

УДК 531.38

© 1991 г.

Т. А. ДОБРИНСКАЯ

**О НЕКОТОРЫХ РЕЖИМАХ
ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ, ПОДВЕШЕННОГО НА СТЕРЖНЕ**

Уравнения перманентных вращений твердого тела произвольной конфигурации, подвешенного в произвольной точке на струне, были получены в [1]. В [2] и в целом ряде последующих работ изучалось решение этих уравнений для случая осесимметричного тела. Исследован также случай неосесимметричного тела, подвешенного в точке, лежащей на одной из главных центральных осей инерции [3–4]. Для тела произвольной формы, подвешенного в произвольной точке, в [1, 5] были найдены режимы движения, при которых одна из главных центральных осей инерции тела занимает вертикальное положение.

В настоящей работе проанализированы возможные режимы перманентных вращений для такого способа подвеса неосесимметричного тела, при котором точка крепления стержня расположена в плоскости, проходящей через две главные центральные оси инерции тела, не находясь, вообще говоря, ни на одной из этих осей.

В работе рассмотрено также несколько частных режимов перманентных вращений твердого тела произвольной формы, подвешенного в произвольной точке.

1. Рассматривается твердое тело массы m , подвешенное на абсолютно жестком невесомом стержне длиной l . Стержень прикреплен к телу в точке O_2 и к неподвижной точке O_1 с помощью двух идеальных шаровых шарниров (фиг. 1).

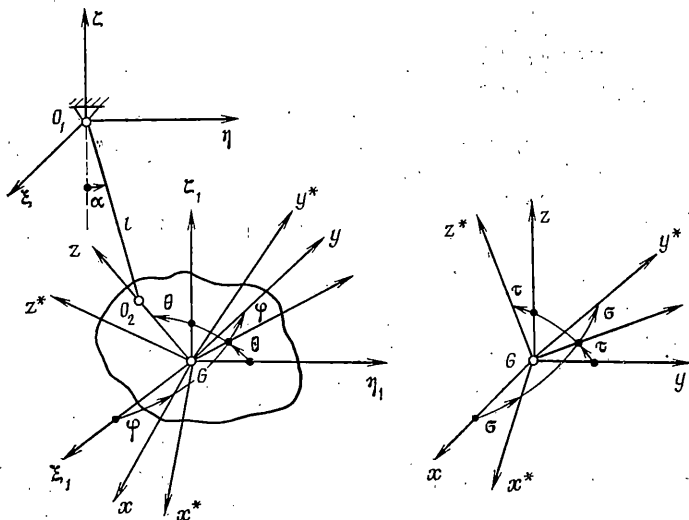
Исследуемые перманентные вращения представляют собой движения, при которых тело и стержень как одно жесткое целое вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси ζ неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ (фиг. 1).

Уравнения этих движений могут быть представлены в виде [1]:

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \mu \sin \theta) \cos \alpha - \nu \sin \alpha = 0 \\ & (A - B) [\sin \sigma (\cos \varphi \cos \theta \cos \tau - \sin \theta \sin \tau) + \sin \varphi \cos \theta \cos \sigma] \times \\ & \quad \times [\sin \sigma (\sin \theta \cos \varphi \cos \tau + \cos \theta \sin \tau) + \sin \theta \sin \varphi \cos \sigma] + \\ & + (C - B) [(\cos \varphi \cos \theta \sin \tau + \sin \theta \cos \tau) (\sin \theta \cos \varphi \sin \tau - \cos \theta \cos \tau)] + \\ & + mal (\sin \alpha + \mu \sin \theta) \cos \theta - mal \nu \sin \theta = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$(A - B) (\cos \varphi \cos \sigma - \sin \varphi \sin \sigma \cos \tau) [\sin \sigma (\sin \theta \cos \varphi \cos \tau + \cos \theta \sin \tau) + \sin \theta \sin \varphi \cos \sigma] + (C - B) \sin \varphi \sin \tau (\cos \theta \cos \tau - \sin \theta \cos \varphi \sin \tau) = 0$$

