**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991**

УДК 531.36

В. И. ГОНЧАРЕНКО

О ПОВЕДЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается линейная механическая система, подверженная действию диссипативно-ускоряющих, гироскопических, потенциальных и позиционных непотенциальных сил. Методом Метелицына [1] получены утверждения, сопоставимые с имеющимися результатами и отражающие новые факты. Доказан ряд утверждений об устойчивости неконсервативных систем. В частности, получена оценка на диссипативные силы, гарантирующие асимптотическую устойчивость неконсервативной системы, и показана стабилизируемость устойчивой неконсервативной системы произвольно малыми диссипативными силами определенной структуры. Пример иллюстрирует возможность разрушения устойчивости неконсервативной системы диссипативными силами и неприменимость теоремы Релея для неконсервативных систем.

1. Введение. Рассмотрим линейную механическую систему, стесненную стационарными геометрическими связями. Ее состояние относительно положения равновесия характеризуется обобщенными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Возмущенное движение такой системы описывается следующими уравнениями

$$Ax^{\cdot\cdot}+Dx^{\cdot}-Gx^{\cdot}+Fx-Ex=0 \tag{1.1}$$

Здесь матрицы A, D и F — симметрические, отвечающие инерционным, диссипативно-ускоряющим и потенциальным силам, матрицы G и E — кососимметрические, определяющие гироскопические и позиционные непотенциальные силы, $x=(x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор обобщенных координат. Все матрицы имеют порядок n. Матрица A предполагается положительно определенной.

Для такой системы $ADGFE$ (1.1) общего вида в [1] сформулирована проблема о влиянии «структуры сил» на устойчивость ее решения, предложен метод анализа и получены конструктивные результаты. Решение этой задачи содержится также в [2—11]. В данной работе на основании метода Метелицына [8, с. 220] получены заключения, которые сопоставляются с имеющимися результатами.

2. Метод Метелицына. Суть метода Метелицына состоит в следующем [1]. Пусть x единичный собственый вектор системы (1.1), соответствующий собственному значению $\mu=\varepsilon+i\omega$, т. е. $(A\mu^2+D\mu-G\mu+F-E)x=0$. Умножая это равенство слева на x^* (строку сопряженных координат вектора x), получаем

$$a\mu^2+(d-ig)\mu+f-ie=0 \tag{2.1}$$

Здесь $a=x^*Ax$, $d=x^*Dx$, $f=x^*Fx$, $g=-ix^*Gx$, $e=-ix^*Ex$ — действительные величины, которые, вообще говоря, неизвестны. Из соотношения (2.1) получаем

$$\begin{gathered}2a\mu=-(d-ig)\pm(y+iz)^{0,5}=\\=-(d-ig)\pm[(r+y)/2]^{0,5}\pm i[(r-y)/2]^{0,5}\\y=d^2-g^2-4af,\quad z=4ae-2dg,\quad r^2=y^2+z^2.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Из соотношения (2.2) вытекают: для системы AF — теорема Релея, для системы AE — теоремы 2 [2] и 1 [9], для системы AFE — теорема 4 [2] и заключение о справедливости «в целом» [5] теоремы Релея, т. е., если потенциальная система при добавлении позиционных непотенциальных сил не теряет устойчивости, то ее собственные значения остаются на мнимой оси, причем собственные частоты расположены в интервале частот исходной потенциальной системы: $\nu_1^2 \leqslant \omega^2 \leqslant \nu_n^2$.

Пусть матрица D положительно полуопределенная. В этом случае из (2.2) получено [1] условие асимптотической устойчивости решения системы (1.1):

$$ae^2 - dge < d^2 f \tag{2.3}$$

Справедливо достаточное условие неустойчивости

$$ae^2 - dge > d^2 f \tag{2.4}$$

Условие асимптотической устойчивости (2.3) при отсутствии гироскопических сил и положительно определенной матрице потенциальных сил принимает вид $d^2 > e^2 a/f$.

