МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 531.383

Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ И ОРИЕНТАЦИИ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ПОКАЗАНИЯМ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БИНС ПОСРЕДСТВОМ РЕШЕНИЯ НА БОРТОВОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЕ КВАТЕРНИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается подход к определению географических координат и параметров ориентации объекта в инерциальной и во вращающейся опорной системах координат по текущим показаниям чувствительных элементов бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС), заключающийся в решении на бортовом вычислителе кватернионных уравнений движения гироскопических систем. В основе рассматриваемого подхода лежит известная [1, 2] динамическая аналогия невозмущаемых гироскопических систем и двухкомпонентных инерциальных навигационных систем.

В рамках предлагаемого подхода обсуждается применение для решения задач навигации и ориентации средствами БИНС прецессионных кватернионных уравнений движения гироскопического маятника, бигироскопной вертикали, двухроторной маятниковой гирорамы, пространственного гирогоризонткомпаса, полных кватернионных уравнений движения невозмущаемых гироскопических систем. Рассматриваемый подход позволяет предложить новые уравнения функционирования БИНС, обладающие свойствами уравнений тех или иных невозмущаемых или корректируемых гироскопических систем, позволяет использовать методы и результаты гироскопии для построения алгоритмов функционирования корректируемых БИНС. Использование кватернионов (параметров Родрига – Гамильтона) позволяет построить удобные с вычислительной точки зрения алгоритмы.

1. Рассмотрим применение для решения задач навигации и ориентации подвижных объектов по информации чувствительных элементов бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) кватернионных уравнений движения гироскопических систем, построенных следующим образом [3]. Гироскопы вместе с кожухами установлены на гирораме. Оси гироскопов вместе с кожухами могут поворачиваться относительно гирорамы, а также могут быть укреплены на ней неподвижно. Центры масс всех гироскопов неподвижны относительно гирорамы, а их оси собственного вращения могут располагаться в различных плоскостях. Гирорама установлена на платформе и имеет в общем случае относительно нее три степени свободы. Платформа жестко установлена на объекте, движущемся в инерциальном пространстве произвольным образом. Центр масс гирорамы не совпадает с ее точкой подвеса O.

При рассмотрении уравнений движения построенной таким образом гиросистемы будем использовать следующие системы координат: $O^*X_1^*X_2^*X_3^*(X^*)$ – инерциальная система координат, $OX_1X_2X_3(X)$ – система координат с началом в точке O подвеса гиросистемы, перемещающаяся относительно X^* поступательно (одноименные оси систем координат X и X^* полагаем параллельными), $OZ_1Z_2Z_3(Z)$ – сопровождающая (опорная) система координат, вращающаяся относительно X с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ$ (это может быть естественный трехгранник Дарбу, географический или какой-либо другой координатный трехгранник),

$OY_1Y_2Y_3(Y)$ — систеа координат, жестко связанная с гирорамой, $O\xi_1\xi_2\xi_3(\xi)$ — система координат, жестко связанная с платформой (объектом), $O\eta_1\eta_2\eta_3(\eta)$ — система координат, одна из осей которой направлена по вектору кинетического момента гиросистемы.

Введем в соответствии со схемами поворотов

$$
\begin{gathered}
X \xrightarrow{\mathbf{v},\,\omega^\circ} Z \xrightarrow{\lambda} \eta \xrightarrow{\mu} \xi \sim X \xrightarrow{\mathbf{e},\,\omega^*} \eta \xrightarrow{\mu} \xi \sim X \xrightarrow{\mathbf{s},\,\Omega} \xi \\
X \xrightarrow{\mathbf{v},\,\omega^\circ} Z \xrightarrow{\varkappa} Y \sim X \xrightarrow{\omega} Y
\end{gathered}
\qquad (1.1)
$$

кватернионы поворотов $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, характеризующие взаимную ориентацию указанных систем координат, а также векторы абсолютных $\boldsymbol{\omega}^\circ$, $\boldsymbol{\omega}^*$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ угловых скоростей этих систем координат.

Полагаем, что каждый из кватернионов $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ определен своими компонентами в базисе, преобразуемом этим кватернионом, т. е. является собственным кватернионом [4].

Движение гиросистемы будем рассматривать относительно поступательно перемещающейся системы координат X. Обозначим через $\mathbf{L}$ главный вектор моментов количеств этого движения гиросистемы, вычисленный относительно начала O системы координат X. Направим ось $O\eta_k$ системы координат η по вектору $\mathbf{L}$. Тогда $\mathbf{L}_\eta = L\mathbf{i}_k$, $L=|\mathbf{L}|$. Здесь и далее $\mathbf{i}_k$ ($k=1, 2, 3$) — орт гиперкомплексного пространства, запись вида $\mathbf{a}_\zeta$ означает отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис ζ ($\zeta = X, Y, Z, \eta, \xi$) [4].

