18. *Клюшников В. Д.* Поверхность нагружения и допуски при ее экспериментальном определении // ДАН СССР. 1975. Т. 221. № 2. С. 299–300.
19. *Янг Ю. И., Шишмарев О. А.* Некоторые результаты исследования границ упругого состояния растянутых образцов никеля // ДАН СССР. 1958. Т. 199. С. 46–48.
20. *Талыпов Г. Б.* Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. 134 с.
21. *Супрун А. Н.* Математическая модель реономной пластичности // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т, 1983, С. 8–17.
22. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности и ползучести, учитывающая наследственные свойства и влияние скорости пластического деформирования на локальный предел текучести материала // ДАН СССР. 1978. Т. 238. С. 36–38.
23. *Супрун А. Н.* Определяющие соотношения реономной пластичности с гиперэллиптической поверхностью нагружения // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т. 1982. С. 3–9.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
20.I.1989

УДК 539.3:517.972.5

© 1991 г.

В. Л. ЛЕОНТЬЕВ

О СПОСОБАХ УДОВЛЕТВОРЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ДВУХ СМЕШАННЫХ ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНЫХ МЕТОДАХ

Рассматриваются два метода приближенного решения задач статического изгиба стержней и пластин, основанные на условии стационарности рейсснериана, взятого в форме [1]. Перемещения, силы и моменты аппроксимируются простейшими финитными функциями: в методе [2] – функциями Куранта, в методе [3] – ступенчатыми, определенными на двух сетках. Единообразная простейшая аппроксимация всех неизвестных функций делает глобальные системы сеточных уравнений неопределенными или несовместными, но позволяет после устранения этого дефекта системы получать приближенные решения для силовых факторов и перемещений с более уравновешенной, чем в методе перемещений, точностью при минимальном числе узловых неизвестных. В статье проводится сравнительный анализ способов удовлетворения граничных условий, преобразующих систему в определенную. Решения задач повышают достоверность утверждений об уровне эффективности как этих способов, так и самих методов.

1. На примере линейной задачи о статическом упругом изгибе однородного прямолинейного стержня постоянного сечения проводится сравнение способов устранения дефекта глобальной системы сеточных уравнений вариационно-сеточного метода [2], в котором для аппроксимации прогиба $W(x)$, угла поворота сечения $\Theta(x)$, перерезывающей силы $Q(x)$ и изгибающего момента $M(x)$ используется однотипная аппроксимация – четыре линейные комбинации n кусочно-линейных функций Куранта, содержащие неизвестные коэффициенты w_i, θ_i, q_i, m_i ($i=1,2,\ldots,n$). Функциями Куранта, связанными с сеткой, содержащей n узлов, определяется линейная оболочка H_n.

Условие стационарности функционала Рейсснера [1] приводит к системе уравнений

$$\begin{gathered} A_1\mathbf{Q}=\mathbf{P}, \qquad A_2\mathbf{M}+B\mathbf{Q}=0 \\ A_3\mathbf{W}-B\Theta=0, \qquad A_4\Theta+\beta B\mathbf{M}=0 \end{gathered} \tag{1}$$

состоящей из четырех подсистем. Здесь β – податливость стержня при изгибе. Компоненты векторов $\mathbf{W}=(w_1, w_2, \ldots, w_n)^\mathrm{T}$, $\Theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)^\mathrm{T}$, $\mathbf{Q}=(q_1, q_2, \ldots, q_n)^\mathrm{T}$, $\mathbf{M}=(m_1, m_2, \ldots, m_n)^\mathrm{T}$ – приближенные значения искомых функций в узлах равномерной сетки: $x_1=0$, $x_2=\Delta$, $x_3=2\Delta, \ldots, x_n=(n-1)\Delta=1$ ($l=1$ – длина стержня). Вектором $\mathbf{P}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)^\mathrm{T}=p\Delta(^1/_2, 1, 1, \ldots, 1, ^1/_2)^\mathrm{T}$ характеризуется внешняя равномерная нагрузка интенсивности p. Матрицы A_i ($i=1, 2, 3, 4$) – ленточные трехдиагональные порядка n с нулевыми на главной диагонали элементами. Исключение составляют лишь $A_i(1,1)={}^1/_2$ и $A_i(n,n)=-{}^1/_2$. В косой строке над главной диагональю все элементы равны $(-{}^1/_2)$, а под ней ${}^1/_2$. Матрицы A_i ($i=1, 2, 3, 4$) отличаются друг от друга только теми изменениями, которые вносятся в них вариацион-

