МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 531.31

Н. А. ФУФАЕВ

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ В ПРИМЕРЕ ПЭНЛЕВЕ — КЛЕЙНА. О ПАРАДОКСАХ ПЭНЛЕВЕ

С помощью метода разделения движений исследуется динамика системы в примере Пэнлеве – Клейна при учете вязкого трения в материале стержня, соединяющего массы, в случае, когда жесткость стержня стремится к бесконечности. Вскрывается причина парадоксов Пэнлеве.

1. О парадоксах Пэнлеве. Как известно П. Пэнлеве [1] указал ряд примеров, в которых закон сухого трения Кулона в сочетании с гипотезой абсолютно твердого тела приводит к парадоксам, получившим название парадоксов Пэнлеве. Суть этих парадоксов проявляется уже в простом примере Пэнлеве — Клейна [1], который и рассматривается дальше.

Две точки M_1 и M_2 одинаковой массы m, соединенные жестким стержнем пренебрежимой массы, могут перемещаться по параллельным прямым (фиг. 1). Пусть направляющая точки M_2 абсолютно гладкая, а точки M_1 — шероховатая, причем коэффициент трения при движении точки M_1 равен f, а в покое равен f_0. Если α — угол между стержнем и осью x; P — постоянная внешняя сила, действующая на точку M_1 вдоль оси x; R — реакция стержня, тогда сила трения $F=\varkappa R\sin\alpha$, где $\varkappa=\pm f$. Знак выбирается так, чтобы сила трения всегда была направлена противоположно скорости $x_1^{\boldsymbol\cdot}$. Последнее условие можно записать в виде неравенства $Fx_1^{\boldsymbol\cdot}<0$ или

$$\varkappa R x_1^{\boldsymbol\cdot}<0 \quad (x_1^{\boldsymbol\cdot}\neq 0) \tag{1.1}$$

Уравнения движения системы имеют вид

$$m x_1^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=P-R\cos\alpha+\varkappa R\sin\alpha, \quad m x_2^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}=R\cos\alpha \tag{1.2}$$

Условие абсолютной жесткости стержня отображается соотношением $x_1-x_2=0$, используя которое, находим из (1.2):

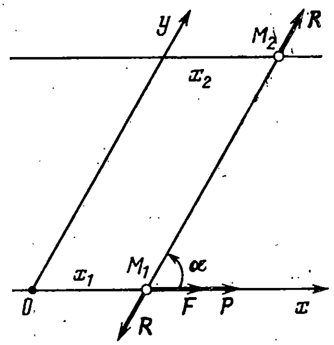
$$R=P(2\cos\alpha-\varkappa\sin\alpha)^{-1} \tag{1.3}$$

Пусть ради определенности $P>0$. Рассмотрим сначала случай, когда стержень расположен «полого», т. е. выполняется неравенство $|2\cos\alpha|>|\varkappa\sin\alpha|$. Тогда согласно выражению (1.3) знак R не зависит от знака $\varkappa$, и при любом знаке R всегда можно выбрать знак $\varkappa$ так, чтобы удовлетворилось неравенство (1.1). В этом случае мы получаем дифференциальные уравнения, которые при заданных начальных условиях однозначно определяют движение рассматриваемой системы.

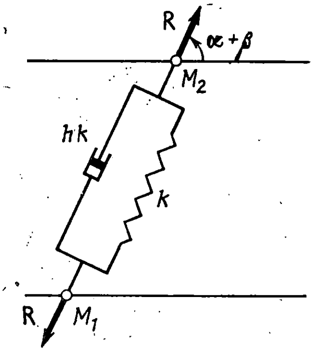
Гораздо больший интерес представляет случай «круто» поставленного стержня, когда выполняется неравенство

$$|\varkappa\sin\alpha|>|2\cos\alpha| \tag{1.4}$$

[1] См. [1, с. 57, 250, 264], [2 и 3].