Главный момент приложенных к гиросистеме внешних сил, вычисленный отнсительно точки O, обозначим через $\mathbf{M}$, а главный момент переносных сил инерции, вычисленный относительно той же точки,— через $\mathbf{M}''$. Сумма моментов $\mathbf{M}'+\mathbf{M}''$ связана с абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^*$ вращения системы координат η уравнениями

$$\boldsymbol{\omega}^* = L^{-1}\boldsymbol{\eta}_k \times (\mathbf{M}'+\mathbf{M}'') + \overset{*}{\omega}_{\eta_k}\boldsymbol{\eta}_k \qquad (1.2)$$

$$L^{\cdot} = \boldsymbol{\eta}_k \cdot (\mathbf{M}'+\mathbf{M}'') = M'_{\eta_k} + M''_{\eta_k} \qquad (1.3)$$

вытекающими из теоремы об изменении момента количеств относительного движения механической системы $d\mathbf{L}/dt = L^{\cdot}\boldsymbol{\eta}_k + L\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{M}'+\mathbf{M}''$. Здесь $\boldsymbol{\eta}_k$ — единичный вектор, имеющий направление вектора $\mathbf{L}$ (оси $O\eta_k$); $\overset{*}{\omega}_{\eta_k}$, M'_{η_k}, M''_{η_k} — проекции векторов $\boldsymbol{\omega}^*$, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$ на направление вектора $\mathbf{L}$ (ось $O\eta_2$), точка означает производную по времени t.

Используя (1.2), получаем уравнение для кватерниона $\mathbf{e}$, характеризующего ориентацию вектора $\mathbf{L}$ в инерциальной системе координат

$$2\mathbf{e}^{\cdot} = \mathbf{e} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta^* \qquad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_\eta^* = L^{-1}\mathbf{i}_k \times (\mathbf{M}_\eta' + \mathbf{M}_\eta'') + \overset{*}{\omega}_{\eta_k}\mathbf{i}_k \qquad (1.5)$$

Здесь и далее символ $\circ$ означает кватернионное умножение, производная от кватерниона вычисляется в предположении неизменности ортов гиперкомплексного пространства: $\mathbf{e}^{\cdot} = e_0^{\cdot} + e_1^{\cdot}\mathbf{i}_1 + e_2^{\cdot}\mathbf{i}_2 + e_3^{\cdot}\mathbf{i}_3$.

Главный момент переносных сил инерции $\mathbf{M}'' = m\mathbf{w} \times \mathbf{l}$, где m — масса гиросистемы, $\mathbf{w}$ — вектор абсолютного ускорения ее точки подвеса O, $\mathbf{l}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в центр масс гиросистемы.

Среди моментов внешних сил выделим момент сил тяготения гравитационного поля Земли. Будем считать, что эти силы приводятся к одной равнодействующей силе $\mathbf{F}$, приложенной в центре масс гиросистемы и направленной к центру Земли. Тогда $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{l} \times \mathbf{F}$, где $\mathbf{M}$ — главный момент относительно точки O других внешних сил, действующих на гиросистему (помимо сил тяготения).

Теперь сумму моментов всех сил, действующих на гиросистему, можно представить в виде

$$\mathbf{M}'+\mathbf{M}''=\mathbf{M}+m\mathbf{a}\times\mathbf{l},\ \mathbf{a}=\mathbf{w}-\mathbf{F}/m=\mathbf{w}-\mathbf{g} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор кажущегося ускорения точки подвеса гиросистемы, $\mathbf{g}$ — гравитационное ускорение.

С учетом (1.6) выражение (1.2) для абсолютной угловой скорости вращения системы координат η принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{m}{L}(\boldsymbol{\eta}_k\cdot\mathbf{l})\mathbf{a} - \frac{m}{L}a_{\eta_k}\mathbf{l}+\omega_{\eta_k}^*\boldsymbol{\eta}_k + \frac{1}{L}\boldsymbol{\eta}_k\times\mathbf{M} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{a}_{\eta_k}$ — проекция вектора $\mathbf{a}$ на ось $O\eta_k$ (направление вектора $\mathbf{L}$). Формула (1.5) для отображения вектора $\boldsymbol{\omega}^*$ на базис η преобразуется к виду

$$\omega_\eta^* = \left[\omega_{\eta_k}^* - \frac{m}{L}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{l})\right]\mathbf{i}_k - \frac{1}{L}\operatorname{vect}[(\mathbf{M}_\eta+m\mathbf{a}_\eta\circ\mathbf{l}_\eta)\circ\mathbf{i}_k] \tag{1.8}$$

где $\operatorname{vect}[\cdot]$ — векторная часть кватерниона $[\cdot]$.