Таблица 1

i	n											
	$\frac{w_i}{p\beta}\cdot 10^3$			$\frac{\theta_i}{p\beta}\cdot 10^2$			$\frac{m_i}{p}\cdot 10^2$			$\frac{q_i}{p}\cdot 10$		
	5	6	7	5	6	7	5	6	7	5	6	7
1	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	−4,51 (8,3)	−4,34 (4,1)	−4,32 (3,7)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	5,00 (0,0)	4,80 (4,0)	5,00 (0,0)
2	9,98 (5,4)	8,06 (2,5)	6,80 (1,6)	−2,95 (2,1)	−3,41 (2,7)	−3,60 (1,2)	10,4 (8,3)	8,53 (4,3)	7,41 (3,7)	2,50 (0,0)	3,20 (4,0)	3,33 (0,0)
3	13,6 (4,4)	12,8 (3,3)	11,6 (1,8)	0,00 (0,0)	−1,24 (0,3)	−2,06 (1,2)	12,5 (0,0)	12,3 (2,1)	11,1 (0,0)	0,00 (0,0)	0,80 (4,0)	1,67 (0,0)
4	9,98 (5,4)	12,8 (3,3)	13,4 (2,7)	2,95 (2,1)	1,24 (0,3)	0,00 (0,0)	10,4 (8,3)	12,3 (2,1)	13,0 (3,7)	−2,50 (0,0)	−0,80 (4,0)	0,00 (0,0)

ным принципом, учитывающим те или иные граничные условия. К примеру условие $Q(0)=0$ порождает смену знака у элемента $A_1(1,1)$, а условие $Q(l)=0$ – у $A_1(n,n)$. Числовая матрица $(6B)/\Delta$ – ленточная трехдиагональная порядка n. Ее главная диагональ состоит из четверок. Исключения: $6B(1,1)/\Delta=2$; $6B(n,n)/\Delta=2$. В косых строках над диагональю и под ней располагаются единицы. По виду матричных подсистем (1) нетрудно записать исходные дифференциальные уравнения.

Для аппроксимации силы Q используется H_n, а для аппроксимации $dQ(x)/dx$ – линейная оболочка T_{n-1} кусочно-постоянных функций. Левая часть уравнения $dQ(x)/dx=p(x)$, содержащая неизвестную функцию только под знаком производной и входящая в рейсснериан в произведении с W, проектируется на линейную оболочку H_n, размерность которой выше, чем у T_{n-1}. В случае, когда граничные условия на Q не накладываются, это вызывает вырожденность матрицы A_1, а следовательно неопределенность или несовместность глобальной системы. Устранить дефект системы можно, изменив размерности линейных оболочек. Это достигается введением прогиба в уравнение либо изменениями в аппроксимациях Q или W. Здесь рассматриваются способы, основанные на удовлетворении наложенных на прогиб граничных условий на этапе построения аппроксимирующей его линейной комбинации функций Куранта. При таком подходе коэффициент w_1 или w_n (w_1 и w_n) не варьируется и поэтому соответствующее ему первое или последнее уравнение (оба уравнения) удаляются из первой подсистемы (1).

