

УДК 521.12

© 1991 г.

Е. Ф. ТОМИЛИН

НОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЕРИГЕЛИЯ

«Вся трудность физики состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления», И. Ньютон. (Математические начала натуральной философии, 1687 г.)

В работе на примере задачи двух тел рассматривается гравитационное взаимодействие двух материальных точек, учитывающее скорость его распространения и относительную скорость материальных точек в инерциональной системе отсчета.

Полученный закон движения материальной точки объясняет наблюдаемое астрономами аномальное перемещение перигелия. Вычисленное вековое аномальное перемещение перигелия Меркурия, Венеры, Земли и Марса не выходит за погрешности наблюдений.

1. Краткая история проблемы аномального перемещения перигелия.

До середины XIX века казалось, что ньютоновым законом всемирного тяготения можно объяснить все движения небесных тел Солнечной системы. Однако, в 1859 г. французский астроном У. Леверье установил, что перигелий Меркурия имеет некоторую часть (39'') общего (566'') векового перемещения, не объяснимую возмущениями его орбиты ньютоновым тяготением небесных тел Солнечной системы, известных в то время. Это явление Леверье пытался объяснить материальной причиной — веществом между Солнцем и Меркурием (гипотетическая планета Вулкан), что не подтвердилось последующими наблюдениями.

С этого времени, необъяснимая часть общего перемещения перигелия стала называться аномальной, так как не объясняется законом тяготения Ньютона. В дальнейшем, этой проблеме суждено было сыграть важную роль в развитии наших представлений о характере сил, действующих в Солнечной системе, и о природе гравитационного взаимодействия. Так, в 1882 г., С. Ньюком [1] показал, что значение аномального перемещения перигелия Меркурия, найденное Леверье, следует увеличить до 43" в столетие.

Кроме Леверье, природу аномального перемещения перигелия Меркурия пытались объяснить многие ученые [2]. Здесь дополним такую информацию еще некоторыми исследованиями, когда при движении небесных тел полагалась скорость распространения гравитации (в дальнейшем — «скорость гравитации») конечной.

Идея конечной скорости распространения гравитационного действия имеется уже у Лапласа [3], который использовал модель притяжения двух тел, обусловленного гравитационной волной, втекающей в притягивающее тело. Он считал, что благодаря такому действию возможно появление эффекта абберации при движении тел. Применяя свою теорию к рассмотрению движения Луны вокруг Земли, он вычислил наблюдаемое ускорение среднего движения Луны, объяснить величину которого можно было бы ньютоновым тяготением, если принять скорость гравитационного действия, превышающей скорость света в 6 миллионов раз.

Р. Леман-Филе [4] исследовал движение планет при воздействии распространяющегося гравитационного действия со стороны движущегося Солнца. При этом использовалось тяготение, отличающееся от ньютоновского только величиной расстояния между Солнцем и планетой, которое бралось в предшествующий момент времени, определяемый запаздыванием тяготения. По его мнению, можно было бы таким образом оценить перемещение перигелия Меркурия, но он этого не сделал и не привел значения скорости распространения гравитационного действия.

Ф. Тиссеран [5] воспользовался законом Вебера из электродинамики как возможной замены закона всемирного тяготения в небесной механике. По формуле Вебера взаимодействие электрических зарядов в отличие от закона Кулона учитывает еще квадрат их скорости, ускорение и скорость света. После замены зарядов на массы, эта формула использовалась при рассмотрении движения Меркурия и было получено для векового аномального перемещения перигелия $13''$, вместо ожидаемых $43''$.

П. Гербер [6] интуитивно пришел к обобщенному ньютонову потенциалу, из которого с помощью уравнения Лагранжа получена сила

$$\frac{Gm_1m_2}{l^2} \left[1 - \frac{3}{c^2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \frac{6l}{c^2} \frac{d^2l}{dt^2} \right]$$

Очевидно, что при скорости близкой к c , эта сила меняет знак, что лишает ее первоначального физического смысла. Несмотря на эту некорректность, с помощью ее была получена (приблизенно) формула для аномального перемещения перигелия, за виток вокруг центра притяжения.

$$\varepsilon = 24\pi^3 a^2 / [T_1^2 c (1 - e^2)^2]$$

Через 17 лет эту же формулу опубликовал А. Эйнштейн [7] как экспериментальное подтверждение его общей теории относительности (ОТО). Однако вывод не был им доведен до конца, чтобы можно было бы убедиться в совпадении результатов разных теорий Гербера и Эйнштейна.