где $\nu = g/\omega^2 l$, $\mu = a/l$, a — расстояние от точки O_2 до центра масс тела G , g — ускорение свободного падения. Углы σ и τ определяют положение точки подвеса стержня O_2 в системе координат $Gx^*y^*z^*$, где оси x^* , y^* , z^* направлены по главным центральным осям инерции тела; A , B , C ($A \neq B \neq C$) — моменты инерции тела относительно осей x^* , y^* , z^* соответственно; α — угол отклонения стержня от неподвижной вертикали ζ ; θ — угол отклонения оси z , проходящей через точку O_2 и центр масс тела G ,



Фиг. 1

от вертикальной оси ξ_1 , системы координат $G\xi_1\eta_1\xi_1$; φ — угол, определяющий поворот тела вокруг оси z (фиг. 1).

Изменение углов φ , θ , α будем рассматривать в следующих интервалах: $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Отрицательные значения углов φ и θ не учитываются, поскольку из анализа (1.1) видно, что они не приводят к появлению новых режимов. Углы σ и τ достаточно рассматривать в интервалах $0 < \sigma < \pi/2$, $0 < \tau < \pi/2$, так как другие интервалы изменения этих углов также не приводят к исследованию новых режимов.

Укажем несколько частных решений системы (1.1), допускающих простое аналитическое описание.

В соответствии с (1.1) существуют режимы перманентных вращений, при которых ось z , соединяющая точку подвеса тела O_2 и его центр масс G , совпадает с вертикалью, не проходящей через неподвижную точку подвеса стержня O_1 , и режимы, при которых ось z занимает горизонтальное положение.

В первом случае $\sin \theta = 0$ ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$) (фиг. 2) и, исходя из третьего и второго уравнения (1.1), получим

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{[(A-B)\sin^2 \sigma - (C-B)] \cos \tau}{(A-B) \sin \sigma \cos \sigma} \quad (1.2)$$

$$\sin \alpha = \sin \tau (mal)^{-1} = \{[(C-B) - (A-B)\sin^2 \sigma]^2 \cos^2 \tau + (A-B)^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma\}^{1/2} \quad (1.3)$$

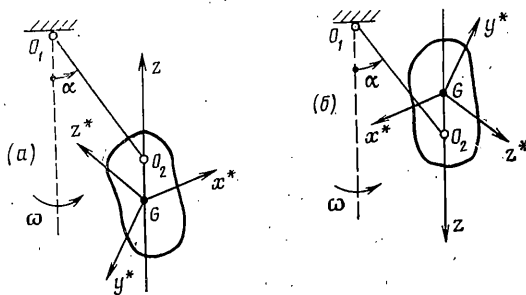
где условие $|\sin \alpha| \leq 1$ накладывает ограничение на соотношение геометрических и инерционных параметров

$$mal \geq \sin \tau \{[(C-B) - (A-B)\sin^2 \sigma]^2 \cos^2 \tau + (A-B)^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma\}^{1/2} \quad (1.4)$$

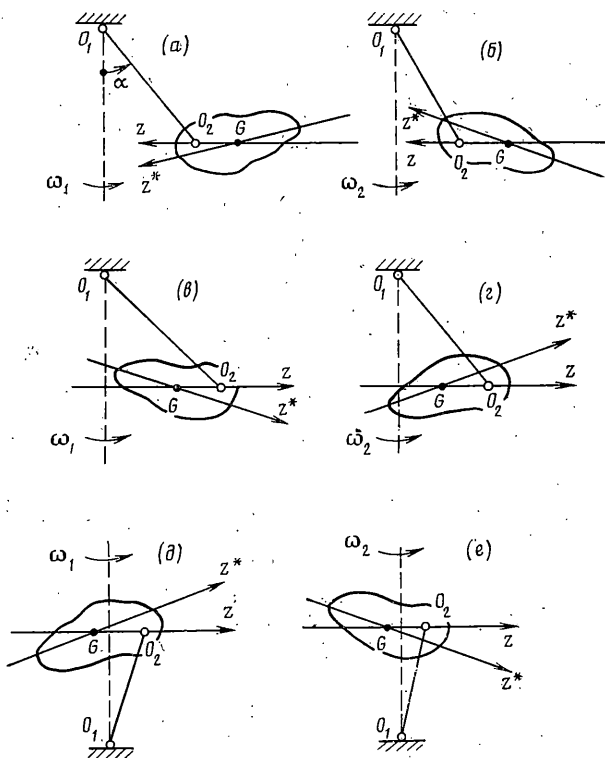
Из первого уравнения (1.1) при $\sin \alpha \neq 0$ имеем $v = \cos \alpha$ и

