МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 531.38

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ СВЯЗКИ ДВУХ ТЕЛ, ПЛАВАЮЩЕЙ В ЖИДКОСТИ

Исследуются вертикальные колебания в жидкости связки двух твердых тел, одно из которых представляет собой вертикальный цилиндрический поплавок, плавающий на взволнованной поверхности жидкости, а другое, произвольной формы, прикреплено с помощью упругой связи к поплавку и полностью погружено в жидкость. Система моделирует широко распространенные в технике объекты. Сведения о линейных колебаниях упругомассовых систем с двумя степенями свободы, близких к рассматриваемой, имеются в [1]. Обстоятельные исследования нелинейных вынужденных колебаний двухмассовых систем выполнены в [2]. В [3–6] изучена динамика поплавков, а в [7] приведены теоретические модели плавающих многомассовых систем.

В публикуемой работе методами теории абсолютной устойчивости [8, 9] получено условие абсолютной устойчивости упругой связки двух тел, гарантирующих существование у нее стационарных эргодических случайных режимов колебаний, если таковыми являются возмущающие воздействия, обусловленные волнами на поверхности жидкости. Полученный результат имеет существенное значение для статистического моделирования на ЭВМ динамики рассматриваемой механической системы. Задача решена для достаточно широкого класса функций, аппроксимирующих гидродинамическое сопротивление нижнего тела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую связку тел, погруженную в жидкость, свободная поверхность которой совершает некоторые волновые движения (регулярные или случайные). Начало O неподвижной системы координат разместим на свободной поверхности невзволнованной жидкости, а ось Ox, вдоль которой колеблются тела связки, направим по нисходящей вертикали. Из гидродинамических сил, действующих на поплавок, учтем восстанавливающую, демпфирующую и инерционную силы, а главной и дифракционной частями возмущающих сил пренебрежем, что допустимо в случае тел малых размеров по сравнению с длиной волн на поверхности жидкости [10]. При этих предположениях уравнения вынужденных колебаний связки, вызванных изменением уровня свободной поверхности жидкости, запишутся в виде [6, 7] (массой и гидродинамическим сопротивлением упругой связи пренебрегаем):

$$m_1x_1^{\cdot}+kx_1+(\rho gS+c_0)x_3-c_0x_4=\rho gS\zeta+k\zeta^{\cdot}$$
$$m_2x_2^{\cdot}+f(x_2)-c_0(x_3-x_4)=0,\ x_3^{\cdot}=x_1,\ x_4^{\cdot}=x_2 \qquad (1.1)$$

Здесь x_1, x_2 — абсолютные скорости, а x_3, x_4 — смещения относительно положения равновесия в спокойной жидкости поплавка и нижнего тела соответственно, k — коэффициент гидродинамического сопротивления поплавка, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, S — площадь горизонтального сечения поплавка, c_0 — жесткость упругой связи, m_1, m_2 — суммы массы и присоединенной массы поплавка и нижнего тела соответственно, $f(x_2)$ — взятая с противоположным знаком сила гидродинамического сопротивления нижнего тела, ζ — смещение по вертикали уровня свободной поверхности жидкости в месте расположения поплавка.

В дальнейшем функция $f(x_2)$ считается непрерывной, определенной при $-\infty<x_2<\infty$ и удовлетворяющей условиям

$$x_2 f(x_2)>0,\ f(0)=0 \tag{1.2}$$

Этим условиям подчиняются, в частности, широко применяемые аппроксимации сил сопротивления вида [2, 11]:

$$f(\sigma)=\alpha\sigma,\quad f(\sigma)=\alpha|\sigma|\sigma,\quad f(\sigma)=\alpha\sigma^{2r}\operatorname{sign}\sigma,\quad f(\sigma)=\sum_n \alpha_n|\sigma|^{n-1}\sigma$$

где σ — скорость колебаний соответствующего объекта α, α_n — некоторые коэффициенты, r — целое положительное число.

Таким образом, система уравнений (1.1) относится к классу нелинейных нестационарных систем четвертого порядка с нелинейностью, удовлетворяющей условиям (1.2). С целью изучения свойств колебаний, описываемых этими уравнениями, рассмотрим укороченную систему (1.1) и представим ее в стандартном виде [8, 9]:

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}\varphi(\sigma),\ \sigma=\mathbf{c}^T\cdot\mathbf{x} \tag{1.3}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{x}=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix}a_{11}&0&a_{13}&a_{14}\\0&0&a_{23}&a_{24}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{Vmatrix}0\\1\\0\\0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{Vmatrix}0\\1\\0\\0\end{Vmatrix},\quad \varphi(\sigma)=\frac{f(\sigma)}{m_2} \tag{1.4}$$

