

## К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ТОЧЕК И ВОГНУТОСТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ

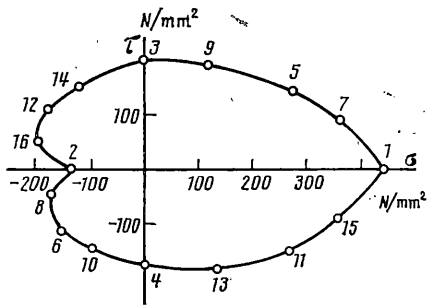
История изучения геометрического образа поверхности текучести металлов методами экспериментальной механики изобилует весьма противоречивыми результатами. Так, например, с одной стороны, при зондировании границы текучести предварительно пластически деформированной среды авторы работ [1–6] обнаружили признаки существования острой или, по крайней мере, закругленной конической особенности (угла на кривой текучести в двумерных опытах). В работах [4, 5], кроме того, были приведены данные, свидетельствующие и о возникновении вогнутости в зоне, противоположной точке предварительного нагружения. С другой стороны, авторы исследований [7–10] в результате проведения аналогичных экспериментов пришли к убеждению, что поверхности текучести являются гладкими и выпуклыми.

Не дали однозначного ответа на вопрос о существовании конических особенностей и испытания на активное зигзагообразное нагружение. Так, например, в экспериментах [8] наблюдались колебания (осцилляция) направления вектора развития пластических деформаций, что можно рассматривать как признак образования конической точки на поверхности нагружения, ассоциируемой с поверхностью текучести. В то же время в результате аналогичных испытаний [7, 11] были получены и практически прямые траектории пластических деформаций – признак отсутствия каких-либо локальных особенностей поверхности текучести в точке нагружения.

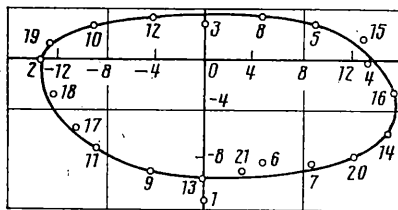
Очевидно, что противоречивые сведения о конических точках и вогнутостях ставят под сомнение достоверность получаемых результатов, а так же применимость теорий, опирающихся на любое из альтернативных суждений. Вместе с тем в научной литературе до сих пор отсутствуют исследования, содержащие обстоятельный анализ сложившейся в экспериментальной механике ситуации, хотя за последние пятнадцать лет неоднократно сообщалось о некоторых заслуживающих внимания наблюдениях и гипотезах о причинах качественного различия результатов. Так, Михно и Финдли в обзоре [12], посвященном достижениям в области экспериментального изучения свойств поверхности текучести металлов, указали, что конической точкой в опытах [1, 3] являлась конечная точка траектории предварительного нагружения, которая авторами экспериментов вводилась в число точек границы текучести. Те же авторы в работе [13] объясняли возникновение конических точек и вогнутостей в экспериментах Гупта и Лаурета [5] искажениями, вносимыми многократными внедрениями в пластичность траекторий зондирования границ поверхности текучести. В последнее время получила распространение [14] и гипотеза Эдебела, в соответствии с которой скорость пластической деформации может содержать неподчиняющуюся принципу градиентальности компоненту, связанную с некоторыми процессами, подобными генерированию новых подвижных дислокаций и их перераспределению. Тем самым сделана попытка физически обосновать осцилляцию неупругих деформаций и вогнутость поверхности текучести.

В отечественной научной литературе неоднократно указывалось на то, что признаки конических точек [15] и вогнутостей [16] могут наблюдаться в тех случаях, когда методика вычисления и обработки результатов эксперимента не исключает влияния временных эффектов. Ниже дается критический анализ указанных выше подходов к проблеме конических точек и вогнутостей, опирающийся на известные экспериментальные результаты.