$$\omega^2 = g/l \cos \alpha, \quad (\cos \alpha > 0) \quad (1.5)$$

Таким образом, имеются два режима перманентных вращений, соответствующих вертикальному положению оси z ; их конфигурация определяется уравнениями (1.2) и (1.3) с учетом (1.4), а угловая скорость — равенством (1.5). Следует заметить, что решение такого типа, когда ось под-



Фиг. 2



Фиг. 3

веса z совпадает с вертикалью, не проходящей через неподвижную точку подвеса стержня, имеет место только для тела, подвешенного в точке, не лежащей ни на одной из его главных центральных осей инерции.

Рассмотрим второй случай, при котором ось подвеса z занимает горизонтальное положение. При этом $\cos \theta = 0$ и тогда из третьего уравнения (1.1) получим

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{(A-B)(\cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma \cos^2 \tau) - (C-B)\sin^2 \tau}{2(A-B)\sin \sigma \cos \sigma \cos \tau} \quad (1.6)$$

В интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$ выражение (1.6) определяет два значения угла $\varphi = \varphi_{1,2}$, где $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$.

Используя (1.6) и второе уравнение (1.1), найдем выражение для ве-

личины v :

$$v = \pm \sin \tau (2^{1/2} mal)^{-1} = \{ [(A-B) \sin \sigma - (C-B)] \cos \tau (1 \mp \lambda)^{1/2} + (A-B) \sin \sigma \cos \sigma (1 \pm \lambda)^{1/2} \} \quad (1.7)$$

$$\lambda = \frac{(A-B) (\cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma \cos^2 \tau) - (C-B) \sin^2 \tau}{\{ [(A-B) (\cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma \cos^2 \tau) - (C-B) \sin^2 \tau]^2 + 4(A-B)^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma \cos^2 \tau \}^{1/2}} < 1$$

Из двух знаков перед фигурной скобкой в выражении (1.7) выбирается тот, при котором $v > 0$. Выражение (1.7) определяет два значения величины $v > 0$, каждое из которых соответствует одному из двух значений угла φ , определяемых из (1.6).

Первое уравнение (1.1) при $\sin \theta = 1$ примет вид

$$(\sin \alpha + \mu) \cos \alpha = v \sin \alpha \quad (1.8)$$

Решение уравнения (1.8) рассмотрим отдельно для трех вариантов: 1) $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$; 2) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$; 3) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$. Отметим, что во втором случае решение (1.8) существует только при $\mu < 1$, поскольку $v > 0$. Случай $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$ не рассматривается, так как в соответствии с (1.8) значения v при этом могут быть только отрицательными.

Как показывают исследования уравнения (1.8) [6], в первом и третьем из указанных вариантов для каждого $v > 0$ и $\mu > 0$ существует единственное решение этого уравнения относительно $x = \sin \alpha$. Следовательно, для каждого из случаев $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$ (фиг. 3, а, б) и $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$ (фиг. 3, д, е) всегда имеется два стационарных режима движения, при которых ось z занимает горизонтальное положение. Этим режимам отвечают одно значение угла α , определяемое из (1.8), два значения угла $\varphi_{1,2}$, определяемые из (1.6), и соответственно два значения угловой скорости $\omega_{1,2}^2 = g(lv_{1,2})^{-1}$, где $v_{1,2}$ находится из (1.7).