Сопоставляя уравнения (1.1) и (1.3) с учетом (1.4), получаем соотношения

$$a_{11}=-k/m_1,\ a_{13}=-(\rho gS+c_0)/m_1,\ a_{14}=c_0/m_1,\ a_{23}=c_0/m_2,\ a_{24}=-c_0/m_2$$

из которых следуют очевидные неравенства

$$a_{11}<0,\ a_{13}<0,\ a_{14}>0,\ a_{23}>0,\ a_{24}=-a_{23},\ a_{13}+a_{14}<0 \tag{1.5}$$

Кроме того, из (1.2) и (1.4) видно, что функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma\varphi(\sigma)>0,\ \varphi(0)=0 \tag{1.6}$$

Задача формулируется следующим образом: найти условия, которым должны удовлетворять элементы a_{ij} матрицы A, чтобы все решения системы (1.3) были ограниченными, ее тривиальное решение было устойчивым по Ляпунову и для произвольного ее решения выполнялось соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=\mathbf{0} \tag{1.7}$$

какова бы ни была функция $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющая условиям (1.6). Систему (1.3), обладающую перечисленными свойствами, в дальнейшем, следуя [8], будем называть абсолютно устойчивой.

Абсолютная устойчивость укороченной системы (1.3) гарантирует существование стационарных эргодических случайных режимов колебаний связки двух тел, если таковыми являются внешние входные воздействия системы (1.1) [8]. Задача решается методом гиперустойчивых систем [9]. (В терминологии работы [9] абсолютно устойчивые системы называются асимптотически абсолютно устойчивыми.)

2. Гиперустойчивость вспомогательной системы уравнений. Поставим в соответствие исходной системе уравнений (1.3) вспомогательную систему уравнений вида

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=A\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}\mu(t) \tag{2.1}$$

с интегральным соотношением

$$\eta(0,t_1)=\int_0^{t_1}\mu\left(\sigma+\varkappa\frac{d\sigma}{dt}\right)dt,\quad \sigma=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}(t) \tag{2.2}$$

где $\mu(t)$ — некоторая функция, $\varkappa>0$ — неопределенный пока параметр, t — время. Очевидно, при

$$\mu(t)=-\varphi[\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}(t)] \tag{2.3}$$

решения системы (2.1) совпадают с решениями системы (1.3). Кроме того, в силу непосредственно проверяемых неравенств (с учетом (1.5) и (2.3)):

$$\int_0^{t_1}\mu\sigma\,dt\leqslant 0,\quad \int_0^{t_1}\varkappa\mu\frac{d\sigma}{dt}dt\leqslant\psi[\sigma(0)],\quad \psi(\sigma)=\int_0^{\sigma}\varphi(y)dy$$

для всех решений системы (2.1) имеет место оценка

$$\eta(0,t_1)\leqslant\psi[\sigma(0)],\quad (\psi[\sigma(0)]\geqslant 0,\quad \lim_{\sigma\to 0}\psi(\sigma)=0) \tag{2.4}$$

при любых $t_1\geqslant 0$. Из результатов работы [9] следует, что если система (2.1), (2.2) гиперустойчива, то при выполнении оценки (2.4) исходная система (1.3) имеет ограниченные решения, а ее тривиальное решение устойчиво по Ляпунову. Таким образом, вопрос об устойчивости и ограниченности решений системы (1.3) сводится к вопросу о гиперустойчивости системы (2.1), (2.2).

Введем в рассмотрение характеристическую функцию системы (2.1), (2.2), которая в данном случае представима в виде [9]:

$$\chi(\lambda,\ \nu)={}^1/_2[\gamma(\lambda)+\gamma(\nu)]+{}^1/_2\varkappa[\lambda\gamma(\lambda)+\nu\gamma(\nu)] \tag{2.5}$$

где λ, ν — комплексные переменные, $\gamma(\nu)=\mathbf{c}^T\cdot(\nu E-A)^{-1}\cdot\mathbf{b}$ — передаточная функция системы (1.3), E — единичная матрица 4-го порядка. Свойство гиперустойчивости системы (2.1), (2.2) равносильно выполнению следующих условий: 1) вектор $\mathbf{b}\neq 0$; 2) характеристическая функция $\chi(\lambda,\ \nu)$ не равна тождественно нулю; 3) для некоторой линейной функции $\mu(t)=-\varphi_0\sigma$, $\varphi_0>0$, все решения уравнения (2.1) удовлетворяют соотношениям

$$\eta(0,t_1)\leqslant 0\quad \forall t_1\geqslant 0,\quad \lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=0 \tag{2.6}$$

(условие минимальной устойчивости); 4) при любых вещественных ω, для которых $\det(i\omega E-A)\neq 0$, имеет место неравенство

$$\chi(-i\omega,\ i\omega)\geqslant 0,\quad i=(-1)^{1/2} \tag{2.7}$$

(частотный критерий).