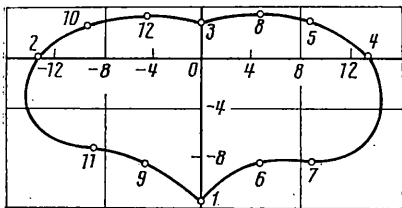
1. Наиболее контрастно интересующие нас различия проявились между результатами опытов Михно и Финдли [8, 9] и Гупта и Лаурета [5], хотя имелось, казалось бы, достаточно много предпосылок для получения хотя бы качественно согласующихся сведений о поверхности текучести. Действительно в обеих сериях экспериментов испытывались тонкостенные трубчатые образцы из близкой по своему составу малоуглеродистой стали, поверхности текучести определялись во всех четырех квадрантах пространства  $\sigma$ - $\epsilon$ , конечная точка траектории предварительного нагружения не вводилась в число точек границы текучести, локальные пределы определялись по фиксированному допуску  $\delta$  на пластическую деформацию, все точки каждой поверхности зондировались на одном предварительно пластически деформированном, а затем разгруженном образце. Однако при этом все 46 кривых текучести в опытах Михно и Финдли, построенных с допуском  $\delta=10^{-5}$ , были гладкими и выпуклыми. Типичный результат, полученный после сдвига  $\gamma^p=-0,98\%$  и разгрузки, приведен на фиг. 1 (соответствует кривой 1 на фиг. 4, а в [9]). В то же время в опытах Гупта и Лаурета после растяжения  $\epsilon=10\%$  и разгрузки была построена кривая текучести ( $\delta=10^{-4}$ ), содержащая острый угол и вогнутость тыльной части



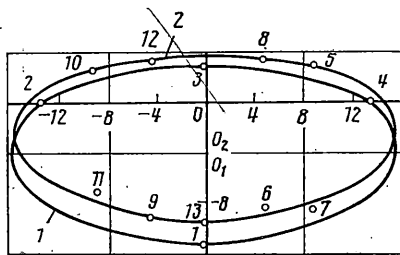
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



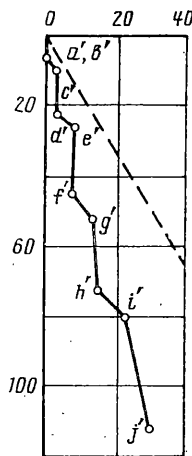
Фиг. 4

(фиг. 2 — приведена на фиг. 6 в [5]). При увеличении допуска ( $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $5 \cdot 10^{-4}$ ) указанные особенности сглаживались, а при  $\delta \geq 10^{-3}$  практически отсутствовали. Заметим, что здесь и далее рисунки сохраняют размерности оригиналов (на фиг. 1, 3, 4 отложено по горизонтали  $\sigma \times 6,9$  МПа/мм<sup>2</sup>, по вертикали  $\tau \times 6,9$  МПа/мм<sup>2</sup>; на фиг. 2, соответственно,  $\sigma$  в Н/мм<sup>2</sup>,  $\tau$  в Н/мм<sup>2</sup>; на фиг. 5, 6, соответственно,  $\varepsilon^p \times 10^{-6}$ ,  $\gamma^p \times 10^{-6}$ ).

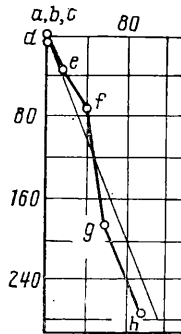
Пытаясь установить причины качественно различающихся результатов, Финдли и Михно [13] обратили внимание на следующие отличительные особенности методики Гупта и Лаурта: более грубый  $\delta \geq 10^{-4}$  допуск на пластическую деформацию и единая для всех опытов последовательность зондирования локальных пределов текучести. На основании этого в [13] был сделан вывод о том, что шестнадцать зондирований поверхности текучести, каждое из которых привело к пластическому деформированию по крайней мере порядка  $10^{-4}$ , вызвало значительное искажение результата, так как фактически «каждая из 16 проб представляла только одну точку на 16 различных поверхностях текучести, преобразованных воздействием каждого зондирования». При этом возникновение конических точек и вогнутостей Финдли и Михно объяснили влиянием принятой Гуптом и Лауртом последовательности зондирования, однако «механизм» образования указанных особенностей не обсуждался.

Заметим, что данное Финдли и Михно объяснение природы конических точек и вогнутостей в опытах Гупта и Лаурта уязвимо критике. Так, во-первых, влияние последовательности определения локальных пределов текучести на формирование особенностей поверхности осталось гипотетичным. Во-вторых, принятая в экспериментах Гупта и Лаурта последовательность определения точек поверхности не случайна — это известный прием [17, 10] компенсирования влияния каждого зондирования на результат (альтернативное зондирование). В третьих, если даже допустить, что рассматриваемые особенности поверхности текучести действительно возникли вследствие шестнадцати внедрений в пластичность, то следует ожидать, что для поверхностей, определенных с большим допуском, эффект конических точек и вогнутостей должен усиливаться. Однако в опытах Гупта и Лаурта наблюдается обратная картина — явление, предсказанное еще в теоретическом исследовании [18].