Теорема 1. Система $ADFE$ асимптотически устойчива, если минимальное собственное значение матрицы D превышает критическое значение $|e|/\nu_1$, то есть

$$d > |e|/\nu_1 \tag{2.5}$$

Отметим, что аналогичные оценки известны [10, 11]. На основании теоремы Бендиксона рассматриваемая система заведомо асимптотически устойчива при

$$d > [n(n-1)/2]^{0,5} e_*/\nu_1, \quad e_* = \max e_{ij} \tag{2.6}$$

Для системы $\ddot{x} + d\dot{x} + (F - E)x = 0$ (со скалярной матрицей D) условие (2.6) совпадает с приведенным в [5]. При $n=2$ оценка (2.5) совпадает с (2.6) и достижима при равных частотах $\nu_1 = \nu_2$ ($e_{12} \neq 0$). Действительно, в соответствии с (2.3) система устойчива при $d > |e_{12}|/\nu_1$, а в соответствии с (2.4) эта система неустойчива при $d < |e_{12}|/\nu_1$ и, в частности, при $d=0$.

3. Уточненные оценки. Оценку (2.5) можно улучшить, если система AFE устойчива. В этом случае обеспечивается асимптотическая устойчивость произвольно малым демпфированием при определенной структуре диссипативных сил.

Без уменьшения общности рассмотрим систему

$$\ddot{x} + d\dot{x} + (F - E)x = 0, \quad x \in R^n \tag{3.1}$$

Если при $d=0$ решение этой системы устойчиво, тогда собственные значения матрицы $F - E$ положительны. Если все собственные значения различны [1], то в некотором базисе система (3.1) расщепляется на независимые подсистемы

$$\ddot{x}_i + d\dot{x}_i + \nu_i^2 x_i = 0, \quad x_i \in R^1,$$

что обусловлено скалярным видом матрицы диссипативных сил.

Теорема 2. Если система (3.1) устойчива при $d=0$, то она асимптотически устойчива при $d>0$. (Это известно для частных случаев [3, 9].)

Доказательство. Пусть $\lambda_j = a_j + ib_j$ — собственные значения матрицы $F - E$. Если система (3.1) устойчива при $d=0$, то $a_j > 0$ и $b_j = 0$. Как установлено в [5], при $a_j > 0$ необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости решения системы (3.1) является выполнение соотношения $d^2 > b_j^2/a_j$. Поэтому при $d>0$ решение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

---

[1] Отказаться от этого условия позволяет теорема 6.17 [11].

Теорема доказана на основании леммы [5], полученной при определенных ограничениях. Этой лемме можно придать вид свободный от принятых ограничений.

Лемма. Для асимптотической устойчивости системы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы $a_j d^2 > b_j^2$, $j=1, \ldots, n$.

Из этой леммы следуют утверждения. 1) Если имеется $a_j<0$, то система (3.1) неустойчива. 2) Если $\operatorname{tr} F \leqslant 0$, то система (3.1) неустойчива. 3) Если $\operatorname{tr} F>0$, то имеется матрица E такая, что при любом положительном значении d система (3.1) асимптотически устойчива (на основании теоремы 4.2 [7]).

4. Пример. Рассмотрим систему

$$x^{\cdot\cdot} + \begin{Vmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{Vmatrix} x^{\cdot} + \begin{Vmatrix} f_1 & -e \\ e & f_2 \end{Vmatrix} x=0, \quad x\in R^2 \tag{4.1}$$

$$\lambda_j=a_j+ib_j=(f_1+f_2)/2\pm[(f_1-f_2)^2/4-e^2]^{0,5}$$

1) Если $d_1=d_2=d$, то (теорема 2) для любого положительного значения d система (4.1) асимптотически устойчива в области ($a_j>0$, $b_j=0$) на плоскости параметров f_1 и f_2 при $f_1+f_2>[(f_1-f_2)^2-4e^2]^{0,5}$, $|f_1-f_2|\geqslant 2|e|$, т. е. в области устойчивости системы (4.1) без демпфирования совместно с ее границей $|f_1-f_2|=2|e|$.

2) Если $d_1=d_2=0$ и система (4.1) устойчива, тогда $\lambda_j=\omega_j^2$. Примем для определенности $f_1>f_2$. Значит при минимально возможном значении $f_1=f_2+2|e|$ имеем $\omega_1^2=\omega_2^2=f_2+|e|$.

Отметим, что одна из частот с ростом f_1 монотонно убывает: $\omega_1\to f_2^{0,5}$, а вторая возрастает асимптотически приближаясь к $\omega=f_1^{0,5}$. Таким образом, для рассматриваемой системы теорема Релея не имеет места даже при произвольно малых неконсервативных силах. Этот факт доказан в общем случае [5].