Фиг. 1



Фиг. 2

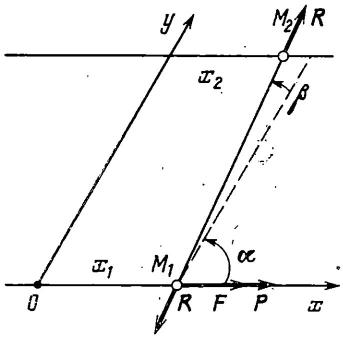
В этом случае согласно (1.3) знак R противоположен знаку $\varkappa$ независимо от знака $\cos\alpha$. Но тогда не может быть удовлетворено неравенство (1.1) при $x_1^{\cdot}<0$, а при $x_1^{\cdot}>0$ оно удовлетворяется как для $\varkappa=f$, так и для $\varkappa=-f$, то есть получается неоднозначность. Это очевидное противоречие с основными законами механики и составляет суть парадоксов Пэнлеве.

В результате дискуссии, которая в начале этого века развернулась по поводу парадоксов Пэнлеве при участии таких выдающихся механиков как Ф. Клейн, Л. Прандтль, П. Пэнлеве, Р. Мизес, Г. Гамель и другие [1], выяснилось, что для точного представления о явлениях, происходящих в подобной механической системе, необходимо рассматривать ее как упругую. Для изучения же движений соответствующей модели абсолютно твердого тела достаточно проделать предельный переход, считая, что коэффициент упругости стремится к бесконечности.

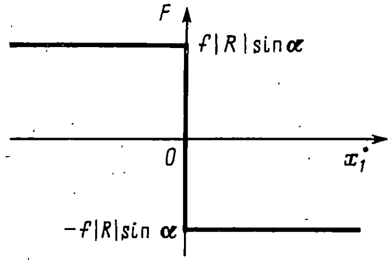
Такую программу действий для системы в примере Пэнлеве — Клейна выполнили Ф. Пфайфер [1] и Н. В. Бутенин [2], а для системы с n степенями свободы — Ле Суан Ань [3]. С помощью численного расчета Ф. Пфайфер показал, что при бесконечном возрастании коэффициента упругости стержня в случае $x_1^{\cdot}<0$ величина $R\to\infty$, что приводит к мгновенной остановке движения системы, а в случае $x_1^{\cdot}>0$ одно из предельных движений оказывается неустойчивым и поэтому не реализуется. Эти же результаты Н. В. Бутенин проиллюстрировал на фазовой плоскости $RR^{\cdot}$ и пришел к выводу, что можно, оставаясь верным гипотезе абсолютно твердого тела, ввести дополнительную гипотезу о мгновенной остановке движения, что также устраняет парадокс Пэнлеве.

Распространив этот подход на общий случай, когда система имеет n обобщенных координат, Ле Суан Ань [3] установил критерий возникновения парадоксов Пэнлеве, а также вывел уравнения движения системы, позволяющие судить о поведении системы в парадоксальных областях. В примере Пэнлеве — Клейна теория Ле Суан Аня приводит к результатам, совпадающим с выводами Ф. Пфайфера и Н. В. Бутенина.

Заметим, что при изучении системы в примере Пэнлеве — Клейна все вышеупомянутые авторы не учитывали диссипацию энергии в материале стержня, что в определенной степени исказило физику явления и привело к усложнению исследования. Кроме того, авторы ограничились рассмотрением лишь фазовой плоскости $RR^{\cdot}$, тогда как задача исследования динамики в этом примере сводится к изучению разбиения на траектории трехмерного фазового пространства $RR^{\cdot}x_1^{\cdot}$. Таким образом, динамика системы в целом осталась по существу не изученной. Осталась не вскрытой и причина возникновения парадоксов Пэнлеве. В самом деле, почему одна и та же математическая модель может быть в некоторой области корректной, а в парадоксальной области дефектной? Что служит признаком



Фиг. 3



Фиг. 4

дефектности «вырожденной» системы при предельном переходе от модели, учитывающей упругость стержня, к модели с жестким стержнем? Ответ на эти вопросы и позволяет получить проводимое ниже исследование динамики системы в примере Пэнлеве — Клейна.