В зависимости от назначения гиросистемы за счет выбора ее внутренней структуры обеспечивается выполнение одного из следующих двух условий, накладываемых на взаимную ориентацию векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{L}(\boldsymbol{\eta}_k)$: 1. $\mathbf{l}\|\mathbf{L}$ (структура гиромаятника), 2. $\mathbf{l}\perp\mathbf{L}$ (структура гирокомпаса [5]).

В первом случае $\mathbf{l}=-l\boldsymbol{\eta}_k$, $l=|\mathbf{l}|$ и выражение (1.7) для вектора $\boldsymbol{\omega}^*$ принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}^* = -\frac{ml}{L}\mathbf{a} + \left(\frac{ml}{L}a_{\eta_k}+\omega_{\eta_k}^*\right)\boldsymbol{\eta}_k + \frac{1}{L}\boldsymbol{\eta}_k\times\mathbf{M} \tag{1.9}$$

Задавая проекцию $\omega_{\eta_k}^*$ в соответствии с равенством

$$\omega_{\eta_k}^* = -(ml/L)a_{\eta_k} \tag{1.10}$$

из (1.9) имеем $\boldsymbol{\omega}^*=-(ml\mathbf{a}+\mathbf{M}\times\boldsymbol{\eta}_k)/L$.

Во втором случае выражение (1.7) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}^*=-mL^{-1}a_{\eta_k}\mathbf{l}+\omega_{\eta_k}^*\boldsymbol{\eta}_k+L^{-1}\boldsymbol{\eta}_k\times\mathbf{M} \tag{1.11}$$

Кватернионное уравнение (1.4), дополненное равенством (1.7) или (1.8) и скалярным уравнением

$$\dot{L}=m\boldsymbol{\eta}_k\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{l})+\boldsymbol{\eta}_k\cdot\mathbf{M} \tag{1.12}$$

вытекающим из (1.3), (1.6), описывает угловое движение вектора кинетического момента $\mathbf{L}$ гиросистемы относительно системы координат X, перемещающейся в инерциальном пространстве поступательно. Это уравнение записано в сопутствующей системе координат η [6], проекция $\omega_{\eta_k}^*$ абсолютной угловой скорости которой может быть задана произвольно. Она, например, может быть принята равной нулю (в этом случае η является астатической системой координат [6]), может быть задана в соответствии с равенством (1.10) и т. д. Параметры гиросистемы, ее структура и закон изменения момента $\mathbf{M}$ выбираются такими [6—9], чтобы вектор кинетического момента $\mathbf{L}$ гиросистемы (ее главная ось) был направлен с той или иной степенью точности вдоль одного из характерных направлений: по геоцентрической вертикали (в случае гиромаятника) или по горизонтальной прямой, образующей с направлением на север угол, равный скоростной девиации (в случае гирокомпаса).

Для ряда гиросистем (например, гирокомпасных) вектор $\mathbf{L}$ в рамках прецессионной теории гироскопов может считаться жестко связанным с гирорамой. Для таких гиросистем уравнения (1.4), (1.7), (1.12) будут характеризовать прецессионное движение гирорамы относительно системы координат X. Причем в случае, когда система координат η жестко связывается с гирорамой (т. е. полагается $\eta = Y$), величина $\overset{*}{\omega}_{\eta_k}$ является проекцией вектора абсолютной угловой скорости гирорамы на ось OY_k (т. е. $\overset{*}{\omega}_{\eta_k} = \omega_{Y_k}$), а потому не может быть задана произвольно. В этом случае указанные уравнения необходимо дополнять уравнением для проекции ω_{Y_k}, вид которого определяется рассматриваемой конкретной схемой гиросистемы.

Отметим, что для синтеза и исследования свойств движения гиросистемы в гироскопии, как правило, используются уравнения, описывающие движение гирорамы (или главной оси гиросистемы) не относительно поступательно перемещающейся системы координат X, а относительно системы координат Z, вращающейся в инерциальном пространстве по заданному закону (одна из осей этой системы координат направляется по геоцентрической вертикали). Для получения уравнений движения главной оси гиросистемы относительно системы координат Z в кватернионной форме перейдем в уравнении (1.4) к новой кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, описывающей ориентацию вектора $\mathbf{L}$ в этой системе координат. Используя равенство $\mathbf{e} = \boldsymbol{\nu} \circ \boldsymbol{\lambda}$, вытекающее из схемы поворотов (1.1), и учитывая кинематическое уравнение $2\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \circ \boldsymbol{\omega}_Z^{\circ}$, получим уравнение для кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$:

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\omega}_Z^{\circ} \circ \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta^* = 0 \tag{1.13}$$

которое необходимо дополнить соотношением (1.8) и уравнением (1.12).