2. К проблеме углов и вогнутостей можно подойти и с других позиций. Для этого обратим внимание на следующие различия между результатами [5] и [8, 9]. В опытах Гупта и Лаурта (фиг. 2) точки, определившие конус и вогнутость поверхности текучести (точки 1 и 2), найдены прежде всех остальных локальных пределов, а кривая текучести реализует интерполяцию (проходит через все найденные точки). В опытах Михно и Финдли [8, 9] последовательность определения точек носит случайный характер, а кривая текучести строится как аппроксимирующая кривая. Заметим, что среди 46 границ текучести [8, 9] все же можно найти результат, где ло-



Фиг. 5



Фиг. 6

кальные пределы в прямом и обратном направлениях (относительно первоначального воздействия) найдены в числе первых точек (точки 1 и 3 на фиг. 1). Если здесь ограничиться только первыми 12 точками и провести интерполирующую кривую, то полученная по данным Михно и Финдли граница текучести (фиг. 3), так же, как и кривая Гупта и Лаурета, будет иметь четко выраженный угол в направлении первоначального нагружения и вогнутость тыльной части. Можно ли рассматривать этот результат как подтверждение реального существования конических точек и вогнутостей? Для ответа на этот вопрос следует вскрыть причины некоммутативности последовательности направления зондирования.

3. В отечественной экспериментальной механике много внимания уделялось изучению временных эффектов, проявляющихся при деформировании металлов в условиях комнатной температуры. Так, в 1958 г., видимо, впервые были опубликованы данные [19], иллюстрирующие влияние на положение и форму поверхности текучести металла временных факторов: продолжительности приложения силового воздействия и длительности «отдыха» образца перед началом зондирования локальных пределов текучести. Основные показатели экспериментов: материал — никель,  $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$ , зондирование в первом квадранте плоскости  $\sigma$ - $\tau$ , первичное воздействие — растяжение.

В дальнейшем экспериментальное изучение временных трансформаций поверхностей текучести сконцентрировалось на изучении влияния продолжительности отдыха металлов — естественного старения. Так, в 1963 году [20] и в результате многочисленных последующих исследований было показано, что поверхности текучести металлов после длительного (десятки часов) отдыха, в основном, изотропно расширяются — эффект деформационного старения. В то же время экспериментальных исследований закономерностей в поведении поверхности текучести после кратковременного отдыха практически не производилось. Это обстоятельство можно объяснить, во-первых, соизмеримостью продолжительности отдыха с затратами времени на экспериментальное определение границы текучести, во-вторых, интенсивной ползучестью, проявляющейся при зондировании в течение определенного периода после снятия нагрузки. Однако некоторые сведения о влиянии кратковременного старения можно извлечь из неспециальных экспериментов. Так, например, в упомянутых выше опытах [20] кривая текучести, определенная после двенадцатичасового отдыха образца, оказалась существенно ближе к началу координат, чем граница, найденная непосредственно после снятия нагрузки, что можно объяснить частичным возвращением поверхности текучести к преддеформированному положению за время отдыха.

Следует отметить, что понижение предела текучести после отдыха металла неоднократно наблюдалось при одномерных экспериментах. Это явление, получившее название эффекта отдыха материала или возврата пластических свойств, объясняется перемещением и аннигиляцией внутренних дефектов металла. Заметим, что процесс возврата протекал и при зондировании точек границы текучести в опыте Михно и Финдли (фиг. 1). В этом можно убедиться, если провести кривую текучести 1 (фиг. 4), используя первоначально определенные точки 1-4, а затем кривую 2, используя точки 5-13, найденные позже. В эксперименте Гупта и Лаурета (фиг. 2) о проявлении эффекта возврата свидетельствует асимметрия кривой, вызванная смещением влево каждой из двух симметрично определяемых точек, а именно

той, которая зондировалась позднее (16 — относительно 8, 12 — относительно 6 и т. д.). Исключение для точек 9 и 13 связано с асимметрией их определения.

Таким образом, можно утверждать, что в опытах Гута и Лаурета действительно каждая из 16 проб представляла одну точку на 16 различных поверхностях текучести. Однако это различие существенным образом было вызвано не воздействием зондирования, а процессом возврата поверхности. При этом точки 1 и 2, формирующие конус и вогнутость, оказались существенно сдвинутыми вправо относительно точек, определенных позднее. Михно и Финдли [8, 9] удалось избежать углов и вогнутостей потому, что построение границы текучести как аппроксимирующей кривой на большем числе «случайных» проб существенно осредняло результат.