2. Уравнения движения упругой системы. Составим уравнения движения рассматриваемой системы в предположении, что безмассовый стержень, соединяющий точки M_1 и M_2, является упругим в продольном направлении. Кроме того, учтем рассеяние механической энергии в материале стержня при его деформации из-за наличия внутренних сил вязкого трения, представив стержень в виде пружины и демпфера (фиг. 2). Тогда согласно обозначениям на фиг. 3 уравнения динамики (1.2) запишутся в виде

$$mx_1^{\cdot\cdot}=P+F-R\cos(\alpha+\beta),\quad mx_2^{\cdot\cdot}=R\cos(\alpha+\beta) \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что $\beta\ll 1$, поэтому угол β, разность x_1-x_2 и величина Δl сжатия стержня связаны формулами

$$l\beta=(x_1-x_2)\sin\alpha,\quad \Delta l=(x_1-x_2)\cos\alpha \tag{2.2}$$

где l — длина недеформированного стержня. Сила R, с которой стержень действует на точечные массы M_1 и M_2, является суммой двух сил: R_1 и R_2. Сила R_1 обусловлена упругостью стержня и согласно закону Гука равна $R_1=k\Delta l/l=kl^{-1}(x_1-x_2)\cos\alpha$, где k — модуль упругости. Силу R_2, возникающую из-за вязкого трения в материале стержня, выразим соотношение $R_2=hkd(\Delta l)/dt=hlR_1^{\cdot}$, где коэффициент h следует считать постоянным, если мы хотим сохранить свойство диссипации энергии в стержне при переходе к модели с абсолютно жестким стержнем. В результате приходим к выражению

$$R=R_1+hlR_1^{\cdot} \tag{2.3}$$

По смыслу величины R_1 стержень сжат, если $R_1>0$, и растянут, если $R_1<0$. Вычитая второе уравнение (2.1) из первого и используя соотношения (2.2), запишем систему уравнений (2.1) в виде

$$\begin{gathered} ml(k\cos\alpha)^{-1}R_1^{\cdot\cdot}=P+F-2R\cos\alpha \\ mu^{\cdot}=P+F-R\cos\alpha\quad (u\equiv x_1^{\cdot}) \end{gathered} \tag{2.4}$$

В уравнениях (2.4) опущен член $k^{-1}R_1\,\mathrm{tg}^2\alpha$, который при $k\to\infty$ пренебрежимо мал по сравнению с единицей, но сохранен член, содержащий малый параметр $\sim k^{-1}$ при старшей производной.

Допустим сначала, что силы сухого трения подчиняются закону Кулона — Амонтона (фиг. 4), т. е. $f_0=f$. Поскольку сила F зависит от переменной $u\equiv x_1^{\cdot}$, а переменная R определяется выражением (2.3), система дифференциальных уравнений (2.4) описывает движение изображающей точки в трехмерном фазовом пространстве $\Phi(R_1, R_1^{\cdot}, u)$. Согласно графику на фиг. 4 плоскость $u=0$ разделяет фазовое пространство Φ на две области: $\Phi_+(u>0)$ и $\Phi_-(u<0)$, где уравнения движения имеют вид

$$ml(k\cos\alpha)^{-1}R_1^{\cdot\cdot}+f|R|\sin\alpha+2R\cos\alpha=\mathrm{P}$$
$$mu^{\cdot}=P-f|R|\sin\alpha-R\cos\alpha\quad(u>0) \tag{2.5}$$

В области $\Phi_-(u<0)$ уравнения движения получаются из (2.5) путем замены f на $-f$. Движение изображающей точки на плоскости $\Pi(u=0)$ описывается уравнением

$$ml(k\cos\alpha)^{-1}R_1^{\cdot\cdot}+R\cos\alpha=0 \tag{2.6}$$

которое получается из (2.4) после подстановки $u=u^{\cdot}=0$ и исключения неизвестной F [4].

