МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 531.38

Т. БИЯРОВ, В. В. КРЕМЕНТУЛО, А. ТАЖЕКОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В рамках аналитической теории управления [1, 2] дано решение задачи стабилизации положения равновесия и перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в классических случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Полученные в явном виде управляющие моменты обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом перманентного вращения в вышеуказанных случаях.

1. Как известно, классическая задача о движении тяжелого твердого тела около одной закрепленной точки имеет давнюю историю. Начало этой истории положено в трудах Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и С. В. Ковалевской. Многие исследования посвящены задаче отыскания первых интегралов уравнений движения твердого тела, представляющих собой систему шести обыкновенных квадратических дифференциальных уравнений (уравнений Эйлера — Пуассона). Последователи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской получили ряд фундаментальных результатов в области интегрирования уравнений движения твердого тела [3]. В то же время широкое развитие получала задача нахождения частных решений уравнений движения твердого тела с одной неподвижной точкой и исследование на устойчивость найденных движений, среди которых наибольший интерес исследователей привлекли перманентные вращения. Основополагающими в задаче об устойчивости перманентных вращений твердого тела стали работы Н. Г. Четаева [4, 5], в которых впервые получены достаточные условия устойчивости. Метод построения функции Ляпунова в виде связки первых интегралов уравнений возмущенного движения использован в [6]. В [7] предложен метод построения функций Ляпунова для решения широкого круга задач стабилизации перманентных вращений твердого тела при помощи внутренних сил.

Задача стабилизации движения твердого тела при малых начальных возмущениях, обеспечивающих асимптотическую устойчивость движения, рассмотрена ранее [1]. В настоящей работе исследуется задача выбора управляющих моментов, приложенных к телу по главным осям инерции и обеспечивающих асимптотическую устойчивость в целом положения равновесия и перманентных вращений твердого тела в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. При этом управляющие моменты выбираются в виде линейных функций относительно возмущений.

2. Случай Эйлера. Пусть твердое тело движения по инерции при отсутствии внешних сил, а центр масс совпадет с неподвижной точкой O. Тогда динамические уравнения Эйлера примут вид $Ap^\cdot=(B-C)qr$, $Bq^\cdot=(C-A)rp$, $Cr^\cdot=(A-B)pq$ и допускают частное решение $p=0$, $q=0$, $r=\omega$, соответствующее вращению твердого тела вокруг оси Oz с отличной от нуля постоянной угловой скоростью ω. Это вращение является устойчи-

[1] *Джумагалиева М. Б.* Стабилизация перманентных вращений твердого тела. Автореферат дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. 01.02.01. Алма-Ата, 1989. 15 с.

вым, если оно происходит вокруг наибольшей или наименьшей из осей инерции тела; при этом устойчивость будет неасимптотической.

Принимая движение $p=0$, $q=0$, $r=\omega$ за невозмущенное и полагая $p=x_1$, $q=x_2$, $r=\omega+x_3$, получим дифференциальные уравнения возмущенного движения в виде

$$x_1^{\cdot}=A^{-1}(B-C)x_2(\omega+x_3)$$

$$x_2^{\cdot}=B^{-1}(C-A)x_1(\omega+x_3),\ x_3^{\cdot}=C^{-1}(A-B)x_1x_2$$

Будем решать задачу стабилизации движения $p=0$, $q=0$, $r=\omega$ управляющими моментами u_1, u_2, u_3, действующими по главным осям инерции. Эта задача эквивалентна задаче стабилизации положения равновесия для уравнений возмущенного движения управляемой системы

$$x_1^{\cdot}=b\omega x_2+bx_2x_3+u_1 \tag{2.1}$$

$$x_2^{\cdot}=c\omega x_1+cx_1x_3+u_2,\ x_3^{\cdot}=ax_1x_2+u_3$$

$$a=C^{-1}(A-B),\ b=A^{-1}(B-C),\ c=B^{-1}(C-A)$$

A, B, C — главные моменты инерции; x_1, x_2, x_3 — возмущения величин p, q, r, являющихся проекциями вектора мгновенной угловой скорости на главные оси инерции.

Управляющие моменты u_1, u_2, u_3 будем искать в классе линейных функций относительно возмущений вида:

$$u_1=-\alpha x_1,\ u_2=-\alpha x_2;\ u_3=-\alpha x_3\ (\alpha>0) \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. Для любого $\alpha>0$, $\alpha^2>(A-B)^2\omega^2/4AB$ управляющие моменты u_1, u_2, u_3 вида (2.2), приложенные к телу по главным осям инерции, обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом как устойчивых, так и неустойчивых перманентных вращений твердого тела в случае Эйлера.