Поскольку гиросистема предназначена для моделирования на борту движущегося объекта системы координат Z или какой-то одной ее оси, то уравнения (1.13), (1.8), (1.12) являются уравнениями ошибок гиросистемы. С их помощью могут быть исследованы методические и инструментальные ошибки гиросистемы, а также может быть решена задача синтеза гиросистемы, обладающей заданными свойствами (кватернион $\boldsymbol{\omega}_Z^{\circ}$ при этом полагается известной функцией времени). Кватернионные уравнения движения гиросистемы вида (1.13) рассматривались в рамках прецессионной теории гироскопов в [10].

Предположим, что на борту объекта расположена бесплатформенная инерциальная навигационная система, чувствительные элементы которой (гиротахометры и акселерометры) измеряют проекции Ω_{ξ_k} и a_{ξ_k} вектора $\boldsymbol{\Omega}$ абсолютной угловой скорости объекта и вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения точки O объекта на связанные с объектом координатные оси $O\xi_k$. Кватернион $\mathbf{s}$, характеризующий ориентацию объекта в инерциальной системе координат, удовлетворяет кинематическому уравнению

$$2\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi \tag{1.14}$$

Кватернионы $\mathbf{e}$, $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\mu}$ и отображения вектора $\mathbf{a}$ на базисы X, ξ, η связаны соотношениями

$$\mathbf{e} \circ \boldsymbol{\mu} = \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{e}} \circ \mathbf{s} \tag{1.15}$$

$$\mathbf{a}_X = \mathbf{s} \circ \mathbf{a}_\xi \circ \bar{\mathbf{s}}, \quad \mathbf{a}_\eta = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{a}_\xi \circ \bar{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{e}} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{a}_\xi \circ \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}} \circ \mathbf{a}_X \circ \mathbf{e} \tag{1.16}$$

Здесь и далее черта означает сопряженный кватернион.

Используя текущие показания чувствительных элементов БИНС (кватернионы $\boldsymbol{\Omega}_\xi$, $\mathbf{a}_\xi$) и формируя в соответствии с выбранной структурой гиросистемы момент $\mathbf{M}$, проекцию $\overset{*}{\omega}_{\eta_k}$ и вектор $\mathbf{l}$, характеризующий положение центра масс гиросистемы, можно интегрировать на бортовом вычислителе дифференциальные уравнения (1.14), (1.4), (1.8), (1.12), (1.15)—

(1.16) и тем самым математически моделировать на борту объекта по информации чувствительных элементов БИНС работу гиросистемы, точнее, ориентацию вектора кинетического момента гиросистемы в инерциальной системе координат X^*. В результате интегрирования получаются кватернионы $\mathbf{s}$, $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\mu}$. Кватернионы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{e}$ характеризуют ориентацию объекта и вектора $\mathbf{L}$ в инерциальной системе координат, а кватернион $\boldsymbol{\mu}$ — ориентацию объекта в системе координат η, связанной с вектором $\mathbf{L}$. Так как система координат η моделирует трехгранник, связанный с геоцентрической вертикалью, то через компоненты кватерниона $\mathbf{e}$ могут быть найдены географические координаты местоположения объекта (широта и долгота), через компоненты кватерниона $\boldsymbol{\mu}$ — крен и тангаж объекта, а через компоненты кватернионов $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — его географический курс.

Таким образом, задачи навигации и ориентации подвижных объектов можно решать по информации чувствительных элементов БИНС, интегрируя на бортовом вычислителе кватернионные уравнения движения гироскопических систем. Как известно [2], традиционное решение задачи инерциальной навигации основывается на двукратном интегрировании ньютоновских уравнений движения чувствительной массы пространственного акселерометра (материальной точки) по известным проекциям кажущегося ускорения объекта и его абсолютной угловой скорости. Рассматриваемый подход позволяет предложить новые уравнения функционирования БИНС, обладающие свойствами уравнений движения тех или иных невозмущаемых или корректируемых гироскопических систем, позволяет использовать методы и результаты гироскопии для построения алгоритмов функционирования корректируемых БИНС, алгоритмов комплексных систем, включающих в свой состав невозмущаемые гироскопические системы и БИНС. Использование кватернионов (параметров Родрига — Гамильтона) позволяет построить удобные с вычислительной точки зрения алгоритмы.

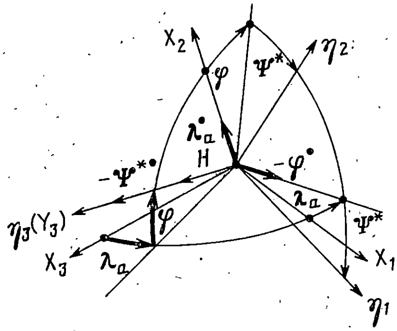
2. Рассмотрим более подробно применение для решения задач навигации и ориентации подвижных объектов по информации чувствительных элементов БИНС кватернионных уравнений прецессионного движения гироскопических систем.