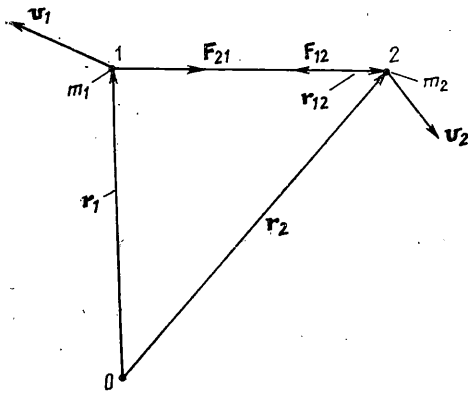
Следует еще заметить, что ОТО является бессиловой механикой, описывающей движение в четырехмерном неевклидовом пространстве по геодезическим линиям. А так как четырехмерное пространство — математическая абстракция и сила является причиной изменения скорости, то ОТО не может объяснить природу никакого явления движения!

2. Вывод общего выражения взаимодействия материальных точек. В небесной механике при расчетах движения небесных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними (материальные точки), пользуются законом всемирного тяготения Ньютона. В абсолютной системе единиц (СГС) этот закон имеет такой вид

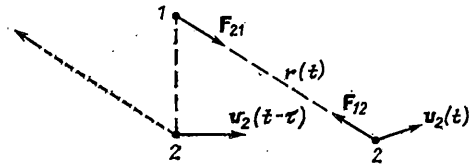
$$F = Gm_1m_2/l^2 \quad (1)$$

где F — сила тяготения (гравитация); m_1, m_2 — массы материальных точек; l — расстояние между материальными точками; G — постоянная тяготения, равная $6,672 < 10^{-8} \text{ г}^{-1} \text{ см}^3 \text{ с}^{-2}$.

Как уже упоминалось, неувязка теории, основанной на ньютоновом тяготении (1), с наблюдаемым движением планет была выявлена У. Леверье. В дальнейшем аналогичное расхождение между теорией и наблюдениями обнаружилось в движении и других планет и тем заметнее, чем больше была их орбитальная скорость [8]. Поэтому, естественно, с помощью закона тяготения (1) и не могло быть объяснено аномальное перемещение перигелия, так как в выражение (1) не входит скорость между взаимодействующими материальными точками. Кроме этой ограниченности закона (1), можно указать еще и на отсутствие в нем конечной скорости распространения гравитационного поля (силы). Следовательно, для:



Фиг. 1



Фиг. 2

более точного описания движения тел, нужно располагать взаимодействием, зависящим как от относительной скорости взаимодействующих тел, так и от скорости гравитации.

Переходя к выводу такого общего выражения взаимодействия, примем во внимание еще один опытный факт: во взаимном притяжении находятся все частицы тел Вселенной и, при этом, не обнаружено никакой гравитационной тени.

С одной стороны, это препятствует прямым методам измерения скорости гравитации, но, с другой стороны, позволяет вычислять взаимодействия любых тел, как суперпозицию сил их частиц, на которые могут быть разделены тела.

Значит, достаточно располагать взаимодействием двух движущихся точечных масс, чтобы находить взаимодействия любых нейтральных тел. Для установления такого универсального взаимодействия сначала рассмотрим фиг. 1, где изображены материальными точками 1 и 2 точечные массы m_1 и m_2 , движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Скорости материальных точек заданы в инерциальной системе отсчета (система координат и связанный с ней отсчет времени). При этом считается, что время t — непрерывное мировое (эфмеридное) и полагается независимой категорией. Положение материальных точек 1 и 2 в трехмерном пространстве определено векторами I_1 и I_2 соответственно, исходящими из общего начала отсчета O .

Сила, действующая на материальную точку 2 со стороны материальной точки 1, обозначена через F_{12} , а сила, действующая на материальную точку 1 со стороны материальной точки 2, обозначена через F_{21} . Как будет показано ниже, силы F_{12} и F_{21} (и при движении этих тел) всегда направлены по прямой, соединяющей точки 1 и 2, равны друг другу, но направлены противоположно. Теперь обратимся к фиг. 2, где в свете предыдущих соображений представлена возможная модель притяжения двух движущихся материальных точек, с помощью которой рассмотрим частные случаи.

Пусть обе материальные точки неподвижны. Тогда их взаимодействие описывается законом (1), а интерпретировать в физике его можно в виде воображаемой упругой силовой линии, соединяющей эти точки в пространстве по прямой линии. Разумеется, что при перемещении материальных точек будет также перемещаться и эта силовая линия. Если силовую эффективность характеризовать числом таких силовых линий, исходящих из материальной точки в единичном телесном угле, то легко видеть, что число силовых линий (сила), достигающих какое-либо тело в точке на-

блюдения, будет обратно пропорционально квадрату расстояния между этими материальными точками.