Пусть $\cos\alpha>0$, что не ограничивает общности, и выполняется неравенство (1.4). Введем безразмерные величины $\tau=t(hl)^{-1}$, $\rho=R_1P^{-1}\cos\alpha$, $x_0=m\mathrm{P}^{-1}(hl)^{-2}x$, $v=m(\mathrm{P}hl)^{-1}u$, $\mu=m(kl)^{-1}(h\cos\alpha)^{-2}$, $\sigma=f\operatorname{tg}\alpha-2$, в которых уравнения движения принимают наиболее простой вид

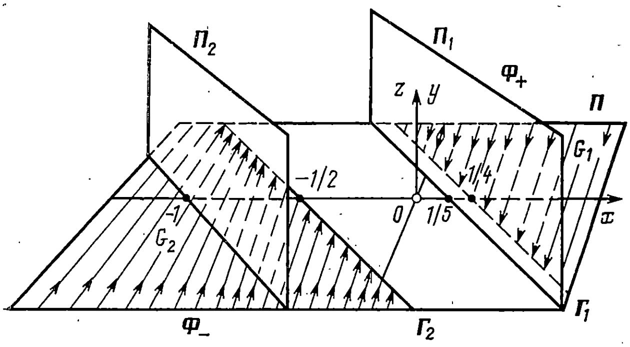
$$\mu\rho^{\cdot\cdot}+(\sigma+4)(\rho+\rho^{\cdot})=1,\quad v^{\cdot}=1-(\sigma+3)(\rho+\rho^{\cdot}) \tag{2.7}$$
$$\mu\rho^{\cdot\cdot}-\sigma(\rho+\rho^{\cdot})=1,\quad v^{\cdot}=1+(\sigma+1)(\rho+\rho^{\cdot}) \tag{2.8}$$
$$\mu\rho^{\cdot\cdot}+\rho^{\cdot}+\rho=0,\quad v=0 \tag{2.9}$$

Здесь (2.7) обозначает область в фазовом пространстве $\Phi(\rho, \rho^{\cdot}, v)$, в которой знаки переменных $\rho+\rho^{\cdot}$, v одинаковы, а (2.8) — область, в которой знаки $\rho+\rho^{\cdot}$, v разные. В уравнениях (2.7)—(2.9) и далее точка над буквой обозначает производную по безразмерному времени τ. Из этих уравнений следует, что величина положительного параметра σ не влияет на качественное поведение рассматриваемой системы, поэтому эти уравнения достаточно рассмотреть для какого-нибудь одного значения σ, например $\sigma=1$. В этом случае, обозначая $x=\rho$, $y=\rho^{\cdot}$, $z=v$, получим следующую систему дифференциальных уравнений

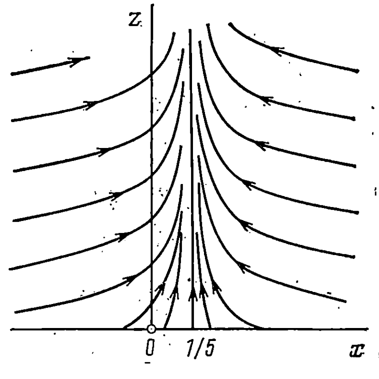
$$x^{\cdot}=y,\ \mu y^{\cdot}=1-5x-5y,\ z^{\cdot}=1-4x-4y \tag{2.10}$$
$$x^{\cdot}=y,\ \mu y^{\cdot}=1+x+y,\ z^{\cdot}=1+2x+2y \tag{2.11}$$
$$x^{\cdot}=y,\ \mu y^{\cdot}=-x-y,\ z=0 \tag{2.12}$$

Задача состоит в изучении решения уравнений (2.8)—(2.10) при исчезающих малых значениях параметра $\mu\to0$.

