dots 6$) — приращения угловых координат.

Из уравнения (2) можно найти $d\xi_1$:

$$d\xi_1=d\theta_{11}\Delta_1/\Delta \tag{3}$$



Фиг. 5

где Δ_1 — определитель, составленный из плюккеровых координат ортов $\mathbf{E}_{11} \ldots \mathbf{E}_{16}$; Δ — определитель, полученный заменой в Δ орта $\mathbf{E}_{11}$ на винт Ξ_1.

Таким образом, из (2), (3) найден винт $d\Psi = d\xi_1 \Xi_1$, соответствующий элементарному приращению $d\theta_{11}$ обобщенной координаты θ_{11}. Аналогичную процедуру следует проделать для приращений обобщенных координат $\theta_{21} \ldots \theta_{26}$.

Для анализа скоростей достаточно заменить в соответствующих уравнениях $d\theta_{ij}$ на $\omega_{ij} = d\theta_{ij}/dt$, а $d\xi_1$ на $d\xi_1/dt$ и $d\Psi$ на $d\Psi/dt = \mathbf{\Omega}$. При анализе ускорений следует ввести в рассмотрение суммы винтовых произведений, определяемых относительными скоростями звеньев каждой соединительной цепи.

Для манипулятора (фиг. 2, 4) с четырьмя степенями свободы при решении прямой кинематической задачи приходится определять двучленные группы силовых винтов, взаимных ортам осей неприводных пар соединительных цепей II, III.

В частности, для случая, когда заторможены все приводные пары, кроме пары с ортом $\mathbf{E}_{11}$, расположенной в соединительной цепи I и связанной с основанием, кинематический винт выходного звена должен входить в две четырехчленные группы, определенные ортами $\mathbf{E}_{22} \ldots \mathbf{E}_{25}$ и $\mathbf{E}_{32} \ldots \mathbf{E}_{35}$.

Вначале подлежит определению двучленная группа $\mathbf{P}_{21}$ и $\mathbf{P}_{22}$ силовых винтов, взаимная ортам $\mathbf{E}_{22}, \ldots, \mathbf{E}_{25}$. При этом используются условия взаимности [6], аналогичные (1).

Затем следует найти группу винтов $\mathbf{P}_{31}$ и $\mathbf{P}_{32}$, взаимных ортам $\mathbf{E}_{32}, \ldots \ldots, \mathbf{E}_{35}$. Далее определяется двучленная группа кинематических винтов Ξ_2 и Ξ_3, взаимная четырехчленной группе P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}. Кинематический винт выходного звена должен входить в группу винтов Ξ_2 и Ξ_3, а кроме того, он соответствует линейной комбинации винтов, характеризующих элементарные приращения относительных координат звеньев соединительной цепи I. Отсюда следует винтовое уравнение

$$\mathbf{E}_{11}d\theta_{11}+\mathbf{E}_{13}d\theta_{13}+\ldots+\mathbf{E}_{16}d\theta_{16}=d\xi_2\Xi_2+d\xi_3\Xi_3 \qquad (4)$$

где все обозначения аналогичны соотношению (2). Из уравнения (4) после разложения его по плюккеровым координатам определяется кинематический винт $d\psi$ выходного звена

$$d\psi=d\xi_2\Xi_2+d\xi_3\Xi_3=d\theta_{11}(\Delta_{12}\Xi_2+\Delta_{13}\Xi_3)/\Delta \qquad (5)$$

где Δ_{12}, Δ_{13}, Δ — определители, составленные из плюккеровских координат, входящих в (4).

Следует отметить, что решение прямой кинематической задачи можно провести, составив систему линейных уравнений, выражающих относительные моменты искомого кинематического винта выходного звена и силовых винтов, взаимных ортам осей пар соединительных кинематических цепей.

В частности, для манипулятора с шестью степенями свободы (фиг. 1, 3) эта система имеет вид

$$\begin{matrix} d\psi_x p_{1x}^{\circ}+d\psi_y p_{1y}^{\circ}+\ldots+d\psi_y^{\circ} p_{1y}+d\psi_z^{\circ} p_{1z}=d\theta_{11}\Delta_1 \\ \cdots \\ d\psi_x p_{6x}^{\circ}+d\psi_y p_{6y}^{\circ}+\ldots+d\psi_y^{\circ} p_{6y}+d\psi_z^{\circ} p_{6z}=d\theta_{61}\Delta_6 \end{matrix} \qquad (6)$$

Здесь $d\psi_x\ldots d\psi_z^{\circ}$ — плюккеровы координаты кинематического винта $d\psi$ выходного звена, $p_{ix}\ldots p_{iz}^{\circ}$ $(i=1\ldots6)$ — плюккеровы координаты силовых винтов $\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_6$; $\Delta_1\ldots\Delta_6$ — определители, составленные из плюккеровых координат ортов осей пар соединительных цепей I ... VI.