3) Если $f_1>0$ и $f_2>0$, то решение системы (4.1) в соответствии с теоремой 1 асимптотически устойчиво при

$$\min d_j^2>e^2/\min f_j.$$

4) Если система устойчива при $d_1=d_2=0$, то при $d_1\neq d_2$ возможна потеря устойчивости. Действительно, если $d_2=1$, $f_1=9$, $f_2=0$, $e=3$, тогда система (4.1) неустойчива при $d_1<0{,}125$; устойчива при $d_1=0{,}125$ и асимптотически устойчива при $d_1>0{,}125$.

5. Пропорциональность матриц коэффициентов гироскопических и позиционных непотенциальных сил. Рассмотрим систему (1.1) при $E=\alpha G$:

$$Ax^{\cdot\cdot}+Dx^{\cdot}-Gx^{\cdot}+Fx-\alpha Gx=0 \tag{5.1}$$

Для такой системы установлен [4][2] ряд фактов, основную суть которых выражает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть в системе (5.1) параметр α удовлетворяет условию

$$0<\alpha<\alpha_*=\min\{\lambda : \det(A\lambda-D)=0\} \tag{5.2}$$

Если матрица F положительно полуопределенная, тогда решение системы (5.1) устойчиво, и асимптотически устойчиво, если к тому же положение равновесия изолированное.

Последнее условие теоремы заведомо выполнено в случаях: а) матрица потенциальных сил F положительно определенная, б) матрица гироскопических сил неособая. Отметим, что из неравенства Метелицына (2.3) устанавливается асимптотическая устойчивость решения системы (5.1) в обоих этих случаях, которые однако не исчерпывают все возможные.

Справедлива теорема о неустойчивости, являющаяся аналогом теоремы 3.

---

[2] *Гончаренко В. И.* Отдельные замечания к теоремам о структуре сил // Устойчивость процессов и их приложения. Киев, 1986. С. 8–14.– Деп. в ВИНИТИ 31.10.86. № 7501-В86.

Теорема 4. Если в системе (5.1) с положительно полуопределенными матрицами D и $(-F)$ положение равновесия изолированное, тогда ее решение неустойчиво при $\alpha<0$ и при $\alpha>\max\{\lambda : \det(A\lambda-D)=0\}$.

Эта теорема также включает в себя случаи неустойчивости, вытекающие из (2.4). Поэтому можно заключить, что теоремы 3 и 4 являются дальнейшим обобщением следствий из неравенства Метелицына [1].

Полученный результат в случае положительно определенной матрицы F можно усилить. Из неравенства Метелицына (2.3), по аналогии с [10, 11], следует, что система (5.1) асимптотически устойчива при условии

$$d>\alpha a/[0{,}5+(0{,}25+af/g^2)^{0,5}], \text{ то есть при}$$

$$0<\alpha<\alpha_*[0{,}5+(0{,}25+af/g^2)^{0,5}].$$

Последнее условие заведомо выполнено, если

$$0<\alpha<\alpha_*[0{,}5+(0{,}25+a_1f_1/g_n^2)^{0,5}] \tag{5.3}$$

где $a_1(f_1)$ — минимальное значение, а g_n — максимальное значение соответствующих величин (2.1).

Оценка (5.3) лучше приведенной выше (5.2) и переходит в последнюю при $f_1=0$, т. е. при положительно полуопределенной матрице потенциальных сил F. Отметим, что оценка (5.3) остается справедливой и при отсутствии гироскопических и позиционных непотенциальных сил.

В заключение отметим, что в данной статье подтверждена также ценность метода Метелицына [1], следствия из которого сопоставимы с более поздними результатами [2, 4, 5] [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31–34.
2. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1972. № 4. С. 87–90.
3. *Агафонов С. А.* Об асимптотической устойчивости неконсервативных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 3–8.
4. *Вербицкий В. Г.* Влияние структуры сил на устойчивость линейной системы // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 12. С. 119–121.
5. *Зевин А. А.* К теории линейных неконсервативных систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 386–391.
6. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 246–253.
7. *Лахаданов В. М.* О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.
8. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Гостехиздат, 1956. 299 с.
9. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
10. *Frik M.* Zur Stabilität nichtkonserwativer linearer Systeme // ZAMM. 1972. Bd. 52. H. 4. T47–T49.
11. *Müller P. Ch.* Stabilität und Matrizen: Matrizenverfahren in der Stabilitätstheorie linearer dynamischer Systeme. Berlin: Springer, 1977. 220 S.

Киев

Поступила в редакцию
10.III.1989

[3] См. указ. публ. на с. 46.