В случае $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$ уравнение (1.8) не имеет решения или имеет два решения, причем два решения существуют при выполнении условия [6]:

$$v < (1 - \mu^{2/3})^{3/2} \quad (1.9)$$

Неравенство (1.9) с учетом (1.7) накладывает следующее ограничение на соотношение геометрических и инерционных параметров системы

$$\mu \sin \tau (2^{1/2} ma^2)^{-1} \{ [(A-B) \sin \sigma - (C-B)] \cos \tau (1 \mp \lambda)^{1/2} + (A-B) \sin \sigma \cos \sigma (1 \pm \lambda)^{1/2} \} < (1 - \mu^{2/3})^{3/2} \quad (1.10)$$

При выполнении (1.10) для случая $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$ (фиг. 3, в, г) имеются четыре стационарных режима движения, отвечающих условию $\sin \theta = 1$; при этом каждому из двух значений угла $\varphi = \varphi_{1,2}$ и соответствующих значений угловой скорости $\omega_{1,2}$ отвечают два значения угла α , определяемых из (1.8). Если же условие (1.10) не выполняется, то стационарных режимов движения для случая $\sin \theta = 1, \sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$ не имеется.

Таким образом, для тела произвольной формы, подвешенного в произвольной точке на стержне, существуют восемь (при выполнении (1.10)) или четыре (при невыполнении (1.10)) частных решений системы (1.1), соответствующих стационарным режимам движения, при которых ось z занимает горизонтальное положение (фиг. 3).

Интересно отметить, что горизонтальное положение оси z достигается при конечных значениях угловой скорости, только если точка подвеса стержня не находится ни на одной из главных центральных осей инерции тела. Как следует из (1.7), по мере приближения точки подвеса к оси

инерции (при уменьшении значения $\sin \tau$) угловая скорость, соответствующая рассматриваемому режиму, увеличивается.

Для осесимметричного тела ($A=B$), подвешенного в точке, не лежащей на главной центральной оси инерции, или для неосесимметричного тела, подвешенного в точке, лежащей в плоскости, проходящей через две главные центральные оси инерции ($\sigma=0$), как следует из (1.7), только одно из двух значений $v_{1,2}$ равняется нулю, т. е. горизонтальному положению оси z в этом случае соответствует как $\omega \rightarrow \infty$ (при $\cos \varphi=0$), так и конечное значение угловой скорости (при $\sin \varphi=0$).

2. Рассмотрим особый случай подвеса тела, при котором точка крепления стержня расположена в плоскости, проходящей через две главные центральные оси инерции тела, но не находится ни на одной из этих осей. Этому случаю соответствует условие $\sigma=0$ (фиг. 1) и уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \mu \sin \theta) \cos \alpha - v \sin \alpha = 0 \\ & (A-B) \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + (C-B) (\cos \varphi \cos \theta \sin \tau + \\ & \quad + \sin \theta \cos \tau) (\sin \theta \cos \varphi \sin \tau - \cos \theta \cos \tau) + \\ & \quad + mal (\sin \alpha + \mu \sin \theta) \cos \theta - mal v \sin \theta = 0 \\ & (A-B) \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi + (C-B) \sin \varphi \sin \tau (\cos \theta \cos \tau - \sin \theta \sin \tau \cos \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Третье уравнение (2.1) справедливо при выполнении одного из следующих равенств: $\sin \varphi=0$ или

$$(A-B) \sin \theta \cos \varphi + (C-B) \sin \tau (\cos \theta \cos \tau - \sin \theta \sin \tau \cos \varphi) = 0 \quad (2.2)$$

Условие $\sin \varphi=0$ совместно с первыми двумя уравнениями (2.1) сводится к системе уравнений, описывающих перманентные вращения осесимметричного тела, подробно исследованной в [2].

Рассмотрим второй случай, соответствующий равенству (2.2). Оказывается, что при выполнении этого условия существуют формы перманентных вращений, отличные от имеющих место для осесимметричного тела, подвешенного в произвольной точке. Из (2.2) имеем

$$\cos \varphi = \frac{(C-B) \sin \tau \cos \tau \cos \theta}{[(C-B) \sin^2 \tau - (A-B)] \sin \theta} \quad (2.3)$$

Здесь предполагается, что $\sin^2 \tau \neq (A-B)/(C-B)$. В особом случае, когда тело подвешено так, что $\sin^2 \tau = (A-B)/(C-B)$ из (2.2) и (2.1) можно получить: $\cos \theta=0$, $\cos \varphi = mga \omega^{-2} [(A-B)(C-A)]^{-1/2}$, при этом $\omega^2 > mga [(A-B)(C-A)]^{-1/2}$, а угол α определяется из первого уравнения (2.1).