Для манипулятора с четырьмя степенями свободы (фиг. 2, 4) система уравнений, аналогичная системе (6) имеет вид

$$\begin{matrix} d\psi_x \overset{\circ}{p}_{11x}+d\psi_y \overset{\circ}{p}_{11y}+\ldots+d\psi_z^{\circ} p_{11z}=d\theta_{11}\Delta_1 \\ d\psi_x \overset{\circ}{p}_{12x}+d\psi_y \overset{\circ}{p}_{12y}+\ldots+d\psi_z^{\circ} p_{12z}=d\theta_{12}\Delta_1 \\ d\psi_x \overset{\circ}{p}_{21x}+d\psi_y \overset{\circ}{p}_{21y}+\ldots+d\psi_z^{\circ} p_{21z}=d\theta_{21}\Delta_2 \\ d\psi_x \overset{\circ}{p}_{22x}+d\psi_y \overset{\circ}{p}_{22y}+\ldots+d\psi_z^{\circ} p_{22z}=0 \\ d\psi_x \overset{\circ}{p}_{31x}+d\psi_y \overset{\circ}{p}_{31y}+\ldots+d\psi_z^{\circ} p_{31z}=d\theta_{31}\Delta_3 \\ d\psi_x \overset{\circ}{p}_{32x}+d\psi_y \overset{\circ}{p}_{32y}+\ldots+d\psi_z^{\circ} p_{32z}=0 \end{matrix} \qquad (7)$$

Здесь $p_{11x}\ldots \overset{0}{p}_{32z}$ — плюккеровы координаты силовых винтов $\mathbf{P}_{11}\ldots\mathbf{P}_{32}$, взаимных ортам осей пар соединительных цепей. При этом $\mathbf{P}_{11}$ взаимен с ортами $\mathbf{E}_{12}\ldots\mathbf{E}_{16}$; $\mathbf{P}_{21}$ взаимен с ортами $\mathbf{E}_{11}$, $\mathbf{E}_{13}\ldots\mathbf{E}_{16}$; $\mathbf{P}_{21}$ взаимен с ортами $\mathbf{E}_{22}\ldots\mathbf{E}_{25}$, а также с ортом $\mathbf{E}_{20}$ фиктивной «пары», принадлежащей соединительной цепи II; $\mathbf{P}_{22}$ взаимен с ортами $\mathbf{E}_{21}\ldots\mathbf{E}_{25}$. Винты $\mathbf{P}_{31}$ и $\mathbf{P}_{32}$ определяются аналогично винтам $\mathbf{P}_{21}$ и $\mathbf{P}_{22}$; Δ_1, Δ_2, Δ_3 — определители шестого порядка, составленные из плюккеровых координат ортов осей пар (включая фиктивные) кинематических соединительных цепей I, II, III.

Предложенный подход позволяет провести кинематический анализ манипулятора параллельной структуры с произвольным числом степеней свободы и любым количеством соединительных цепей. Этот подход не требует обращения матриц большой размерности, в отличие от алгоритма, предложенного в [4], при использовании которого, например, для манипулятора, изображенного на фиг. 1, потребовалось бы обращать матрицу 30×30.

3. Анализ особых положений. Сказанное выше относилось к случаям, когда манипулятор находится в неособом положении. Предложенный подход позволяет исследовать и особые положения, используя, в частности, уравнения (3) и (5).

Для манипулятора с шестью степенями свободы особые положения характеризуются обращением в ноль определителей, входящих в уравнения, аналогичные (3).

Если для какой-либо i-й цепи $\Delta_i=0$, то имеется линейная зависимость ортов $\mathbf{E}_{i1} \ldots \mathbf{E}_{i6}$. При этом манипулятор теряет по крайней мере одну степень свободы, а группу возможных элементарных перемещений выходного звена можно определить по алгоритму, изложенному в п. 1.