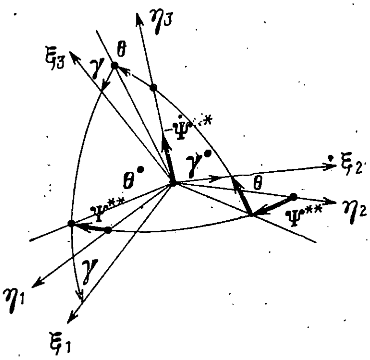
В соответствии с основным допущением прецессионной теории гироскопов будем считать, что $\mathbf{L}=\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — собственный кинетический момент гиросистемы, равный геометрической сумме кинетических моментов отдельных гироскопов в их собственном вращении. В этом случае уравнения (1.4), (1.8), (1.12) описывают прецессионное движение оси собственного кинетического момента (главной оси) гиросистемы относительно системы координат X, перемещающейся в инерциальном пространстве поступательно [10].

2.1. Предположим, что вектор $\mathbf{H}$ собственного кинетического момента гиросистемы сохраняет свое направление относительно гирорамы неизменным и направлен по ее оси OY_3. Кроме того, будем считать, что центр масс гиросистемы лежит на отрицательной части оси $OY_3(O\eta_3)$: $\mathbf{l}=-l\boldsymbol{\eta}_3$. Таким образом, рассматриваем первый случай взаимной ориентации векторов $\mathbf{L}=\mathbf{H}$ и $\mathbf{l}$, указанный в п. 1. К такого рода гиросистемам относится гироскопический маятник [6, 9], главная ось которого $O\eta_3$ моделирует с некоторой степенью точности геоцентрическую вертикаль OZ_3. Уравнения прецессионного движения главной оси таких гиросистем, записанные в сопутствующей системе координат η, получаются из уравнений (1.4), (1.9), (1.12), если в них положить $L=H$, $k=3$, и имеют вид

$$2\mathbf{e}^{\cdot}=\mathbf{e}\circ\boldsymbol{\omega}_\eta^*,\quad H^{\cdot}=M_{\eta_3} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\eta^*=\left(\omega_{\eta_3}^*+\frac{ml}{H}a_{\eta_3}\right)\mathbf{i}_3-\frac{ml}{H}\mathbf{a}_\eta-\frac{1}{H}\mathbf{M}_\eta\times\mathbf{i}_3 \tag{2.2}$$





Здесь величина $\mathbf{M}$ является корректирующим моментом (или суммой корректирующего и возмущающего моментов).

В сопутствующей системе координат η, для которой $\omega_{\eta_3}{}^*$ задается равенством (1.10): $\omega_{\eta_3}{}^* = -(ml/H)a_{\eta_3}$, уравнения (2.1), (2.2) прецессионного движения главной оси гиросистемы типа гиромаятника можно записать в более удобном виде

$$2\mathbf{e}^{\bullet} = \boldsymbol{\omega}_X{}^* \circ \mathbf{e}, \quad H^{\bullet} = M_{\eta_3} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\omega}_X{}^* = -\frac{ml}{H}\mathbf{a}_X - \frac{1}{H}(\mathbf{M}\times\boldsymbol{\eta}_3)_X \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\omega}_X$, $\mathbf{a}_X$, $(\cdot)$ — отображения векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}$ и $(\cdot)$ на инерциальный базис.

В случае, когда $\mathbf{M}\|\mathbf{H}$ $(\mathbf{M} = M_{\eta_3}\boldsymbol{\eta}_3)$, уравнения (2.3), (2.4) принимают вид

$$2\mathbf{e}^{\bullet} = -(ml/H)\mathbf{a}_X \circ \mathbf{e}, \quad H^{\bullet} = M_{\eta_3} \tag{2.5}$$

В случае отсутствия корректирующего момента $(\mathbf{M}=0)$ имеем

$$2\mathbf{e}^{\bullet} = -(ml/H)\mathbf{a}_X \circ \mathbf{e}, \quad H = \text{const} \tag{2.6}$$

Отметим, что уравнения ошибок гиросистем типа гиромаятника, соответствующие их уравнениям идеального функционирования (2.3), (2.4), имеют вид [10]:

$$2H\boldsymbol{\lambda}^{\bullet} + (H\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ} + lm\mathbf{a}_Z + H^{\bullet})\circ\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{M}_{\eta}\circ\mathbf{i}_3, \quad H^{\bullet} = M_{\eta_3} \tag{2.7}$$

Здесь кватернион $\mathbf{a}_Z$, как и кватернион $\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ}$, полагается известной функцией времени.

Приведем один из вариантов уравнений идеального функционирования БИНС, основанный на использовании кватернионных уравнений прецессионного движения главной оси гиромаятника. Схемы поворотов координатных трехгранников η и ξ приведены на фигуре. Углы λ_a и φ, задающие ориентацию главной оси гиромаятника, направленной в случае отсутствия методических и инструментальных погрешностей гиромаятника по геоцентрической вертикали, являются абсолютной долготой и геоцентрической широтой. Углы $\Psi = \Psi^* + \Psi^{**}$, ϑ, γ являются в этом случае географическим курсом, тангажом и креном объекта. Определение координат местоположения и углов ориентации объекта по информации чувствительных элементов БИНС может быть осуществлено следующим образом.