Условие 1) выполняется в силу (1.4). Подставив (1.4) в формулу для передаточной функции, находим, что

$$\gamma(\nu)=\frac{\nu(\nu^2-a_{11}\nu-a_{13})}{\nu^4-a_{11}\nu^3+(a_{23}-a_{13})\nu^2-a_{11}a_{23}\nu-a_{23}(a_{13}+a_{14})} \tag{2.8}$$

Используя это выражение для определения характеристической функции (2.5), убеждаемся в том, что $\chi(\lambda,\ \nu)\neq 0$ и, следовательно, выполнено второе условие.

3. Минимальная устойчивость вспомогательной системы. Покажем, что система (2.1), (2.2) минимально устойчива. Для выполнения условий (2.6) достаточно, чтобы была асимптотически устойчивой система (2.1) в случае линейной функции $\mu(t)$ [9]. Подставив в (2.1) выражение $\mu(t)=-\varphi_0 c^T\cdot x$, $\varphi_0>0$, приходим к линейной системе уравнений вида

$$\mathbf{x}^{\cdot}=(A-\varphi_0\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}^T)\cdot\mathbf{x} \tag{3.1}$$

Характеристическое уравнение системы (3.1) будет следующим

$$\lambda^4-(a_{11}-\varphi_0)\lambda^3-(a_{13}-a_{23}+a_{11}\varphi_0)\lambda^2-(a_{11}a_{23}+a_{13}\varphi_0)\lambda-a_{23}(a_{13}+a_{14})=0 \tag{3.2}$$

где λ — комплексная переменная величина. Все коэффициенты уравнения (3.2) положительны, поскольку имеют место соотношения (1.5) и $\varphi_0>0$. Применяя теорему Гурвица, убеждаемся в том, что матрица коэффициентов линейной системы (3.1) является гурвицевой и, следовательно, система (3.1) асимптотически устойчива. Условие минимальной устойчивости (2.6) выполнено.

Аналогичным путем можно убедиться в том, что матрица A также является гурвицевой. Это обстоятельство будет использовано в дальнейшем.

4. Частотный критерий. Для проверки частотного критерия подставим выражение (2.8) в (2.5) и положим $\lambda=-i\omega$, $\nu=i\omega$. После некоторых преобразований находим, что соотношение (2.4) равносильно неравенству

$$z^3+(2a_{13}-a_{23}+a_{11}^2)z^2+[a_{13}^2-(2a_{13}+a_{14}+a_{11}^2)a_{23}]z-$$
$$-a_{23}[\varkappa^{-1}a_{11}a_{14}+a_{13}(a_{13}+a_{14})]\geqslant 0 \tag{4.1}$$

где обозначено $z=\omega^2$. Положим

$$\varkappa=-a_{11}a_{14}/[a_{13}(a_{13}+a_{14})] \tag{4.2}$$

Величина $\varkappa$ положительна в силу (1.5). Подставив (4.2) в (4.1), получаем неравенство

$$z[z^2+(2a_{13}-a_{23}+a_{11}^2)z+(a_{13}^2-2a_{13}a_{23}-a_{14}a_{24}-a_{11}^2a_{23})]\geqslant 0 \tag{4.3}$$

Дискриминант D квадратного трехчлена относительно z в (4.3) имеет вид

$$D=4a^1{}_3(a_{11}^2+a_{23})+a_{23}(4a_{14}+2a_{11}^2+a_{23})+a_{11}^4 \tag{4.4}$$

Если $D<0$, то выражение в скобках в (4.3) положительно при любых z и, поскольку $z=\omega^2$, неравенство (4.3) выполняется при $-\infty<\omega<\infty$. Определитель $\det(i\omega E-A)$ отличен от нуля для всех ω, так как матрица A является гурвицевой. Таким образом, достаточным критерием выполнения условия (2.7), а следовательно, и гиперустойчивости системы (2.1), (2.2) является, как видно из (4.4), соотношение

$$4a_{13}(a_{11}^2+a_{23})+a_{23}(4a_{14}+2a_{11}^2+a_{23})+a_{11}^4<0 \tag{4.5}$$

Возможны и другие соотношения между параметрами a_{ij}, приводящие к удовлетворению условий (4.3), однако здесь они не рассматриваются, поскольку не представляют практического интереса.

5. Асимптотическая устойчивость. Гиперустойчивость системы (2.1), (2.2) обеспечивает лишь устойчивость исходной системы (1.3). Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости исходной системы (1.3), когда имеет место предельное соотношение (1.7). Введем в рассмотрение функцию $\pi(i\omega)=\det(-i\omega E-A)\det(i\omega E-A)\chi(-i\omega, i\omega)$.