2. Теперь пусть будет материальная точка 1 неподвижной (центр притяжения), а материальная точка 2 приближается к ней под действием гравитации. Разумеется, скорость 2-й материальной точки будет возрастать до тех пор, пока на нее действует гравитация. А поскольку скорость гравитации конечна, то скорость материальной точки 2 будет асимптотически приближаться к скорости гравитации, а значит, одновременно с этим, и взаимодействие материальных точек будет также асимптотически стремиться к нулю. Эти предельные случаи движения тел можно описать, например, формулой

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \left(1 - \frac{v_2}{\Gamma} \right) \quad (2)$$

где Γ — скорость гравитации; v_2 — скорость материальной точки 2. К сему заметим, что прямые методы измерения скорости света (скорости распространения электрического воздействия) дают постоянное значение для скорости относительно источника света, независимо от его движения в пространстве (опыт Майкельсона). Распространим этот опытный факт и на гравитацию, так как, в противном случае, взаимодействие материальных точек не зависело бы от их скоростей.

Осталось рассмотреть последний случай, когда материальная точка 2 удаляется от неподвижной материальной точки 1. При этом в нашей интерпретации силовая линия должна растягиваться, а значит натяжение ее возрастет. Этот случай также можно описать формулой (2), если в ней изменить только знак у скорости, а именно

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \left(1 + \frac{v_2}{\Gamma} \right) \quad (3)$$

Распространим формулы (2) и (3) на любые промежуточные относительные скорости и одновременно учтем еще и запаздывание силы, обусловленное конечной величиной скорости гравитации. Тогда получим следующее математическое выражение:

$$F_{12}(t) = G \frac{m_1 m_2}{l^2(t)} \left[1 \mp \frac{v_2(t-\tau)}{\Gamma} \right] \quad (4)$$

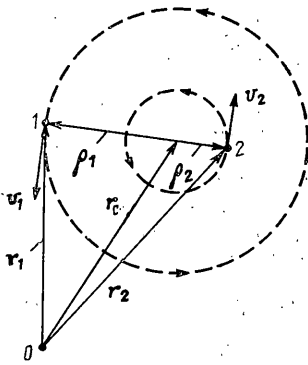
где знак минус соответствует сближению, а знак плюс — удалению; $\tau = l/\Gamma$ — запаздывание силы. Если материальные точки 1 и 2 поменять ролями, то придем к аналогичному выражению для силы их взаимодействия

$$F_{21}(t) = G \frac{m_1 m_2}{l^2(t)} \left[1 \mp \frac{v_1(t-\tau)}{\Gamma} \right] \quad (5)$$

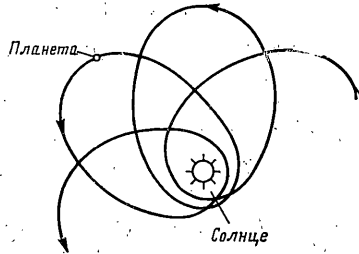
Теперь от этих частных случаев можно перейти к установлению выражения взаимодействия движущихся материальных точек, когда они либо сближаются, либо удаляются. Из формул (4) и (5) имеем

$$F_{12}(t) = -F_{21}(t) = -G \frac{m_1 m_2}{l^2(t)} \left[1 \mp \frac{v(t-\tau)}{\Gamma} \right] \frac{l_{12}(t)}{l_{12}(t)} \quad (6)$$

где v — относительная скорость между материальными точками. При произвольном движении материальных точек в трехмерном пространстве взаимодействие их также описывается формулой (6), если в ней относительную скорость выразить через радиальные составляющие скоростей материальных точек (тангенциальная же составляющая не изменяется



Фиг. 3



Фиг. 4

под действием центральной силы, а значит и не может оказывать обратного воздействия на центральную силу).

Выразив радиальные составляющие скоростей материальных точек через скалярное произведение вектора скорости на единичный радиус-вектор $\tilde{\Gamma} = l/l$, направленный от материальной точки к точке наблюдения, получим следующее общее выражение взаимодействия

$$F_{12}(t) = -F_{21}(t) = -G \frac{m_1 m_2}{l^2(t)} \left[1 - \frac{(v_1(t-\tau) \cdot l_{12}^{\sim}(t)) + (v_2(t-\tau) \cdot l_{21}^{\sim}(t))}{\Gamma} \right] \frac{l_{12}(t)}{l_{12}(t)} \quad (7)$$

где $(v_1(t-\tau) \cdot l_{12}^{\sim}(t))$ — скалярное произведение векторов $v_1(t-\tau)$, $l_{12}^{\sim}(t)$.

Так как скорость распространения воздействия постоянна относительно источника, то воздействие будет распространяться от одной материальной точки до другой всегда (для обеих материальных точек) за одинаковое время. Значит оба воздействия через время τ окажутся направленными по прямой, соединяющей материальные точки в этот момент времени, в согласии с третьим законом Ньютона.