В силу (2.3) допустимые значения угла θ ограничены неравенством

$$\operatorname{tg} \theta > (C-B) \sin \tau \cos \tau / [(C-B) \sin^2 \tau - (A-B)] \quad (2.4)$$

которое в соответствии с (2.1) накладывает ограничение на допустимые значения угловой скорости ω .

Подставляя (2.3) во второе уравнение (2.1) после преобразований получим

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + (a+K) l^{-1} \sin \theta) \cos \theta - v \sin \theta = 0 \\ & K = (A-B)(C-A) / ma [(C-B) \sin^2 \tau - (A-B)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, первые два уравнения системы (2.1), определяющие стационарные значения углов α и θ , могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} & v = \cos \alpha (1 + \mu \sin \theta / \sin \alpha) \\ & \gamma v = \cos \theta (1 + \gamma \sin \alpha / \sin \theta), \quad \gamma = l(a+K) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вид этих уравнений аналогичен уравнениям, описывающим перманентные вращения осесимметричного тела, подвешенного в точке, лежащей на оси его динамической симметрии. Различие имеется лишь в выражении для параметра γ . В соответствии с (2.5) при $\tau=0$ (или при $C=B$) имеем: $\gamma=\gamma_0=l(a+(A-C)/(ma))^{-1}$, что совпадает с выражением для этого параметра в случае осесимметричного тела, подвешенного в точке, расположенной на оси его динамической симметрии. Таким образом, введение параметра K в виде (2.5) позволило свести анализ первых двух уравнений системы (2.1) к уравнениям, описывающим ранее рассмотренный класс перманентных вращений [3, 4].

Уравнения типа (2.6) были исследованы в [6]. Решение системы (2.6) относительно $\sin \alpha$ и $\sin \theta$ неоднозначно, т. е. заданному значению угловой скорости ω могут соответствовать несколько стационарных режимов, определяемых различными углами α и θ . В зависимости от соотношения параметров μ и γ возможен один режим перманентных вращений, несколько режимов или таких режимов вообще не существует.

Таким образом, для твердого тела произвольной формы, подвешенного так, что точка крепления стержня расположена в плоскости, проходящей через две главные центральные оси инерции тела, но не находится ни на одной из этих осей, существуют следующие режимы стационарных движений.

При выполнении условия $\sin \varphi=0$, при котором две главные центральные оси инерции тела, стержень и ось подвеса z расположены в одной вертикальной плоскости, имеют место стационарные конфигурации, такие же, как для осесимметричного тела.

Если $\sin \varphi \neq 0$, то существуют режимы, отличные от режимов осесимметричного тела. В этом случае для осесимметричного тела имеются только два типа конфигураций, при которых ось динамической симметрии тела занимает горизонтальное положение, а значение угловой скорости ω однозначно определяет значение углов α и θ , причем, как показано в [5], $\alpha=\theta$.

В рассматриваемом же случае неосесимметричного тела возможны различные типы стационарных конфигураций, при которых угол φ , характеризующий отклонение оси инерции z^* от вертикальной плоскости, содержащей стержень и ось z , определяется геометрическими и инерциальными параметрами системы в соответствии с уравнением (2.3), а углы α и θ находятся из уравнений (2.6) с учетом (2.4), при этом заданному значению ω может отвечать более одной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А. Ю., Малащенко С. В., Стороженко В. А. и др. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 3-13.
2. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 3-16.
3. Рубановский В. Н. Перманентные вращения и относительные равновесия тела, подвешенного на стержне, их ветвление и устойчивость // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 19-34.
4. Нозадзе Г. Т. Об устойчивости и бифуркации положений относительного равновесия тяжелого твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 22-29.
5. Ишлинский А. Ю., Малащенко С. В., Стороженко В. А. и др. О стационарных движениях подвешенного на струне твердого тела при вертикальном расположении одной из его главных центральных осей инерции // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 34-45.
6. Гурецкий В. В., Добринская Т. А. О регулярных прецессионных движениях осесимметричного твердого тела на шарнирно-стержневом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 19-27.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.X.1989