При условии $\Delta=0$ имеет место мгновенная подвижность в неприводных парах, а $d\theta_{i1}=0$. Условие $\Delta=0$ можно привести к виду

$$\Delta=\Delta^*=0 \tag{8}$$

где Δ^* — определитель, составленный из плюккеровых координат силовых винтов, взаимных ортам осей неприводных пар. Действительно, определитель Δ, составленный из плюккеровых координат шести винтов, равен относительному моменту одного из этих винтов, а также единственного с точностью до множителя винта, взаимного оставшимся пяти винтам, причем плюккеровы координаты указанного взаимного винта можно определить, как определители пятого порядка матрицы, включающей координаты указанных пяти винтов. Следовательно, определитель Δ можно представить следующим образом: $\Delta=\mathrm{mom}(\mathbf{P}_1, \Xi_1)$, где $\mathbf{P}_1$ — силовой винт, взаимный ортам $\mathbf{E}_{12} \ldots \mathbf{E}_{16}$, причем плюккеровы координаты этого винта выражены как определители пятого порядка, составленные из координат ортов $\mathbf{E}_{12} \ldots \mathbf{E}_{16}$, Ξ_1 — кинематический винт, определенный выше.

Поскольку плюккеровы координаты Ξ_1 представлены как определители пятого порядка, составленные из координат силовых винтов $\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_6$, то при $\Delta=0$ также и $\Delta^*=0$.

Отсюда следует, что соотношение (8) — это критерий определения особых положений манипулятора параллельной структуры. Критерий является локальным, поскольку он характеризует лишь одно положение манипулятора. Для реального манипулятора критерием особого положения должно быть условие $|\Delta^*| \leqslant \varepsilon$, где ε — наперед заданное число. Условие (8) соответствует вырождению матрицы системы (6) или (7), поскольку ее элементами являются плюккеровы координаты силовых винтов, взаимных ортам осей пар соединительных цепей.

В случае, если в уравнении (3) $\Delta=\Delta_i=0$, то выходное звено теряет одну степень свободы и имеется винт, движение по которому неуправляемо. Здесь не рассматриваются случаи, когда у матриц, соответствующих определителям Δ и Δ_i, ранг понижается более, чем на единицу.

При выполнении соотношения (8) манипулятор теряет возможность независимого изменения обобщенных координат. Данное условие имеет место при попадании m ($m=2 \ldots 6$) из шести силовых винтов $\mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_6$ в $(m-1)$-членную группу. Если $m=6$, то из уравнений, аналогичных (3), следует, что $d\theta_{i1}=0$ при $d\theta_{j1}=0$ ($i, j=1 \ldots 6$, $i \neq j$).

В случае, когда $m<6$, в оставшихся $(6-m)$ кинематических цепях (фиг. 1, 3) возможно приращение одной обобщенной координаты при сохранении постоянной остальных обобщенных координат.

В частности, если винты $\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_6$ вошли в четырехчленную группу, то в правой части уравнения (2) возникнет дополнительное слагаемое, а решение соответствующей системы уравнений будет представлять однопараметрическое семейство.

Линейную зависимость между элементарными приращениями обобщенных координат можно найти из системы уравнений (6). Вычеркивая из определителя этой системы по одной строке, можно установить m винтов, попавших в $(m-1)$-членную группу. В частности, если при вычеркивании i-й строки ранг оставшейся матрицы равен пяти, то винт $\mathbf{P}_i$ $(i=1\ldots6)$ входит в искомую группу винтов.

При этом между правыми частями уравнений, соответствующих винтам, образующим $(m-1)$-членную группу, должна существовать линейная зависимость, аналогичная зависимости между винтами указанной группы.

Если какой-либо винт $\mathbf{P}_i$ $(i=1\ldots6)$ не входит в рассматриваемую группу, то $d\theta_{i1}$ может быть не нулевым при равенстве нулю приращений остальных обобщенных координат.

Аналогично может быть установлена линейная зависимость между приращениями обобщенных координат манипулятора с четырьмя степенями свободы (фиг. 2, 4).

Таким образом, предложен критерий попадания манипулятора параллельной структуры в особое положение и установлена линейная зависимость между приращениями обобщенных координат в особом положении.

В особом положении при выполнении условия (8) манипулятор имеет неуправляемое движение по единственному с точностью до множителя винту, который в общем случае выводит манипулятор из особого положения.