Вариант 1. В задаче об изгибе шарнирно-опертого стержня граничные условия $W(0)=0$, $W(1)=0$ и $M(0)=0$, $M(1)=0$ выполняются перед подстановкой линейных комбинаций в функционал. Коэффициенты w_1, w_n, m_1, m_n полагаются равными нулю и не варьируются. Поэтому подсистемы 1 и 4 в (1) лишаются своих первых и последних уравнений, а знаки элементов $(1,1)$ и (n,n) матриц A_2 и A_3 не изменяются. Узловые значения приближенных решений, полученные на трех сетках ($n=5, 6, 7$), приводятся в табл. 1, в которой учитывается четность W, M и нечетность Q, Θ относительно линии $x=1/2$. В скобках указывается, какую долю максимального значения точного решения составляет в соответствующем узле в процентах отклонение приближенного решения от точного.

Вариант 2. В той же задаче граничные условия, наложенные на прогиб, удовлетворяются так же, как и в варианте 1, а остальные условия – с помощью вариационного принципа. Вычеркиваются два уравнения из первой подсистемы в (1), знаки изменяются только у элементов $A_2(1,1)$ и $A_2(n,n)$. Характеристики приближенных решений находятся в таблице 2.

Анализ практической точности метода по таблицам 1 и 2 приводит к выводу о том, что оба варианта удовлетворения граничных условий устраняют дефект системы сеточных уравнений и делают метод весьма эффективным. Подобные результаты и выводы были получены также в задачах об изгибе стержня, жестко защемленного на обоих концах, и стержня, жестко защемленного на левом и свободного на правом конце.

2. Рассматривается линейная задача об упругом изгибе пластины с учетом деформации поперечного сдвига и метод [2] ее решения, в котором прогиб W, углы β_1 и β_2 поворота нормали, перерезывающие силы Q_1 и Q_2, изгибающие моменты M_1 и M_2, крутящий момент M аппроксимируются линейными комбинациями n функций Куранта Φ_i, связанных с n узлами сетки. Вариационный принцип Рейсснера при-

i	$\frac{w_i}{p\beta}\cdot 10^3$			$\frac{\theta_i}{p\beta}\cdot 10^2$			$\frac{m_i}{p}\cdot 10^2$			$\frac{q_i}{p}\cdot 10$		
	n											
	5	6	7	5	6	7	5	6	7	5	6	7
1	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	−4,17 (0,0)	−4,21 (1,0)	−4,17 (0,0)	2,08 (16,7)	2,42 (19,4)	0,93 (7,4)	5,00 (0,0)	6,26 (25,1)	5,00 (0,0)
2	9,55 (2,1)	7,89 (1,2)	6,69 (0,7)	−3,13 (6,3)	−3,41 (2,7)	−3,70 (3,7)	8,33 (8,3)	7,08 (7,4)	6,48 (3,7)	2,50 (0,0)	1,75 (25,1)	3,33 (0,0)
3	13,9 (6,7)	12,8 (2,9)	11,7 (2,6)	0,00 (0,0)	−1,31 (1,8)	−2,01 (0,0)	14,6 (16,7)	12,8 (6,0)	12,0 (7,4)	0,00 (0,0)	2,26 (25,1)	1,67 (0,0)
4	9,55 (2,1)	12,8 (2,9)	13,2 (1,4)	3,13 (6,3)	1,31 (1,8)	0,00 (0,0)	8,33 (8,3)	12,8 (6,0)	12,0 (7,4)	−2,50 (0,0)	−2,26 (25,1)	0,00 (0,0)

водит к системе уравнений, описанной в [2]. Выполненные на ЭВМ ЕС-1055М расчеты показали, что в задаче статического изгиба квадратной пластины, жестко защемленной по всей границе и находящейся под действием равномерной нормальной нагрузки, значения W, β_1 и β_2 в узлах сетки имели высокие порядки и с увеличением точности вычислений возрастали, достигая 10^{15} при использовании двойной точности, а в задачах с другими граничными условиями «решения» не удовлетворяли силовым граничным условиям. Как и в теории стержней причина этого – неопределенность или несовместность глобальной системы сеточных уравнений, вызванная тем, что уравнение равновесия