Во многих задачах механики, запаздывание силы можно не учитывать, если, за время ее распространения, относительное изменение расстояния между телами будет пренебрежимо мало. Тогда, пренебрегая запаздыванием и опуская аргумент t (для сокращения записи), получим из (7) следующую окончательную формулу:

$$F_{12} = -F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{l^2} \left[1 - \frac{(v_1 \cdot l_{12}^{\sim}) - (v_2 \cdot l_{21}^{\sim})}{\Gamma} \right] \frac{l_{12}}{l_{12}} \quad (8)$$

Чтобы избежать недоразумений при применении формул (7) и (8), следует иметь в виду, что из физических соображений взаимодействие между материальными точками будет равно нулю при относительной скорости между ними, превышающей скорость распространения поля. Такие случаи могут встретиться при воздействии на них сторонних сил.

3. Задача двух тел. Для сравнения теории, основанной на взаимодействии двух движущихся материальных точек, с астрономическими наблюдениями рассмотрим невозмущенное движение планеты относительно (вокруг) Солнца как движение системы двух изолированных материальных точек 1 и 2, имеющих массы m_1 и m_2 соответственно и притягивающихся друг к другу с силой, описываемой законом тяготения (8).

В качестве системы координат системы отсчета возьмем систему центра масс, в которой положение тела 1 будем определять вектором ρ_1 , а положение тела 2 — вектором ρ_2 , как это показано на фиг. 3.

Как известно, в системе центра масс эти материальные точки и центр масс всегда находятся на одной прямой, проходящей через центр масс, и справедливы следующие соотношения:

$$\rho_1/\rho_2 = \dot{\rho}_1/\dot{\rho}_2 = \rho_1''/\rho_2'' = -m_2/m_1 \quad (9)$$

Теперь напишем уравнение движения материальной точки 1, используя второй закон Ньютона, фиг. 3 и формулу (8), где следует учитывать при переходе к системе центра масс следующие равенства и соответствие между первоначальными и новыми обозначениями

$$l_{12} \checkmark = -\rho_1 \hat{\checkmark}, \quad l_{21} \checkmark = -\rho_2 \checkmark, \quad v_1 \rightarrow \rho_1 \dot{\checkmark}, \quad v_2 \rightarrow \rho_2 \dot{\checkmark}, \quad l = \rho_1 + \rho_2 \quad (10)$$

Учитывая выражения (10), будем иметь дифференциальное уравнение движения материальной точки 1, зависящее от функций ρ_1 и ρ_2 :

$$m_1 \rho_1'' = - \frac{Gm_1 m_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \left[1 + \frac{(\rho_1 \dot{\checkmark} \cdot \rho_1)}{\rho_1 \Gamma} + \frac{(\rho_2 \dot{\checkmark} \cdot \rho_2)}{\rho_2 \Gamma} \right] \frac{\rho_1}{\rho_1} \quad (11)$$

Сокращая обе части равенства на m_1 и учитывая соотношения (9), уравнение (11) можно упростить, выразив его от одной функции ρ_1 :

$$\rho_1'' = - \frac{Gm_2 \rho_1}{(1 + m_1/m_2)^2 \rho_1^3} \left[1 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{(\rho_1 \dot{\checkmark} \cdot \rho_1)}{\rho_1 \Gamma} \right] \quad (12)$$

Для дальнейшего упрощения уравнения движения, выразим вектор ρ_1 через единичный вектор $\rho_1 \checkmark$: $\rho_1 = \rho_1 \rho_1 \checkmark$ и продифференцируем его по времени $\dot{\rho}_1 = \rho_1 \dot{\rho}_1 \checkmark + \rho_1 d\rho_1 \checkmark/dt$. Тогда, умножая $\rho_1 \dot{\checkmark}$ скалярно на ρ_1 , получим

$$(\rho_1 \dot{\checkmark} \cdot \rho_1) = \rho_1 \dot{\rho}_1 \quad (13)$$

где были учтены соотношения $\rho_1 \checkmark \cdot \rho_1 = \rho_1$, $\rho_1 \cdot d\rho_1 \checkmark/dt = 0$. Учитывая (13), получим из (12) окончательный вид векторного дифференциального уравнения, описывающего движение точечной массы 1:

$$\rho_1'' = - \frac{Gm_2 \rho_1}{(1 + m_1/m_2)^2 \rho_1^3} \left[1 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{\rho_1 \dot{\checkmark}}{\Gamma} \right] \quad (14)$$