Доказательство. Рассмотрим перманентное вращение $p=0$, $q=0$, $r=\omega$ вокруг любой из главных осей инерции. При управлении (2.2) все три канала управления будут независимы друг от друга. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V=\tfrac{1}{2}(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2) \tag{2.3}$$

Полная производная от функции Ляпунова (2.3) в силу системы (2.1) при управлениях (2.2) будет равна

$$V^{\cdot}=-A\alpha x_1^2-B\alpha x_2^2-C\alpha x_3^2+\omega(B-A)x_1x_2=-x^TQx$$

$$Q=\begin{bmatrix} A\alpha & \tfrac{1}{2}\omega(A-B) & 0 \\ \tfrac{1}{2}\omega(A-B) & B\alpha & 0 \\ 0 & 0 & C\alpha \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Для определенной отрицательности $V^{\cdot}$ достаточна положительная определенность матрицы Q, т. е.

$$\alpha^2>(A-B)^2\omega^2/4AB,\ \alpha>0 \tag{2.4}$$

Согласно теореме Барбашина — Красовского [8] перманентное вращение $p=0$, $q=0$, $r=\omega$ вокруг любой из главных осей инерции асимптотически устойчиво в целом. Заметим, что условие (2.4) можно представить в виде $\alpha^2>\tfrac{1}{4}(b+c)^2\omega^2$.

Отметим, что условие асимптотической устойчивости в малом получено в виде $\alpha^2>bc\omega^2$. Причем $\alpha^2>\tfrac{1}{4}(b+c)^2\omega^2\geqslant bc\omega^2$. Теорема доказана.

3. Асимптотически устойчивое в целом вращение волчка Лагранжа вокруг оси динамической симметрии. Эллипсоид инерции твердого тела относительно неподвижной точки есть эллипсоид вращения ($A=B$), а центр масс лежит на оси вращения эллипсоида инерции. Будем предполагать, что координаты центра масс равны $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0>0$. Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$A p^{\cdot} = (A-C) q r + m g z_0 \gamma_2 \tag{3.1}$$

$$A q^{\cdot} = (C-A) r p - m g z_0 \gamma_1, \quad C r^{\cdot} = 0$$

$$\gamma_1^{\cdot} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \gamma_2^{\cdot} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \gamma_3^{\cdot} = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

Среди движений волчка Лагранжа практический интерес представляет частное решение системы (3.1), соответствующее перманентному вращению волчка вокруг оси динамической симметрии с постоянной и отличной от нуля угловой скоростью ω.

Принимая это движение за невозмущенное и полагая $p=x_1$, $q=x_2$, $r=\omega+x_3$; $\gamma_1=y_1$, $\gamma_2=y_2$, $\gamma_3=1+y_3$, получим из уравнений (3.1) уравнения возмущенного движения твердого тела

$$x_1^{\cdot} = a x_2(\omega+x_3) + b y_2$$

$$x_2^{\cdot} = -a x_1(\omega+x_3) - b y_1, \quad x_3^{\cdot} = 0$$

$$y_1^{\cdot} = -x_2(1+y_3) + y_2(\omega+x_3)$$

$$y_2^{\cdot} = x_1(1+y_3) - y_1(\omega+x_3)$$

$$y_3^{\cdot} = x_2 y_1 - x_1 y_2, \quad a = B^{-1}(A-C), \quad b = A^{-1} m g z_0$$

В [4] показано, что необходимое условие устойчивости рассматриваемого волчка Лагранжа, состоящее в выполнении неравенства $C^2\omega^2 - 4 A m g z_0 > 0$, является также и достаточным условием устойчивости этого вращения. Уравнения Эйлера — Пуассона (3.1) допускают частное решение

$$p=0, \quad q=0, \quad r=\omega; \quad \gamma_1=0, \quad \gamma_2=0, \quad \gamma_3=1 \tag{3.2}$$

описывающее перманентное вращение волчка Лагранжа вокруг оси динамической симметрии Oz с постоянной и отличной от нуля угловой скоростью ω.