3. Разбиение фазового пространства на траектории. Рассмотрим структуру фазового пространства $\Phi(x, y, z)$. Плоскости $z=0$ и $x+y=0$ разбивают его на четыре области: $O_1(x+y>0,\ z>0)$, $O_2(x+y<0,\ z>0)$, $O_3(x+y<0,\ z<0)$ и $O_4(z+y>0,\ z<0)$. Движение изображающей точки в областях O_1 и O_3 описывается уравнениями (2.10), в областях O_2 и O_4 — уравнениями (2.11), а на плоскости $\Pi(z=0)$ — уравнениями (2.12). Рассматриваемая система является системой с неудерживающими кинематическими связями, поэтому согласно теории, изложенной в работе [4], уравнения (2.12) описывают движение изображающей точки не на всей плоскости $z=0$, а лишь в области G, которая является устойчивой относительно отклонений изображающей точки от плоскости Π $(z=0)$. Граница Γ области G находится из условия $z^{\cdot}=0$. Из последних уравнений (2.10) и (2.11) следует, что при $\mu\to0$ областью G является полуплоскость G_1 $(z=0,\ x+y>{}^1/_4)$ и полуплоскость G_2 $(z=0,\ x+y<-{}^1/_2)$. Второе уравнение (2.12)



Фиг. 5



Фиг. 6

содержит малый параметр μ при старшей производной, следовательно, при $\mu \to 0$ вся плоскость Π оказывается областью быстрых движений по переменной y, за исключением прямой $x+y=0$, которая является областью медленных движений. Однако прямая $x+y=0$ лежит вне областей G_1 и G_2, где могло бы реализоваться это движение, поэтому области G_1 и G_2 на плоскости Π заполнены траекториями лишь быстрых движений. Попав в область G_1 (или G_2), изображающая точка при $\mu \to 0$ совершает скачок на границу Γ_1 (или соответственно Γ_2), после чего переходит в полупространство Φ_+ (см. фиг. 5).

Согласно второму уравнению (2.10) область O_1 полупространства Φ_+ при $\mu \to 0$ оказывается заполненной траекториями быстрых движений по переменной y, за исключением полуплоскости Π_1 ($5x+5y=1$, $z>0$), которая является областью медленных движений, устойчивых относительно быстрых движений, т. е. относительно отклонений изображающей точки от этой плоскости. Траектории медленных движений на полуплоскости Π_1 — это семейство интегральных кривых $z=-{}^1/_5 \ln|1-5x|+C$ и полупрямая ($x={}^1/_5$, $y=0$, $z>0$), к которой асимптотически приближается изображающая точка при своем движении на полуплоскости Π_1 (фиг. 6).

Согласно второму уравнению (2.11) область O_2 пространства Φ_+ также заполнена траекториями быстрых движений по переменной y, за исключением полуплоскости Π_2 ($x+y=-1$, $z>0$), которая оказывается неустойчивой относительно быстрых движений и по существу является лишь границей, разделяющей быстрые движения по направлению.

Все фазовое полупространство Φ_- заполнено траекториями быстрых движений. При любых начальных условиях в этой области изображающая точка при $\mu \to 0$ совершает скачок в положительном направлении оси y и в соответствии с последними уравнениями (2.10) и (2.11) неизбежно попадает на плоскость Π в область G_1. После этого изображающая точка совершает скачок на границу Γ_1, затем скачок на полуплоскость медленных движений Π_1, где и завершает движение по одной из траекторий, асимптотически приближаясь к прямой ($x={}^1/_5$, $y=0$). Если в начальный момент времени изображающая точка находится в области O_5 ($x+y>-1$, $z>0$), то она сразу совершает скачок на плоскость Π_1, где продолжает перемещаться по одной из траекторий медленного движения. Наконец, если вначале изображающая точка находилась в области O_6 ($x+y<-1$, $z>0$), то она совершает скачок в направлении отрицательных значений y, затем попадает на плоскость Π в область G_2, совершает в плоскости Π скачок в положительном направлении y до встречи с границей Γ_2, после чего выходит в полупространство Φ_+, совершает скачок на полуплоскость Π_1, где и перемещается по одной из траекторий медленного движения.