Уравнение (14) умножим векторно на ρ_1 . Учитывая $\rho_1 \times \rho_1 = 0$, имеем

$$\rho_1'' \times \rho_1 = 0 \quad (15)$$

Векторное уравнение (15) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$x''y - xy'' = 0, \quad y''z - yz'' = 0, \quad z''x - zx'' = 0 \quad (16)$$

первые интегралы которых равны соответственно:

$$x \dot{\checkmark} y - x y \dot{\checkmark} = C_1, \quad y \dot{\checkmark} z - y z \dot{\checkmark} = C_2, \quad z \dot{\checkmark} x - z x \dot{\checkmark} = C_3 \quad (17)$$

Умножая первое из уравнений (17) на z , второе на x , третье на y и складывая их, получим уравнение плоскости $C_1 z + C_2 x + C_3 y = 0$.

Повернем в пространстве систему координат вокруг центра масс так, чтобы тела 1 и 2 были расположены в плоскости XOY . Тогда их координата z будет равна нулю, а из (17) останется интеграл

$$x \dot{\checkmark} y - x y \dot{\checkmark} = C_1 \quad (18)$$

Теперь векторное дифференциальное уравнение (14) можно заменить следующей системой из двух скалярных дифференциальных уравнений:

$$x'' = -R_x/\rho_1^3, \quad y'' = -R_y/\rho_1^3 \quad (19)$$

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2, \quad R = \frac{Gm_2}{(1+m_1/m_2)^2} \left[1 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{\rho_1}{\Gamma} \right]$$

Перейдем к полярным координатам ρ_1, φ по формулам:

$$x = \rho_1 \cos \varphi, \quad y = \rho_1 \sin \varphi \quad (20)$$

Подставляя полярные координаты (20) в равенство (18), получим

$$C_1 = -\rho_1^2 \ddot{\varphi} \quad (21)$$

Из (21) найдем вторую производную $\ddot{\varphi} = 2C_1 \dot{\rho}_1 / \rho_1^3$ и подставим ее, а также $\dot{\varphi}$, во вторые производные от x и y :

$$x'' = \rho_1'' \cos \varphi - 2\dot{\rho}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi - \rho_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \rho_1 \ddot{\varphi} \sin \varphi$$

$$y'' = \rho_1'' \sin \varphi + 2\dot{\rho}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi - \rho_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \rho_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi$$

В полярных координатах (20) система (19) примет такой вид

$$\rho_1'' \cos \varphi - C_1^2 \cos \varphi / \rho_1^3 = -R \cos \varphi / \rho_1^2, \quad \rho_1'' \sin \varphi - C_1^2 \sin \varphi / \rho_1^3 = -R \sin \varphi / \rho_1^2$$

После сокращения на $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, получим только одно дифференциальное уравнение и только от одной функции ρ_1 :

$$\rho_1'' = -R / \rho_1^2 + C_1^2 / \rho_1^3 \quad (22)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = Gm_2 / (1+m_1/m_2)^2, \quad B = Gm_2 / (1+m_1/m_2) \Gamma \quad (23)$$

Тогда уравнение (22), с учетом обозначений (23), представим в виде

$$\rho_1^3 \rho_1'' + B \rho_1 \dot{\rho}_1 + A \rho_1 - C_1^2 = 0 \quad (24)$$

которое описывает траекторию материальной точки 1.

Чтобы найти орбиту материальной точки 1, необходимо в уравнении (24) перейти от аргумента t к аргументу φ . Тогда, принимая во внимание зависимость $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$ и формулу (21), найдем

$$\rho_1 \dot{\rho}_1 = -\frac{C_1}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{d\varphi}, \quad \rho_1'' = \frac{C_1^2}{\rho_1^2} \left[-\frac{2}{\rho_1^3} \left(\frac{d\rho_1}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{d^2 \rho_1}{d\varphi^2} \right]$$

и подставим их в (24). В результате этого получим дифференциальное уравнение, в которое уже не входит время, в качестве аргумента

$$\rho_1 \frac{d^2 \rho_1}{d\varphi^2} = 2 \left(\frac{d\rho_1}{d\varphi} \right)^2 + \frac{B}{C_1} \rho_1 \frac{d\rho_1}{d\varphi} + \rho_1^2 - \frac{A}{C_1^2} \rho_1^3 \quad (25)$$