Будем решать задачу стабилизации рассматриваемого движения управляющими моментами, приложенными к телу по главным осям инерции. Уравнения возмущенного движения с управляющими моментами u_1, u_2, u_3, действующими по главным осям инерции, имеют вид

$$x_1^{\cdot} = a x_2(\omega+x_3) + b y_2 + u_1 \tag{3.3}$$

$$x_2^{\cdot} = -a x_1(\omega+x_3) - b y_1 + u_2, \quad x_3^{\cdot} = u_3$$

$$y_1^{\cdot} = -x_2(1+y_3) + y_2(\omega+x_3)$$

$$y_2^{\cdot} = x_1(1+y_3) - y_1(\omega+x_3), \quad y_3^{\cdot} = x_2 y_1 - x_1 y_2$$

где x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 — возмущения соответственно величин p, q, r; γ_1, γ_2, γ_3.

Управляющие моменты u_1, u_2, u_3, в рассматриваемом случае будем искать в виде линейных функций относительно возмущений x_1, x_2, x_3; y_1, y_2:

$$u_1 = -\alpha x_1 - (b+1) y_2 \tag{3.4}$$

$$u_2 = -\alpha x_2 + (b+1) y_1, \quad u_3 = -\alpha x_3 \ (\alpha>0)$$

Теорема 3.1. Для любого $\alpha>0$ управляющие моменты u_1, u_2, u_3 вида (3.4), приложенные к телу по главным осям инерции, обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом как устойчивых, так и неустойчивых перманентных вращений волчка Лагранжа.

Доказательство. Система (3.3) допускает тривиальный первый интеграл $y_1^2+y_2^2+(y_3+1)^2=1$. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2) \tag{3.5}$$

Полная производная по времени t от функции Ляпунова (3.5) в силу системы (3.3) при управлении вида (3.4) имеет вид: $V^\cdot=-\alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$. Заметим, что $V^\cdot=0$ только лишь при $x_1=x_2=x_3=0$, $y_1=y_2=y_3=0$. Тогда согласно теореме Барбашина — Красовского [8] перманентное вращение (3.2) волчка Лагранжа асимптотически устойчиво в целом. Теорема доказана.

4. Стабилизация перманентного вращения твердого тела в случае С. В. Ковалевской. Пусть эллипсоид инерции твердого тела с неподвижной точкой есть эллипсоид вращения, причем главные моменты инерции A, B, C связаны соотношением $A=B=2C$, центр масс лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Уравнения Эйлера — Пуассона движения тяжелого твердого тела примут вид

$$\begin{gathered} 2p^\cdot=qr,\ 2q^\cdot=-rp+a\gamma_3,\ r^\cdot=-a\gamma_2 \\ \gamma_1^\cdot=r\gamma_2-q\gamma_3,\ \gamma_2^\cdot=p\gamma_3-r\gamma_1,\ \gamma_3^\cdot=q\gamma_1-p\gamma_2 \\ x_0\neq0,\ y_0=0,\ z_0=0,\ a=C^{-1}mgx_0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

Среди движений гироскопа Ковалевской для практических приложений важным является вращение вокруг оси, несущей центр масс тела, расположенной вертикально. Если этой осью является ось Ox, то рассматриваемому вращению соответствует частное решение системы (4.1):

$$p=\omega,\ q=0,\ r=0;\ \gamma_1=1,\ \gamma_2=0,\ \gamma_3=0 \tag{4.2}$$

Для составления уравнения возмущенного движения, положим $p=\omega+$ $+x_1$, $q=x_2$, $r=x_3$; $\gamma_1=1+y_1$, $\gamma_2=y_2$, $\gamma_3=y_3$. Тогда

$$\begin{gathered} x_1^\cdot=\frac{1}{2}x_1x_3,\ x_2^\cdot=-\frac{1}{2}x_3(\omega+x_1)+\frac{1}{2}ay_3 \\ x_3^\cdot=-ay_2,\ y_2^\cdot=(\omega+x_1)y_3-x_3(1+y_1) \\ y_1^\cdot=x_3y_2-x_2y_3,\ y_3^\cdot=x_2(1+y_1)-(\omega+x_1)y_2 \end{gathered}$$

Эта система допускает первый интеграл

$$(y_1+1)^2+y_2^2+y_3^2=1 \tag{4.3}$$

Путем построения функции Ляпунова по методу Четаева в виде линейной связки первых интегралов в [6] получено необходимое и достаточное условие устойчивости движения (4.2): $a=C^{-1}mgx_0<0$. Следовательно, вращение гироскопа Ковалевской вокруг оси, несущей центр масс тела, будет устойчивым при любой величине угловой скорости вращения тогда и только тогда, когда центр масс гироскопа расположен ниже точки подвеса. При этом устойчивость будет неасимптотической.