По информации гиротахометров (измеренным проекциям Ω_{ξ_k} абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним оси $O\xi_k$) вычисляются с помощью интегрирования кватернионного кинематического уравнения (1.14) параметров Родрига — Гамильтона s_j $(s=\overline{0,3})$, характеризующие ориентацию объекта в инерциальной системе координат X^*.

С помощью первого соотношения (1.16) производится пересчет показаний акселерометров (проекций $a_{\xi k}$ кажущегося ускорения $\mathbf{a}$) от связанных осей $O\xi_k$ к инерциальным X_k^*:

$$\mathbf{a}_X=\mathbf{s}\circ\mathbf{a}_\xi\circ\bar{\mathbf{s}} \tag{2.8}$$

Интегрируются уравнения прецессионного движения главной оси гиромаятника (2.3), (2.4) (параметры гиромаятника и корректирующий момент $\mathbf{M}$ полагаются заданными). В результате интегрирования находятся параметры Родрига — Гамильтона e_j $(j=\overline{0,3})$, характеризующие ориентацию оси гиромаятника в инерциальной системе координат. Тем самым математически моделируется с некоторой степенью точности вертикаль местоположения объекта.

По формулам (u — угловая скорость вращения Земли):

$$\begin{gathered}\sin\varphi=2(e_2e_3-e_0e_1),\ \operatorname{tg}\lambda_a=(e_1e_3+e_0e_2)/(e_0^2+e_3^2-0{,}5)\\ \operatorname{tg}\Psi^*=-(e_1e_2+e_0e_3)/(e_0^2+e_2^2-0{,}5),\ \lambda=\lambda_a-ut\end{gathered} \tag{2.9}$$

находятся геоцентрическая широта φ, долгота λ местоположения объекта и угол Ψ^*.

Вычисляется кватернион μ, характеризующий ориентацию объекта относительно системы координат η, связанной с главной осью гиромаятника

$$\mu=\bar{\mathbf{e}}\circ\mathbf{s} \tag{2.10}$$

Вычисляются тангаж ϑ, крен γ и географический курс Ψ объекта

$$\begin{gathered}\sin\vartheta=2(\mu_2\mu_3+\mu_0\mu_1),\ \operatorname{tg}\gamma=-(\mu_1\mu_3-\mu_0\mu_2)/(\mu_0^2\mu_3^2-0{,}5)\\ \operatorname{tg}\Psi^{**}=(\mu_1\mu_2-\mu_0\mu_3)/(\mu_0^2+\mu_2^2-0{,}5),\ \Psi=\Psi^*+\Psi^{**}\end{gathered} \tag{2.11}$$

Уравнения (1.14), (2.3), (2.4), (2.8)—(2.11) образуют замкнутую систему уравнений идеального функционирования БИНС, в состав которой входят уравнения прецессионного движения гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона. Для построения оптимальных алгоритмов функционирования БИНС необходимо сравнить предлагаемые уравнения с уравнениями идеального функционирования БИНС, содержащими уравнения прецессионнного движения гиромаятника в углах Эйлера — Крылова и в направляющих косинусах. Необходимо также рассмотрение вопросов оптимального выбора параметров гиромаятника и построения корректирующих моментов.

Отметим, что при отсутствии корректирующих моментов ($\mathbf{M}=0$) ось гиромаятника моделирует вертикаль лишь с некоторой степенью точности. Известно [6], что при произвольном движении объекта (точки подвеса гиромаятника) по поверхности невращающейся сферы радиуса R, концентрической с Земным шаром, с абсолютной скоростью $\mathbf{v}$ ось невозмущаемого гиромаятника отклоняется от вертикали в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{v}$, на угол $\alpha(t)=-(lm/H)v(t)$. Для исключения этой (скоростной) погрешности в гироскопической технике используется бигироскопная вертикаль [6, 9], содержащая два одинаковых гиромаятника, роторы которых вращаются в противоположные стороны. Биссектриса угла между осями роторов гироскопов (главная ось бигироскопной вертикали) при этом будет направлена по геоцентрической вертикали, а сам угол в известном масштабе воспроизводит величину скорости v.

Скоростная погрешность является (при $\mathbf{M}=0$) основной методической погрешностью предлагаемого решения задачи определения координат местоположения и ориентации объекта средствами БИНС по уравнениям

(1.14), (2.3), (2.4), (2.8)–(2.11). Эта погрешность может быть исключена алгоритмически с помощью математического построения на бортовом вычислителе по информации чувствительных элементов БИНС главной оси бигироскопной вертикали. В основе математического построения главной оси бигироскопной вертикали лежит интегрирование (при определенных начальных условиях) двух кватернионных уравнений вида (2.5), отличающихся лишь знаками правых частей.