Действительно, в особом положении силовые винты, передаваемые соединительными цепями, становятся линейно зависимыми, следовательно, им соответствует единственный с точностью до множителя взаимный кинематический винт $\mathbf{X}$, движение по которому произвольно. Этот винт можно найти, составив матрицу плюккеровых координат пяти линейно независимых винтов из шести винтов $\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_6$.

Утверждение о том, что движение по винту $\mathbf{X}$ в общем случае выводит манипулятор из особого положения следует из рассмотрения системы уравнений, описывающих аналог ускорения — приращение $d\mathbf{X}$ кинематического винта $\mathbf{X}$. Для манипулятора с шестью степенями свободы (фиг. 1, 3) эта система имеет вид

$$p_{1x}{}^{\circ}dX_x+p_{1y}{}^{\circ}dX_y+\ldots+p_{1y}dX_y{}^{\circ}+p_{1z}dX_z{}^{\circ}=$$
$$=p_{1x}{}^{\circ}L_{1x}+p_{1y}{}^{\circ}L_{1y}+\ldots+p_{1y}L_{1y}{}^{\circ}+p_{1z}L_{1z}{}^{\circ}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$p_{6x}{}^{\circ}dX_x+p_{6y}{}^{\circ}dX_y+\ldots+p_{6y}dX_y{}^{\circ}+p_{6z}dX_z{}^{\circ}=$$
$$=p_{6x}{}^{\circ}L_{6x}+p_{6y}{}^{\circ}L_{6y}+\ldots+p_{6y}L_{6y}{}^{\circ}+p_{6z}L_{6z}{}^{\circ}$$

где $L_{ix}\ldots L_{iz}{}^{\circ}$ — плюккеровы координаты винтов $\mathbf{L}_1\ldots\mathbf{L}_6$ $(i=1\ldots6)$, определяемых по формулам $\mathbf{L}_i=d\theta_{i2}\mathbf{E}_{i2}\times(d\theta_{i3}\mathbf{E}_{i3}+\ldots+d\theta_{i6}\mathbf{E}_{i6})+\ldots+d\theta_{i5}\mathbf{E}_{i5}\times\times d\theta_{i6}\mathbf{E}_{i6}$, $dX_x\ldots dX_z{}^{\circ}$ — плюккеровы координаты винта $d\mathbf{X}$.

Приведенная система несовместна, поскольку пятичленные группы винтов не замкнуты, следовательно, после перемещения по винту $\mathbf{X}$ отсутствует винт, взаимный силовым винтам, определяемым расположением неприводных пар шести соединительных цепей и положение манипулятора, вообще говоря, не особое.

На основе изложенного можно построить алгоритм управления манипулятором указанного класса вблизи особых положений. Вначале нужно найти, какие m из шести винтов $\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_6$ вошли в $(m-1)$-членную группу. Далее следует снять управление с приводной пары, принадлежащей одной из кинематических цепей, соответствующих найденной $(m-1)$-членной группе, а также передать управление на другую (неприводную) пару, имеющую подвижность в данном положении и предварительно снабженную дополнительным приводом. После прохождения особого положения нужно вновь передать управление на основную приводную пару.

4. «Глобальный» критерий особых положений. Для ряда практически важных схем манипуляторов параллельной структуры удается получить аналитическую зависимость между одной обобщенной координатой (при фиксированных остальных) и некоторой относительной координатой звеньев, примыкающих к кинематической паре, не снабженной приводом.

Для этого случая можно предложить «глобальный» критерий, позволяющий найти особые положения при фиксации всех, кроме одной, обобщенных координат.

Пусть зависимость между обобщенной координатой θ_{ij} и некоторой относительной угловой координатой θ_{lm} имеет вид $F(\eta_{ij}, \eta_{lm})=0$, где $\eta=\mathrm{tg}(\theta/2)$. Подобно тому, как это сделано в [8] для одноконтурных механизмов с одной степенью свободы, для рассматриваемого случая можно показать, что обращение в ноль производной $d\theta_{ij}/d\theta_{lm}$ соответствует выполнению условия (8) и свидетельствует об особом положении. При этом справедливо $\partial F(\eta_{ij}, \eta_{lm})/\partial\eta_{lm}=0$.