Как показано в [9], для асимптотической устойчивости гиперустойчивой системы (2.1), (2.2) достаточно, чтобы существовал такой промежуток времени $0\leqslant t\leqslant T_0$, в котором уравнение (2.1) не имеет решений вида

$$\mathbf{x}(t)=\sum_j \mathbf{v}_j e^{i\omega_j t},\quad \max_j(\|\mathbf{v}_j\|)\neq 0 \tag{5.1}$$

где ω_j — нули функции $\pi(i\omega)$, $\mathbf{v}_j$ — постоянные четырехмерные векторы, $\|\mathbf{v}_j\|=(v_{j1}^2+\ldots+v_{j4}^2)^{1/2}$. Покажем, что указанный промежуток времени существует.

Так как матрица A — гурвицева, $\det(-i\omega E-A)\neq 0$, $\det(i\omega E-A)\neq 0$ и, следовательно, нули функции $\pi(i\omega)$ совпадают с нулями функции $\chi(-i\omega, i\omega)$, а значит и полинома, стоящего слева в неравенстве (4.3). При условии (4.5) этот полином имеет единственный корень $\omega_1=0$.

Допустим теперь, что указанного промежутка $0\leqslant t\leqslant T_0$ для уравнения (2.1) не существует. Тогда в любом промежутке $[0, T_0]$ должно существовать в соответствии с (5.1) решение вида

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}_1=\mathrm{const}\neq\mathbf{0} \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (2.1) и учитывая, что $\mu(t)=-\varphi(\mathbf{c}^T\cdot\mathbf{x})$, получаем уравнение для определения вектора $\mathbf{v}_1$:

$$A\mathbf{v}_1=\mathbf{b}\varphi(\mathbf{c}^T\cdot\mathbf{v}_1) \tag{5.3}$$

Из (1.5) следует, что $\det A=-a_{23}(a_{13}+a_{14})\neq 0$. Умножив обе части равенства (5.3) на обратную матрицу A^{-1}, приходим к соотношению $\mathbf{v}_1=A^{-1}\cdot\mathbf{b}\varphi(\mathbf{c}^T\cdot\mathbf{v}_1)$, откуда с помощью (1.5) получаем следующие выражения для компонент v_{1j} $(j=\overline{1,4})$ вектора $\mathbf{v}_1$:

$$v_{11}=0,\ v_{12}=0,\ v_{13}=a_{14}\varphi(v_{12})/[a_{23}(a_{13}+a_{14})],\ v_{14}=-a_{13}\varphi(v_{12})/[a_{23}(a_{13}+a_{14})]$$

Поскольку $v_{12}=0$, а по условию (1.6) $\varphi(0)=0$, находим из этих выражений, что вектор $\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$. Таким образом, допустив существование отличного от нуля постоянного вектора $\mathbf{v}_1$, пришли к выводу, что он равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что существует промежуток времени $0\leqslant t\leqslant T_0$, на котором уравнение (2.1) не имеет решений вида (5.1), откуда следует асимптотическая устойчивость вспомогательной системы (2.1), (2.2) в рассматриваемом классе функций $\varphi(\sigma)$ (1.5) при ограничениях на параметры (4.5).

Итак, плавающая в жидкости упругая связка двух тел обладает свойством абсолютной устойчивости, если ее параметры удовлетворяют неравенству (4.5). В этом случае при стационарности и эргодичности жидкости, этими же свойствами будут обладать и выходные параметры связки, т. е. координаты и скорости тел, ее составляющих [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике./Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 352 с.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во Иностр. лит., 1961. 777 с.
3. *Сретенский Л. Н.* О затухании вертикальных колебаний центра тяжести плавающих тел // Тр. ЦАГИ. 1937. Вып. 310. С. 1–12.
4. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Колебания твердого тела на поверхности раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 34–40.
5. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Нестеров С. В., Чайковский А. А.* Численно-аналитическое исследование колебаний твердого тела на границе раздела двух жидкостей // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 59–66.
6. *Золотенко Г. Ф.* Колебания и дрейф вертикального цилиндра, плавающего на волнении // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 55. С. 13–17.
7. *Berteaux H. O.* Buoy Engineering. New-York; et aee: Wiley, 1976. 309 p.
8. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости. // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М.: Наука, 1975. С. 74–180.
9. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. 453 с.
10. *Семенов-Тян-Шанский В. В., Благовещенский С. Н., Холодилин А. Н.* Качка корабля. Л.: Судостроение, 1969. 392 с.
11. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Киев

Поступила в редакцию 18.IV.1989