2.2. Для решения задач навигации и ориентации объекта по информации чувствительных элементов БИНС могут быть использованы не только прецессионные уравнения движения гиросистем типа гиромаятника, но и прецессионные уравнения движения гирокомпаса. В случае гирокомпаса вектор $\mathbf{H}$ его собственного кинетического момента жестко связан с гирорамой (гиросферой) [6, 7, 9]. Направим вдоль этого вектора ось OY_2 системы координат Y, жестко связанной с гиросферой. Центр масс гиросферы лежит на отрицательной части оси OY_3: $\mathbf{l}=-l\mathbf{y}_3$. Таким образом, для гирокомпаса, как уже отмечалось в п. 1, имеет место второй случай взаимной ориентации векторов $\mathbf{L}=\mathbf{H}$ и $\mathbf{l}$.

Систему координат η совместим с Y, т. е. жестко свяжем с гиросферой. Тогда $\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}$ и кватернион $\mathbf{e}$ будет характеризовать ориентацию гиросферы в инерциальной системе координат. Система координат $\eta(Y)$ в невозмущенном движении гиросферы совпадает (при движении объекта по поверхности невращающейся сферы, концентрической с земным шаром) с трехгранником Дарбу, а ее ось $O\eta_3(OY_3)$ направлена по геоцентрической вертикали OZ_3.

Прецессионные уравнения движения гиросферы гирокомпаса относительно системы координат X, перемещающейся в инерциальной системе координат поступательно, в кватернионной записи получаются из уравнений (1.4), (1.11), (1.12), если в них положить $L=H$, и $k=2$, имеют вид

$$2\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{e}\circ\boldsymbol{\omega}_\eta{}^*=\mathbf{e}\circ\boldsymbol{\omega}_Y,\ H^{\boldsymbol{\cdot}}=mla_{Y_1}+M_{Y_2} \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{\omega}_Y=(M_{Y_3}/H)\,\mathbf{i}_1+\omega_{Y_2}\mathbf{i}_2+[(mla_{Y_2}-M_{Y_1})/H]\,\mathbf{i}_3 \tag{2.13}$$

где m – масса гиросферы, l – ее маятниковость, a_{Y_k} – проекция кажущегося ускорения точки подвеса гиросферы (точки O объекта) на связанную с ней осью OY_k; M_{Y_k} – проекция на ту же ось OY_k момента внешних сил, действующих на гиросферу (помимо сил тяготения); ω_{Y_2} – проекция абсолютной угловой скорости гиросферы на ее ось OY_2.

Уравнения (2.12), (2.13) необходимо дополнить уравнением для проекции ω_{Y_2}. Для двухроторной маятниковой гиросферы [6, 7, 9]:

$$H=2B\cos \mathrm{E},\ \omega_{Y_2}=-N/(2B\sin \mathrm{E}) \tag{2.14}$$

где $2\mathrm{E}$ – угол между осями роторов гироскопов, поворачивающихся относительно гиросферы в разные стороны на одинаковые углы; $B=\mathrm{const}$ – собственный кинетический момент гироскопа (гироскопы полагаются идентичными); N – разность сумм моментов заданных сил относительно осей кожухов гироскопов (параллельных оси OY_3), являющаяся функцией угла E.

Для пространственного гирогоризонткомпаса [6, 7, 9] $\omega_{Y_2}=H/(mlR)$, $M_{Y_k}=0$ $(k=\overline{1,3})$, где R – расстояние от точки O до центра Земли.

Поэтому уравнения его прецессионного движения принимают вид

$$\begin{gathered}2\mathbf{e}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{e}\circ\boldsymbol{\omega}_Y,\quad h^{\boldsymbol{\cdot}}=a_{Y_1}\\ \boldsymbol{\omega}_Y=\frac{h}{R}\,\mathbf{i}_2+\frac{a_{Y_2}}{h}\,\mathbf{i}_3,\quad h=H/(ml)\end{gathered} \tag{2.15}$$

Интегрирование на бортовом вычислителе прецессионных уравнений движения двухроторной маятниковой гиросферы (2.12)—(2.14) (для $M_{Y_k}=0$, заданных параметров m, l и заданном моменте N) или прецессионных уравнений движения пространственного гирогоризонткомпаса (2.15) (расстояние R при этом полагается известным) по информации чувствительных элементов БИНС (с учетом связи $\mathbf{a}_\eta=\mathbf{a}_Y=\mathbf{e}\circ\mathbf{s}\circ\mathbf{a}_\xi\circ\mathbf{s}\circ\mathbf{e}$) позволяет математически моделировать на борту объекта трехгранник $\eta=Y$, материализуемый на объекте в случае установки на его борту гирокомпаса или пространственного гирогоризонткомпаса. Определение координат местоположения и углов ориентации объекта через компоненты кватернионов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{s}$ (кватернион $\mathbf{s}$ находится интегрированием уравнения (1.14)) может быть проведено так, как это было описано в п. 2.1.