4. Для придания большей убедительности утверждению об отсутствии конечной точки при деформации малоуглеродистой стали Финдли и Михно привели [13] один из результатов своих испытаний [9] на зигзагообразное нагружение, который продемонстрировал градиентальность развития пластических деформаций. Однако в той же серии экспериментов имели место и противоположные результаты. Так, например, (фиг. 5 — соответствует фиг. 5, б в [8]) наблюдалась явная осцилляция пластических деформаций, а общее направление их развития не совпадало с нормалью к поверхности текучести (пунктир). Последнее обстоятельство можно объяснить осредненным характером аппроксимирующей кривой Михно и Финдли и возможным ее перемещением до начала зигзагообразного нагружения. Так, например, как видно из фиг. 6 (соответствует фиг. 5б в [9]) теоретическая и фактическая поверхности текучести оказались отстоящими друг от друга на четыре звена (*a*, *b*, *c*, *d*) ломаной нагружения.

Михно и Финдли, пытаясь объяснить эпизодическую осцилляцию в своих экспериментах, были вынуждены предположить [8, 9], что колебания вектора пластических деформаций вызваны попаданием точки нагружения на «закругленную вершину тупого угла» поверхности текучести. Некоторые признаки возможного существования углов такого типа действительно наблюдались в опытах [8, 9] (6–9 случаев в серии из 46 кривых). Однако можно заметить, что все осциллирующие траектории начинались на гладких участках кривых текучести. А если предположить, что указанные особенности возникают только в процессе нагружения, то становятся необъяснимыми причины включения и выключения этого механизма в пределах одной траектории (см. фиг. 6, где звенья *de*, *ef*, *gh* достаточно точно следуют направлению нормали — сплошной линии, а среднее звено *fg* — нет).

Обнаруженная в опытах [8, 9] эпизодичность в проявлении нарушений градиентальности на отдельных траекториях и даже звеньях ставит под сомнение возможность объяснения осцилляции с помощью какого-либо детерминированного процесса, в частности, с помощью упомянутых выше физических явлений Здебела [14]. Поэтому наиболее достоверной причиной нарушения градиентальности, видимо, следует считать некоторый стохастический процесс, т. е. влияние неконтролируемых факторов при проведении эксперимента или обработке его результатов. Такими факторами могли бы быть, например, и временные эффекты. Действительно, известно, что металл проявляет достаточно высокую чувствительность к скорости нагружения. Поэтому колебание скорости нагружения могло бы привести к различающимся результатам. Однако такой подход к проблеме наталкивается на следующие возражения. Во-первых, если предположить, что осцилляция связана с ползучестью, то должны быть опытные подтверждения неколлинеарности приращений мгновенной и развивающейся во времени пластических деформаций. Вместо этого мы имеем результат (фиг. 6, б в [9]), демонстрирующий не только строгую коллинеарность, но и высокий уровень градиентальности деформаций указанных видов. Во-вторых, если допустить, что нарушение градиентальности связано с эффектом возврата, проявляющегося в виде поворота поверхности текучести после снятия предшествующей зигзагообразному нагружению нагрузки, то следует заметить, что такой процесс оказывал бы существенно однородное влияние на всю траекторию деформирования, а не на отдельные звенья.

Существенные искажения экспериментального результата могут возникнуть при случайной или методологической ошибках в выделении пластической составляющей из общей деформации. Заметим, что в работах [8, 9] не только не указывается методика вычисления неупругой деформации, но и не приводятся значения опытных упругих констант материала. Вместе с тем не следует забывать, что представление общей деформации в виде двух аддитивных составляющих является всего-навсего широко распространенной гипотезой. С другой стороны анализ зигзагообразного нагружения [8, 9] показывает, что имевшие место отклонения градиентальности всегда развивались в сторону приращения напряжений, что согласуется со свойствами упругих деформаций. Можно попытаться вычислить и некоторую величину упругой составляющей ( $\psi \Delta \sigma / E$ ,  $\psi \Delta \tau / G$ , где  $\psi$  — определяемый параметр), удаление которой из пластической деформации Михно и Финдли [8, 9] обеспечивает градиентальность развития неупругих деформаций. Примечательно, что принимая  $E = 2 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>,  $G = 0,833 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>, получим для 61 звена (88,4%)  $\psi < 0,5$ , для 5 звеньев (7,2%)  $0,5 <$

$\langle \psi \rangle < 1$  и в трех случаях (4,4%)  $\psi \approx 1$ . Указанные замечания свидетельствуют о том, что предположение об упругой природе осцилляции не лишено оснований.