Делая последовательно подстановки

$$u = \rho_1^{-1}, \quad w = A/C_1^2 - u \quad (26)$$

преобразуем нелинейное дифференциальное уравнение (25) в линейное

$$w'' - Bw'/C_1 + w = 0 \quad (27)$$

Решение уравнения (27) ищем в виде экспоненты $w = W \exp(\gamma \varphi)$. Это дает нам соответствующее характеристическое уравнение $\gamma^2 - B\gamma/C_1 + 1 = 0$, корни которого равны

$$\gamma_{1,2} = B/2C_1 \pm \sqrt{(B/2C_1)^2 - 1}$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения (27) равно

$$w = \exp\left(\frac{B\varphi}{2C_1}\right) \left\{ W_1 \exp\left[\sqrt{\left(\frac{B}{2C_1}\right)^2 - 1}\varphi\right] + W_2 \exp\left[-\sqrt{\left(\frac{B}{2C_1}\right)^2 - 1}\varphi\right] \right\}$$

Ниже будет видно, что для планет выполняется $(B/2C_1) \ll 1$. Тогда, воспользовавшись формулой Эйлера $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, преобразуем найденное общее решение к более удобному виду

$$w = N \exp\left(\frac{B\varphi}{2C_1}\right) \cos\left[\sqrt{1 - \left(\frac{B}{2C_1}\right)^2} \varphi + \varphi_0\right] \quad (28)$$

где N и φ_0 — постоянные интегрирования. Решение (28) с учетом (26) позволяет найти орбиту материальной точки 1:

$$\rho_1 = C_1^2/A \left/ \left[1 - \frac{NC_1^2}{A} \exp\left(\frac{B\varphi}{2C_1}\right) \cos\left(\sqrt{1 - \left(\frac{B}{2C_1}\right)^2} \varphi + \varphi_0\right) \right] \right. \quad (29)$$

Теперь выберем постоянные интегрирования так, чтобы полярная ось системы координат была направлена в перигелий орбиты, при этом $\rho_1(0)$ будет минимальным (перигелий), если в (29) положить $\varphi_0 = \pi$. Затем, задавая начальную радиальную скорость $\dot{\rho}_1(0)$ и подставляя ее в формулу для ρ_1 , найдем из (29) и вторую постоянную интегрирования $N = 2\dot{\rho}_1(0)/B$.

Чтобы применить полученные результаты к движению планет, будем считать материальную точку 1 планетой, а материальную точку 2 Солнцем. При этом учтем, что законы Кеплера описывают движение планет относительно Солнца. Поэтому, чтобы сравнить теорию с астрономическими наблюдениями необходимо также иметь выражение орбиты планеты относительно Солнца. Для этого введем в формулу (29) расстояние между планетой и Солнцем, которое астрономы называют радиусом-вектором. Радиус-вектор ρ выразим через ρ_1 из соотношений (9):

$$|\rho_1 - \rho_2| = \rho = \rho_1(1 + m_1/m_2) \quad (30)$$

Подставляя ρ из (30) в формулу (29) и учитывая найденные постоянные интегрирования, получим уточненный первый закон Кеплера

$$\rho = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{C_1^2}{A} \left/ \left[1 + \frac{2C_1^2 \dot{\rho}_1(0)}{AB} \exp\left(\frac{B\varphi}{2C_1}\right) \cos\sqrt{1 - \left(\frac{B}{2C_1}\right)^2} \varphi \right] \right. \quad (31)$$

Закон движения материальной точки в задаче двух тел с тяготением (8) объясняет, как это видно из (31), наблюдаемую астрономами эволюцию орбиты планет, а именно: аномальное перемещение перигелия в направлении обращения планеты, так как в перигелии косинус равен единице (через угловое движение планеты), превышающее один оборот ее вокруг Солнца; уменьшение эксцентриситета орбиты с увеличением φ , так как $(B/2C_1) < 0$.

Используя формулу (31), найдем аномальное перемещение перигелия за юлианское столетие ($T = 36525$ суток). Очевидно, что при движении планеты от начала отсчета до следующего перигелия, аргумент косинуса должен увеличиться на 2π , т. е. должно иметь место условие

$$2\pi = \sqrt{1 - (B/2C_1)^2} (2\pi + \delta\pi)$$

где $\delta\pi$ — аномальное перемещение перигелия за один виток обращения планеты. Откуда получим такое равенство

$$\delta\pi = 2\pi L, \quad L = 1 / \sqrt{1 - \left(\frac{B}{2C_1}\right)^2} - 1$$