Для примера на фиг. 5 изображен манипулятор с шестью степенями свободы и тремя соединительными цепями. В одной цепи расположены три приводные пары, в другой две и в третьей — одна. Соответствующие обобщенные координаты θ_{11}, θ_{12}, S_{13}, θ_{22}, S_{23}, S_{33}. Точки A_1, A_2, A_3 имеют координаты $X_{A1}=Y_{A1}=0$, $Z_{A1}=0{,}42$ м, $X_{A2}=0{,}5$ м, $Y_{A2}=Z_{A2}=0$, $X_{A3}=0{,}25$ м, $Y_{A3}=0$, $Z_{A3}=0{,}2$ м. Оси вращательных пар, примыкающих к точкам A_1 и A_2, пересекаются в этих точках под прямым углом.

При фиксации обобщенных координат θ_{12}, S_{13}, θ_{22}, S_{23} можно найти значения θ_{11}, соответствующие особым положениям. Здесь используется уравнение [6], выражающее зависимость между угловыми координатами звеньев пространственного четырехзвенника с двумя вращательными и двумя сферическими парами.

Так, в случае, когда указанные координаты имеют значения $\theta_{12}=90°$, $S_{13}=0{,}2$ м, $\theta_{22}=25{,}5°$, $S_{23}=0{,}465$ м, особые положения будут при $\theta_{11}=77{,}4°$ ($\theta_{21}=63{,}8°$) и при $\theta_{11}=-7{,}5°$, ($\theta_{21}=45{,}8°$). Эти положения — особые, независимо от значения координаты θ_{33}.

Полученные результаты позволяют эффективно решить ряд технических задач. При построении программного движения манипулятора из некоторого начального положения в начале по предложенному алгоритму определяется группа возможных движений выходного звена, а затем из этой группы выбирается кинематический винт, наиболее близкий к требуемому.

Предложенный алгоритм определения кинематического винта выходного звена по приращению обобщенной координаты позволяет эффективно использовать для задач динамического анализа общее уравнение динамики.

Разработанные в статье критерии определения особых положений позволяют планировать траектории, исключающие попадание манипулятора в указанные положения, а найденные свойства манипулятора, касающиеся особых положений, дают возможность построить манипулятор с дополнительными приводами малой мощности, которые выводят этот манипулятор из особых положений в предписанном направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stewart D.* A platform with six degrees of freedom // Aircraft Engng. 1966. V. 38. N 4. P. 30–35. Proc. Instn. Mech. Engrs. 1965–1966. V. 180. Pt. 1. N 15. P. 371–386.
2. *Hunt K. H.* Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms // Trans. ASME. J. Mech., Transmiss. and Automat. in Des. 1983. V. 105. N 4. P. 705–712. Рус. перев.: Хант. Кинематические структуры манипуляторов с параллельным приво-

дом // Тр. Амер. о-ва инж.-механ., Конструирование и технология машиностроения. 1983. N 4. С. 201–210.

3. *Mohamed M. G., Duffy J.* A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators // Trans. ASME. J. Mech., Transmiss. and Automat. in Des. 1985. V. 107. N 2. P. 226–229. Рус. перевод: Мохамед, Даффи. Непосредственное определение мгновенной кинематики роботов с параллельным расположением приводов/Тр. Амер. о-ва инж.-механ., Конструирование и технология машиностроения. 1985. N 2. С. 229–232.

4. *Sugimoto K.* Kinematic and dynamic analysis of parallel manipulators by means of motor algebra/Trans. ASME. J. Mech., Transmiss. and Automat. in Des. 1987. V. 109. N 1. P. 3–7. Рус. перевод: Сугимото. Анализ кинематики и динамики манипуляторов с параллельным расположением приводов методами моторной алгебры. / Тр. Амер. о-ва инж.-механ., Конструирование и технология машиностроения. 1988. N 1. С. 279–286.

5. *Диментберг Ф. М.* Движение твердого тела, осуществляемое действием на его точки тяг – толкателей. // Машиноведение. 1988. № 5. С. 63–69.

6. *Диментберг Ф. М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982. 336 с.

7. *Глазунов В. А.* Об управлении манипулятором в особых положениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 61–65.

8. *Глазунов В. А., Диментберг Ф. М.* Об особом положении пространственного пятизвенника, образованного из двух механизмов Беннета // Машиноведение. 1984. № 5. С. 50–54.

Москва

Поступила в редакцию 25.X.1989