Таким образом, при любых начальных условиях система приходит к финальному движению с постоянным ускорением в направлении приложенной постоянной силы.

К тем же результатам приводит и рассмотрение динамики системы в примере Пэнлеве — Клейна, если отказаться от сделанного предположения о равенстве коэффициентов f и f_0. Пусть $f_0 > f$. Проводя аналогичное исследование этого случая, нетрудно убедиться в том, что для движений изображающей точки в полупространствах Φ_+ и Φ_- структура фазового пространства Φ остается такой же, какой она показана на фиг. 5. Но для движений изображающей точки на плоскости Π границы Γ_1' и Γ_2' смещаются на некоторое расстояние, зависящее от f_0. При этом ширина полосы между областями G_1 и G_2 уменьшается. Однако эти изменения не оказывают существенного влияния на качественное поведение системы.

Рассмотрим теперь фазовый портрет той же системы в случае «полого» поставленного стержня, когда $\sigma < 0$ и парадоксы Пэнлеве отсутствуют. Пусть по-прежнему $0 < \alpha < \pi/2$, т. е. $\cos\alpha > 0$, но значение параметра σ заключено в интервале $-2 < \sigma < 0$. Из уравнений (2.7) — (2.9) следует, что в этом случае полуплоскость Π_2 располагается в полупространстве Φ_- и оказывается устойчивой относительно быстрых движений. Вместе с полуплоскостью Π_1 она образует устойчивое многообразие медленных движений. При любых начальных условиях в полупространстве Φ_- изображающая точка совершает скачок на плоскость Π_2, движется на ней по одной из траекторий медленного движения и, дойдя до плоскости Π ($z = 0$), совершает скачок на полуплоскость Π_1, где и завершает движение, асимптотически приближаясь к прямой ($x = 1/5$, $y = 0$).

В заключение отметим следующее. Исследование динамики системы в примере Пэнлеве — Клейна показывает, что предложенный способ учета рассеяния энергии в материале стержня не только приводит к своеобразной регуляризации уравнений движения, позволяя использовать метод разделения движений, но и помогает понять причину возникновения парадоксов Пэнлеве. В самом деле, в фазовом пространстве Φ упругой системы при $\mu \to 0$ появляются плоскости медленных движений, которые представляют фазовое пространство соответствующей «вырожденной» системы, т. е. системы с абсолютно жестким стержнем. В случае полого поставленного стержня плоскости медленных движений в фазовом пространстве Φ оказываются устойчивыми относительно быстрых движений, поэтому быстрое движение для такой системы не является существенным. В случае же круто поставленного стержня, когда $\sigma > 0$, в фазовом полупространстве Φ_+ наряду с устойчивой полуплоскостью Π_1 имеется полуплоскость Π_2, неустойчивая относительно быстрых движений, а в полупространстве Φ_- плоскость медленных движений вообще отсутствует. Эта особенность структуры фазового пространства и приводит к тому, что в этом случае для вырожденной системы в области $\dot{x}_1 > 0$ получаем двойственность, а в области $\dot{x}_1 < 0$ — отсутствие движения.

Таким образом, в случае $\sigma > 0$ при переходе к вырожденной системе быстрые движения оказываются существенными, и пренебрежение этими движениями приводит к дефектной математической модели.

В этом и заключается причина парадоксов Пэнлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пенлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат. 1954. 316 с.
2. *Бутенин Н. В.* Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 3–22.
3. *Ле Суан Ань.* О парадоксах Пэнлеве в системах с кулоновым трением // Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1988. № 425. С. 91–97.
4. *Фуфаев Н. А.* Теория движения систем с качением // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 56–65.

Горький

Поступила в редакцию 29.I.1990