Обозначим через T_1 период обращения планеты (в сутках). Тогда вековое аномальное перемещение перигелия будет равно

$$\Delta\pi = 2\pi TL/T_1 \quad (32)$$

В астрономии принято приводить данные о среднем угловом движении планеты за столетие (n), в секундах дуги. Поэтому в формуле (32) T/T_1 будет равно частному от деления n на угол $360^\circ = 1296000''$. Примем во внимание еще такой факт, что вековое перемещение перигелия составляет всего лишь единицы секунд дуги. Поэтому умножим $\Delta\pi$ на число секунд дуги в радиане, равное $Q = 206264,8''$. Принимая все это во внимание, получим из формулы (32) $\Delta\pi'' = 2\pi nQL/1296000''$. Замечая, что $1296000''/Q = 2\pi$, сократим на 2π и придем к окончательной формуле для векового аномального перемещения перигелия

$$\Delta\pi'' = nL \quad (33)$$

Учитывая, что $(B/2C_1)^2 \ll 1$, и воспользовавшись разложением по формуле бинома Ньютона, получим из формулы (33) более удобную формулу:

$$\Delta\pi'' = \frac{n}{2} \left(\frac{B}{2C_1} \right)^2 \quad (34)$$

Раскроем формулу (34), обозначив массу Солнца m_2 через M_\odot , как это принято в астрономии, и подставим вместо B его выражение из (23), а вместо C_1 — из (21) и (30). В результате этого имеем

$$\Delta\pi'' = \frac{n}{2} \left[\frac{GM_\odot(1-m_1/M_\odot)}{2\Gamma\rho^2\varphi} \right]^2$$

где $GM_\odot = 132718 \cdot 10^{15} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$ — гелиоцентрическая постоянная. Вместо ρ возьмем среднее расстояние планеты от Солнца, равное aA_0 . Здесь a — большая полуось орбиты в астрономических единицах, а $A_0 = 149600 \cdot 10^6 \text{ м}$ — астрономическая постоянная. Вместо φ подставим среднюю угловую скорость за столетие, равную $n/QT \cdot 86400$, где 86400 — число секунд в сутках. Тогда, после несложных преобразований, получим рабочую формулу

$$\Delta\pi'' = \frac{1}{2n} \left[\frac{GM_\odot QT(1+m_1/M_\odot) \cdot 43200}{a^2 A_0 \Gamma} \right]^2 \quad (35)$$

Пренебрегая m_1/M_\odot и подставляя вместо Γ величину максимальной радиальной скорости небесных тел, вычисленную из красного смещения самых далеких галактик [9] и равную $60000 \pm 500 \text{ км/с}$, получим из (35) следующую формулу для вычисления векового аномального перемещения перигелия (в секундах дуги), через элементы орбиты

$$\Delta\pi'' = H/na^4, \quad H = (52 \pm 0,5) \cdot 10^7, \quad - \text{ в } (")^2 \quad (36)$$

Теперь рассмотрим эволюцию орбиты при уменьшении эксцентриситета. Как известно, в тяготении Ньютона (1) молчаливо подразумевается скорость гравитации бесконечной. Поэтому положим в формуле (31) $B=0$ что соответствует $\Gamma \rightarrow \infty$ по (23). В результате получим полярное уравнение эллипса, описывающее орбиту при тяготении (1):

$$\rho = (1+m_1/M_\odot)C_1^2/A \left/ \left(1 + \frac{2C_1^2\rho_1(0)}{AB} \cos\varphi \right) \right. \quad (37)$$

где эксцентриситет e равен следующему выражению: $2C_1^2\rho_1(0)/AB$. Аналогично, в формуле (31) следует считать при косинусе, как мгновенное

Планета	a	n	e
Меркурий	0,387 098	538 090 133''	0,205 624
Венера	0,723 331	210 659 636''	0,006 796
Земля	1,000 002	129 594 974''	0,016 730
Марс	1,523 688	689 036 35,8''	0,093 354

значение эксцентриситета, множитель при нем, а именно: $2C_1^2 \rho_1(0) / (AB) \exp(V\varphi/2C_1)$. При устремлении φ к бесконечности, эксцентриситет будет стремиться к нулю, а орбита из эллиптической перейдет в круговую радиуса

$$\rho_0 = (1 + m/M_\odot) C_1^2 / A \quad (38)$$

Как известно, орбиты планет близки к круговым: у Венеры $e=0,007$. Подставляя в (38) вместо C_1 и A их выражения в (21) и (23) соответственно, получим после несложных преобразований

$$Gm_1 M_\odot / \rho_0^2 = m_1 v_{10}^2 / \rho_{10} \quad (39)$$

где слева есть тяготение по Ньютону, а справа — центробежная сила. Здесь были учтены следующие равенства, верные для круговой орбиты:

$$\rho_0 = \rho_{10} + \rho_{20} = \rho_{10} (1 + m_1/M_\odot), \quad C_1 = -\rho_{10}^2 \dot{\varphi}_{10}, \quad v_{10} = \rho_{10} \dot{\varphi}_{10},$$

где v_{10} — круговая скорость. Из фиг. 3 видно, что период обращения планеты вокруг Солнца равен периоду обращения планеты вокруг центра масс. Учитывая это, получим $T_1 = 2\pi \rho_{10} / v_{10}$. Выразив отсюда v_{10} и подставив в (39), получим уточненный третий закон Кеплера

$$T_1^2 (M_\odot + m_1) / \rho_0^3 = 4\pi^2 / G \quad (40)$$

Теперь осталось сравнить теорию с опытом (наблюдениями). Как сообщается в [8], реально наблюдаемые невязки между наблюдениями и теорией, основанной на ньютоновом тяготении, произведения векового аномального перемещения перигелия на эксцентриситет для Меркурия, Венеры, Земли и Марса равны соответственно: $8,863 \pm 0,093''$; $0,057 \pm 0,033''$; $0,084 \pm 0,020''$; $0,100 \pm 0,025''$.