$$\partial Q_1/\partial x+\partial Q_2/\partial y+p=0$$

содержит только производные неизвестных функций и поэтому при использовании однотипной аппроксимации Q_1, Q_2 и W его сеточные аналоги линейно-зависимы или противоречат друг другу. Для устранения дефекта системы сеточных уравнений здесь применяются те же два варианта удовлетворения граничных условий, а также третий вариант – переход к соответствующей квазистатической задаче об установившихся вынужденных гармонических колебаниях с частотой λ, приводящий к появлению в указанном уравнении равновесия прогиба и к изменению размерности аппроксимирующей его левую часть линейной оболочки T_K. Исследование эффективности вариантов сводится здесь к сравнительному анализу приближенных решений трех задач изгиба пластин.

Задача 1. Для расчета упругого изгиба квадратной ($a=b=1$) изотропной пластины постоянной толщины, жестко-защемленной по всей границе, испытывающей действие равномерной нормальной нагрузки $p=2000$ и имеющей следующие характеристики: $h=0{,}01$, $\nu=0{,}3$, $E=2\cdot 10^{10}$, $G=7{,}7\cdot 10^9$, $\rho=8000$, использовались равномерные сетки типа C [4, стр. 276]. Редкая (густая) сетка содержала $N=25$ (121) узлов и 32 (200) треугольных конечных элемента. В расчетах учитывалась симметрия. Система уравнений решалась методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В табл. 3 приводятся приближенные значения прогиба и изгибающих моментов в центре пластины, а также их относительные отклонения от известных значений $W=1{,}38\cdot 10^{-3}$ и $M_1=M_2=45{,}8$ [5].

Видно, что вариант 1 устраняет дефект системы, но выделяется низкой точностью. Варианты 2 и 3 дают удовлетворительные результаты. В третьем варианте используется значение λ равное единице. В этом случае численные решения при переходе в расчетах от двойной точности к обычной практически не изменяются и динамические эффекты проявляются слабо. К примеру значением $\lambda=0{,}1$ устойчивость решений в таком переходе не обеспечивается.

Задача 2. Варианты 2, 3 демонстрируют удовлетворительную эффективность и в задаче об изгибе шарнирно-опертой на всей границе пластины, имеющей те же геометрические и физические характеристики. Значения прогиба и моментов в центре пластины, собранные в таблице 4, на густой сетке незначительно отличаются от $W=4{,}43\cdot 10^{-3}$ и $M_1=M_2=95{,}8$ [6].

Задача 3. Вариант 3 оказался бесполезным в задаче об изгибе прямоугольной пластины ($a=1{,}6$, $b=0{,}8$), шарнирно-опертой при $x=0$ и $x=1{,}6$, жестко-защемленной при $y=0$, свободной при $y=0{,}8$ и находящейся под действием равномерной нормальной нагрузки $p=1$. Параметры пластины $h=0{,}01$, $\nu=0{,}3$, $E=3\cdot 10^7$, $G=1{,}15\cdot 10^7$. Обнаружилось, что в задачах об изгибе пластин со свободными участками границы при

Таблица 3

Вариант	N	λ	$W\cdot10^3$ (Δ_W)	M_1, M_2 (Δ_M)
1	25	0	0,146 (89,4)	6,01 (86,9)
1	121	0	1,05 (23,9)	37,5 (18,1)
2	25	0	1,62 (17,4)	34,8 (24,0)
2	121	0	1,34 (2,9)	47,7 (4,2)
3	25	1	2,03 (47,1)	49,0 (7,0)
3	121	1	1,44 (4,4)	50,4 (10,0)

Таблица 4

Вариант	N	λ	$W\cdot10^3$ (Δ_W)	M_1, M_2 (Δ_M)
2	25	0	4,11 (7,2)	83,9 (12,4)
2	121	0	4,28 (3,4)	91,2 (4,8)
3	25	1	4,05 (8,6)	90,6 (5,4)
3	121	1	4,56 (2,9)	96,6 (0,8)