В отличие от трехгранника η, математически моделируемого по уравнениям прецессионного движения гиромаятника, трехгранник $\eta=Y$, математически моделируемый по уравнениям прецессионного движения гирокомпаса, совпадает (при движении объекта по поверхности сферы, концентрической с земным шаром) с трехгранником Дарбу, т. е. геоцентрическая вертикаль моделируется в этом случае без методической погрешности.

Отметим, что для повышения точности решения задач навигации и ориентации необходимо введение корректирующих моментов M_{Y_k}. Их построение может быть проведено методами гироскопии.

3. Для построения алгоритмов функционирования БИНС могут быть использованы не только уравнения прецессионного движения гиросистем, но и их полные уравнения. При этом целесообразно использовать кватернионную форму уравнений движения гиромаятниковой системы относительно системы координат X, перемещающейся в инерциальном пространстве поступательно [11]:

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+(^1/_2nL)^2\mathbf{z}=-^1/_2nml\mathbf{z}\circ(a_{Y_2'}\mathbf{i}_1-a_{Y_1'}\mathbf{i}_2)+^1/_2n\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}$$

$$(^1/_2nL)^2=z_0^{\cdot 2}+z_1^{\cdot 2}+z_2^{\cdot 2}+z_3^{\cdot 2} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{z}$ — кватернион, характеризующий ориентацию в инерциальном пространстве системы координат Y', ось OY_3' которой направлена по приборной вертикали (оси OY_3 гирорамы), n — параметр гиросистемы, выбираемый из условий ее невозмущаемости, $a_{Y_k'}$ — проекция кажущегося ускорения точки подвеса гиросистемы на ось OY_k'.

Квартернионным уравнением (3.1) описывается угловое движение в инерциальной системе координат приборной вертикали гиромаятниковой системы, вектор собственного кинетического момента гироскопов которой удовлетворяет известным условиям невозмущаемости [5—8]. Используемая при этом система координат Y' вращается относительно гирорамы (системы координат Y) вокруг приборной вертикали (оси OY_3) с угловой скоростью $\mathbf{u}=-(1-nI_3)\omega_{Y_3}\mathbf{y}_3$, где I_3 — момент инерции гирорамы относительно оси OY_3. Эта система координат в невозмущенном движении гиросистемы, соответствующем определенным начальным условиям движения, $\mathbf{M}=0$ и определенному значению параметра n, совпадает с азимутально свободным трехгранником, а ее ось $OY_3'=OY_3$ — с геоцентрической вертикалью. Поэтому интегрирование на бортовом вычислителе уравнений (3.1) по информации чувствительных элементов БИНС, используемой так, как это было описано в п. 2.1 (при этом роль трехгранника η играет трехгранник Y'), позволяет математически построить геоцентрическую вертикаль местоположения объекта и решить задачи навигации и ориентации объекта.

Использование уравнений (3.1) позволяет построить уравнения функционирования БИНС, обладающие свойствами полных уравнений невозмущаемых или корректируемых (для сформированных надлежащим образом корректирующих моментов **M**) гиросистем. Кроме того, использование уравнений (3.1) позволяет предложить для математического построения на борту объекта геоцентрической вертикали уравнения в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) элементах, которые целесообразно использовать для решения задач навигации в тех случаях, когда кажущееся ускорение объекта мало, например, для решения задач космической навигации.

В заключение отметим, что уравнения ошибок ((1.13), (2.7) и др.) и инструментальные погрешности предлагаемых решений навигационной задачи, обусловленные погрешностями акселерометров Δa_{ξ_k} и гиротахометров $\Delta\Omega_{\xi_k}$, имеют структуру, отличную от структуры уравнений ошибок и инструментальных погрешностей традиционного решения, что может приводить к более медленному накоплению инструментальных погрешностей БИНС. Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев В. Д., Блюмин И. Д., Девянин Е. А., Климов Д. М.* Обзор развития теории гироскопических и инерциальных навигационных систем // Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука, 1973. С. 33–72.
2. *Андреев В. Д., Девянин Е. А.* Автономные инерциальные навигационные системы // Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука, 1973. С. 307–321.
3. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
4. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
5. *Блюмин Г. Д., Жбанов Ю. К., Кошляков В. Н.* Гироскопические компасы // Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука, 1973. С. 253–284.
6. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
7. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
8. *Климов Д. М.* Механика невозмущаемых гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 57–65.
9. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1966. 400 с.
10. *Челноков Ю. Н.* О применении кватернионов в прецессионной теории гироскопов // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 3–10.
11. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные методы в задачах относительного движения динамически симметричных материальных систем. II // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 23–31.

Балаково

Поступила в редакцию
23.X.1989