5. О принципиальной возможности наблюдения ложной конической точки в связи с зондированием возвращающейся поверхности текучести указывалось в [15]. В [16] было продемонстрировано, что эффект возврата пластических свойств может послужить причиной появления и вогнутости тыльной части на результирующей границе текучести. О признаках проявления эффекта возврата в экспериментах Михно и Финдли [8, 9] сообщалось в [21]. Однако, как явствует, в частности, из [5, 8, 9] в современных экспериментах влиянию кратковременного отдыха на результаты зондирования не придается сколько-нибудь серьезного значения. Вместо этого при проведении опытов принимаются самые разнообразные меры подавления ползучести, затрудняющей эксперимент: применение различных по времени выдерживаний образца под нагрузкой, при частичной или полной разгрузке, выполнение комбинаций указанных выдержек. Однако, как это было показано выше, неравновесные процессы в металлах длительное время продолжают протекать.

В заключение следует признать, что в экспериментальной механике в настоящее время отсутствуют результаты, которые можно было бы квалифицировать как бесспорные доказательства существования конических точек и вогнутостей. Факты наблюдения ложных особенностей этого типа демонстрируют ограниченность концепций склерономной теории течения на уровне современных экспериментальных средств. Очевидно, что в сложившейся ситуации экспериментальная механика пластически деформируемых сред должна опираться на теорию вязкопластичности (реономной пластичности) [22, 23], учитывающую весь комплекс известных временных эффектов (возврат, деформационное старение, ползучесть и т. д.) в их взаимосвязи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Naghdi P. M., Essenburg F., Koff W.* An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity // *J. Appl. Mech.* 1958. V. 25. P. 201–209.
2. *Phillips A., Gray G. A.* Experimental investigation of corners in the yield surface // *J. Basic Engin.* 1961. V. 83. P. 275–289.
3. *Hu L. W., Bratt J. F.* Effect of tensile plastic deformation on yield condiction // *J. Appl. Mech.* 1958. V. 26. P. 411.
4. *Сеердлова Н. Г.* Об изменении формы границы текучести в случае произвольно-го направления нагружения // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. Сб. 7. С. 144–147.
5. *Gupta N. K., Lauert H. A.* A study of yield surface upon reversal of loading under biaxial stress // *ZAMM.* 1983. Bd. 63. H. 10. S. 497–504.
6. *Rousset M., Marquis D.* Sur la déformation des surfaces seuils en plasticité cyclique // *Comp. Ren. Acad. Sc. Paris.* 1985. T. 301. Sér. 2. N. 11. P. 751–754.
7. *Ivey H. J.* Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminum alloys // *J. Mech. Engng. Sci.* 1961. V. 3. P. 15–31.
8. *Michno M. J., Findley W. N.* Subsequent yield surfaces for annealed mild steel under dead-weight loading: aging, normality, convexity, corners, Bauschinger and cross effects // *J. Engng. Mat. Tech. Trans. ASME. Ser. H.* 1974. V. 96. No 1. P. 56–64.
9. *Michno M. J., Findley W. N.* Subsequent yield surfaces for annealed mild steel under servo-controlled strain and load histories: aging, normality, convexity, corners, Bauschinger and cross effect // *J. Engng. Mat. Tech. Trans. ASME. Ser. H.* 1979. V. 97. No 1. P. 25–32.
10. *Garmestani H., Adams B. L.* Transient small-scale yield behavior of textured copper tubing under biaxial loading // *J. Engng. Mat. Tech. Trans. ASME.* 1986. V. 108. N. 2. P. 127–134.
11. *Mair W. M.* An investigation into the existence of corners on the yield surface // *J. Strain Anal.* 1967. V. 2. P. 188–195.
12. *Michno M. J., Findley W. M.* An historical perspective of yield surface investigations for metals // *Int. J. Non-Linear Mech.* 1976. V. 11. P. 59–82.
13. *Findley W. N., Michno M. J.* Concerning cups and vertices on the yield surface of annealed mild steel // *ZAMM.* 1987. Bd. 67. H. 7. S. 309–312.
14. *Lehmann T.* Some remarks on the recent development of the foundations of the theory of plasticity // *Steel Res.* 1986. V. 57. N. 3. P. 101–107.
15. *Бережной И. А., Ивлев Д. Д.* О влиянии вязкости на механическое поведение пластических сред // *ДАН СССР.* 1965. Т. 163. С. 595–598.
16. *Супрун А. Н.* Об одном варианте феноменологической модели реономной пластичности металлов // X семинар «Актуальные проблемы прочности по теме пластичность материалов и конструкций. 1985 г.» Тарту: Изд-во Тартуск, ун-та, 1985. С. 117–118.
17. *Hecker S. S.* Experimental studies of yield phenomena in biaxially loaded metal // *Constitutive Equations in Viscoplasticity. AMS.* 1976. V. 20. P. 1–33.