Таблица 5

N	$W\cdot10^2$ (Δ_W)	M_1 (Δ_M)	M_2 (Δ_M)
25	7,34 (90,9)	370,5 (25,8)	209,9 (29,2)
121	4,42 (14,9)	311,2 (5,7)	168,3 (3,6)

Таблица 6

N	$W\cdot10$ (Δ_W)	M_1 (Δ_M)	M_2 (Δ_M)
25	1,74 (29,1)	698,0 (7,5)	423,7 (6,1)
121	1,41 (4,6)	659,1 (1,5)	402,9 (0,9)

его применении не удовлетворяются силовые граничные условия. В отличие от варианта 3 вариант 2 позволил выполнить все граничные условия и получить в случае густой сетки в центре пластины значения $W=3{,}37\cdot10^{-3}$ и $M_1=2{,}4\cdot10^{-2}$, которые расходятся с $W=3{,}5\cdot10^{-3}$ и $M_1=2{,}65\cdot10^{-2}$ [7] соответственно на 3,7 и 9,4%.

3. Метод [3] отличается от рассмотренного метода двумя признаками. Во-первых, вместо функций Куранта берутся две системы финитных ступенчатых функций, во-вторых, конечные носители этих функций определяются двумя сетками. В теории пластин одна связана с β_i, Q_i, другая – с W, M_i, M. Вариант 2 удовлетворения граничных условий, как показывают описанные ниже решения трех задач, оказался действенным средством устранения дефекта глобальной системы разностных уравнений метода [3], порождаемого уже описанными причинами. В расчетах использовалась пара редких сеток, содержавших $L=16$ и $N=25$ конечных элементов, и пара густых сеток, имевших $L=100$ и $N=121$ конечный элемент.

Задачи 4, 5. В табл. 5, 6 находятся полученные методом [3] значения прогиба и изгибающих моментов в центре пластины, отличающейся от пластины задачи 1 только размерами $a=2$, $b=3$. В табл. 5 содержится информация о жестко-защемленной по всей границе пластине, а в табл. 6 – о шарнирно-опертой. Величинами их отклонений от известных значений $W=0{,}0384$, $M_1=294{,}4$, $M_2=162{,}4$ [8] для жестко-защемленной и $W=0{,}135$, $M_1=649{,}6$, $M_2=399{,}2$ [6] для шарнирно-опертой пластин, демонстрируется способность варианта 2 устранить дефект системы разностных уравнений и сделать метод эффективным.

Задача 6. Значения $W=3{,}72\cdot10^{-3}$, $M_1=2{,}90\cdot10^{-2}$ в центре пластины, описанной в задаче 3, полученные методом [3] с использованием варианта 2, отличаются от $W=3{,}5\cdot10^{-3}$ и $M_1=2{,}65\cdot10^{-2}$ [7] на 6,3 и 9,4%.

4. Таким образом, можно сделать вывод, что среди рассмотренных самым надежным и эффективным способом устранения дефекта глобальной системы сеточных уравнений, возникающего при использовании единообразной аппроксимации всех неизвестных функций в смешанном вариационном методе, является способ, в котором граничное условие по прогибу удовлетворяется заранее, а остальные условия – с помощью вариационного принципа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фридман В. М., Чернина В. С.* Видоизменение метода Бубнова – Галеркина – Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 64–78.
2. *Леонтьев В. Л.* Функции Куранта в смешанном методе конечных элементов. Киев, 1988. 21 с.– Деп. в УкрНИИНТИ 10.03.88, № 635.
3. *Кукишев В. Л., Фридман В. М.* Вариационно-разностный метод в теории упругих колебаний, основанный на вариационном принципе Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 112–119.
4. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
5. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 391 с.
6. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
7. *Prato C. A.* Shell finite element method via Reissner's principle // Intern. J. Solids and Struct. 1969. V. 5. N 10. P. 1119–1133.
8. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.

Винница

Поступила в редакцию 3.VII.1989