Разделив эти значения на эксцентриситеты орбит этих планет [10] (см. табл.), найдем следующие значения векового аномального перемещения перигелия для Меркурия, Венеры, Земли и Марса соответственно: $43,103 \pm 0,452''$; $8,387 \pm 4,856''$; $5,021 \pm 1,195''$; $1,075 \pm 0,200''$.

С другой стороны, если подставить в формулу (36) средние элементы орбит планет из этой же таблицы, то получим следующие теоретические значения векового аномального перемещения перигелия Меркурия, Венеры, Земли и Марса соответственно: $43,08 \pm 0,41''$; $9,03 \pm 0,09''$; $4,01 \pm 0,04''$; $1,20 \pm 0,01''$.

Осталось еще рассмотреть выбор постоянной «закона площадей» и нахождение траектории. Постоянная закона площадей определяется из формулы (31) заданными начальными условиями при $\varphi=0$, т. е. $\rho_1(0)$, $\dot{\rho}_1(0)$. Зная C_1 , можно определить по формуле (21) значение трансверсальной составляющей орбитальной скорости, равной $\rho_1(0) \cdot \dot{\varphi}(0)$.

Чтобы найти траекторию материальной точки, необходимо в формулу (21) подставить одно из двух линейно независимых решений уравнения (25), а затем проинтегрировать. Например, для γ_1 — одного из корней характеристического уравнения — имеем решение

$$\rho_1(\varphi) = 1 / [A/C_1^2 - \exp(\gamma_1 \varphi)]$$

которое, после подстановки в (21), дает дифференциальное уравнение

$$d\varphi/[A/C_1^2 - \exp(\gamma_1\varphi)]^2 = -C_1 dt$$

После простых преобразований и его интегрирования по частям, получим

$$t(\varphi) = \frac{C_1^2}{\gamma_1 A^2} \left[\ln \left(\frac{A}{C_1^2} - \exp(\gamma_1\varphi) - \frac{1}{1 - C_1^2/A \exp(\gamma_1\varphi)} - \gamma_1\varphi \right) \right]$$

Отсюда можно найти обратную функцию $\varphi(t)$, которая после подстановки в $\rho_1(\varphi)$ определит частную траекторию $\rho_1(t)$.

Физическая основа аномального перемещения перигелия объясняется тяготением (8), согласно которому сила притяжения между планетой и Солнцем при одном и том же расстоянии между ними зависит от их сближения или же удаления, в результате чего ветви орбиты (31) не будут симметричными относительно оси апсид.

С другой стороны, орбита (37) симметрична, так как по тяготению (1) сила притяжения не изменяется при приближении или удалении, а зависит только от расстояния между планетой и Солнцем.

Из сравнения полученных теоретических результатов с астрономическими наблюдениями видно, что они в пределах погрешностей. Следовательно, найденное взаимодействие материальных точек можно рекомендовать для дальнейших исследований в области гравитации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Newcomb S.* Discussion and results of observations on transits of Mercury from 1677 to 1881. Astr. Pap. am Ephem naut. Alm. Washington, 1882. V. 1. P. 367-487.
2. *Роузвер Н. Т.* Перигелий Меркурия от Леверье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985. 244 с.
3. *Laplace P. S.* Traité de Mecanique celeste. V. 4, Paris: Courcier, 1805. 430 p.
4. *Lemann-Filhes R.* Ueber die Bewegung eines Planeten unter der Annahme einer sich momentan fortpflanzenden Schwerkraft. Ast. Nachr. Berlin, 1885. Bd. 110. No. 2630.
5. *Tisserand F.* Traite mecanique celeste. V. 4. Paris: Gauthier-Vielars, 1896. 580 p.
6. *Gerber P.* Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation // Z. Math. Phys. 1898. S. 93-104. Bd. 43.
7. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 1. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1965. 700 с.
8. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968: 800 с.
9. *Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И.* Курс общей астрономии. М.: Наука, 1977. 543 с.
10. *Абалакин В. К.* Основы эфемеридной астрономии. М.: Наука, 1979. 448 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.11.1990