18. Ключников В. Д. Поверхность нагружения и допуски при ее экспериментальном определении // ДАН СССР. 1975. Т. 221. № 2. С. 299–300.
19. Янг Ю. И., Шиммарев О. А. Некоторые результаты исследования границ упругого состояния растянутых образцов никеля // ДАН СССР. 1958. Т. 199. С. 46–48.
20. Талыпов Г. Б. Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. 134 с.
21. Супрун А. Н. Математическая модель реономной пластичности // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т, 1983, С. 8–17.
22. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности и ползучести, учитывающая наследственные свойства и влияние скорости пластического деформирования на локальный предел текучести материала // ДАН СССР. 1978. Т. 238. С. 36–38.
23. Супрун А. Н. Определяющие соотношения реономной пластичности с гиперэллиптической поверхностью нагружения // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т. 1982. С. 3–9.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию  
20.I.1989

УДК 539.3:517.972.5

© 1991 г.

В. Л. ЛЕОНТЬЕВ

## О СПОСОБАХ УДОВЛЕТВОРЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ДВУХ СМЕШАННЫХ ВАРИАЦИОННО-СЕТЧНЫХ МЕТОДАХ

Рассматриваются два метода приближенного решения задач статического изгиба стержней и пластин, основанные на условии стационарности реисснериана, взятого в форме [1]. Перемещения, силы и моменты аппроксимируются простейшими финитными функциями: в методе [2] — функциями Куранта, в методе [3] — ступенчатыми, определенными на двух сетках. Единообразная простейшая аппроксимация всех неизвестных функций делает глобальные системы сеточных уравнений неопределенными или несовместными, но позволяет после устранения этого дефекта системы получать приближенные решения для силовых факторов и перемещений с более уравновешенной, чем в методе перемещений, точностью при минимальном числе узловых неизвестных. В статье проводится сравнительный анализ способов удовлетворения граничных условий, преобразующих систему в определенную. Решения задач повышают достоверность утверждений об уровне эффективности как этих способов, так и самих методов.

1. На примере линейной задачи о статическом упругом изгибе однородного прямолинейного стержня постоянного сечения проводится сравнение способов устранения дефекта глобальной системы сеточных уравнений вариационно-сеточного метода [2], в котором для аппроксимации прогиба  $W(x)$ , угла поворота сечения  $\Theta(x)$ , перерезывающей силы  $Q(x)$  и изгибающего момента  $M(x)$  используется однотипная аппроксимация — четыре линейные комбинации  $n$  кусочно-линейных функций Куранта, содержащие неизвестные коэффициенты  $w_i, \theta_i, q_i, m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Функциями Куранта, связанными с сеткой, содержащей  $n$  узлов, определяется линейная оболочка  $H_n$ .

Условие стационарности функционала Рейсснера [1] приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} A_1 Q &= P, & A_2 M + BQ &= 0 \\ A_3 W - B\Theta &= 0, & A_4 \Theta + \beta BM &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

состоящей из четырех подсистем. Здесь  $\beta$  — податливость стержня при изгибе. Компоненты векторов  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ,  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$ ,  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ ,  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$  — приближенные значения искомых функций в узлах равномерной сетки:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \Delta$ ,  $x_3 = 2\Delta$ , ...,  $x_n = (n-1)\Delta = l$  ( $l = 1$  — длина стержня). Вектором  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T = p\Delta(1/2, 1, 1, \dots, 1, 1/2)^T$  характеризуется внешняя равномерная нагрузка интенсивности  $p$ . Матрицы  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — ленточные трехдиагональные порядка  $n$  с нулевыми на главной диагонали элементами. Исключение составляют лишь  $A_i(1, 1) = 1/2$  и  $A_i(n, n) = -1/2$ . В косой строке над главной диагональю все элементы равны  $(-1/2)$ , а под ней  $1/2$ . Матрицы  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) отличаются друг от друга только теми изменениями, которые вносятся в них вариацион-