Будем решать задачу стабилизации движения (4.2), когда управляющие моменты приложены к телу по главным осям инерции. При этом уравнения возмущенного движения с приложенными управляющими моментами u_1, u_2, u_3 имеют вид

$$\begin{gathered} x_1^\cdot=\frac{1}{2}x_1x_2+u_1,\ x_2^\cdot=-\frac{1}{2}x_3(\omega+x_1)+\frac{1}{2}ay_3+u_2 \\ x_3^\cdot=-ay_2+u_3,\ y_2=(\omega+x_1)y_3-x_3(1+y_1) \\ y_1^\cdot=x_3y_2-x_2y_3,\ y_3^\cdot=x_2(1+y_1)-(\omega+x_1)y_2 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь x_0 — отклонение центра масс от неподвижной точки; а x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 — возмущения соответственно величин p, q, r; γ_1, γ_2, γ_3. Управляющие воздействия u_1, u_2, u_3 будем рассматривать в виде

$$u_1=-bx_1,\quad u_2=-bx_2+{}^1/_2\beta y_2,\quad u_3=-bx_3+\gamma y_3 \tag{4.5}$$

где b, β, γ — постоянные, $b>0$.

Теорема 4.1. Управляющие моменты вида (4.5) с параметрами $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3>0$, β, γ, $b>0$, удовлетворяющими условиям

1. $a<0$, $\omega\neq 0$, $\gamma<0$, $\alpha^2b^2-\alpha_1\omega^2/16>0$

$$\alpha_3>\max\{-\alpha_1 a/2,\ -\alpha_2 a\}$$

$$\beta<\min\{-{}^1/_4\omega(1+\alpha_3/\alpha_2 b),\ -4b(\alpha_2 a+\alpha_3)/\alpha_1\omega\}=D$$

$$2.\ a\geqslant 0,\ \omega\neq 0,\ \alpha_2 b^2-\alpha_1\omega^2/16>0,\ \beta<D$$

обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом как устойчивого, так и неустойчивого перманентного вращения гироскопа Ковалевской.

Доказательство. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V={}^1/_2(\alpha_1x_1^2+\alpha_1x_2^2+\alpha_2x_3^2+\alpha_3y_1^2+\alpha_3y_2^2+\alpha_3y_3^2) \tag{4.6}$$

где $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3>0$. Полная производная по времени t от функции Ляпунова (4.6) в силу системы (4.4) при управлениях вида (4.5) будет равна

$$V^{\boldsymbol\cdot}=-z^TQz \tag{4.7}$$

$$z=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}\alpha_1 b & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_1 b & {}^1/_4\alpha_1\omega & -{}^1/_2\alpha_1 b & -{}^1/_2(\alpha_1 a/2+\alpha_3)\\ 0 & {}^1/_4\alpha_1\omega & \alpha_2 b & {}^1/_2(\alpha_2 a+\alpha_3) & -{}^1/_2\alpha_2\gamma\\ 0 & -{}^1/_2\alpha_1 b & {}^1/_2(\alpha_2 a+\alpha_3) & 0 & 0\\ 0 & -{}^1/_2(\alpha_1 a/2+\alpha_3) & -{}^1/_2\alpha_2\gamma & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Для знакоотрицательности $V^{\boldsymbol\cdot}$ достаточно обеспечить положительную определенность матрицы Q. Для положительной определенности матрицы Q по критерию Сильвестра все главные диагональные миноры матрицы Q должны быть положительными. Выберем неизвестные параметры из следующих неравенств:

$$\Delta_1=\alpha_1 b>0,\quad \Delta_2=\alpha_1^2b^2>0$$

$$\Delta_3=\alpha_1 b(\alpha_1\alpha_2 b^2-{}^1/_{16}\alpha_1^2\omega^2)>0$$

$$\Delta_4=-{}^1/_4\alpha_1^2\beta[{}^1/_4\omega(\alpha_2 a+\alpha_3)+\alpha_2 b\beta]-{}^1/_4\alpha_1(\alpha_2 a+\alpha_3)[b(\alpha_2 a+\alpha_3)+{}^1/_4\alpha_1\omega\beta]>0$$

$$\Delta_5={}^1/_{16}({}^1/_2\alpha_1 a+\alpha_3)(\alpha_2 a+\alpha_3)[\alpha_1\alpha_2\beta\gamma+(\alpha_1 a+\alpha_3)(\alpha_2 a+\alpha_3)]-$$

$$-{}^1/_{16}\alpha_2\gamma(\alpha_2 a+\alpha_3)[\alpha_1\alpha_2\beta\gamma+({}^1/_2\alpha_1 a+\alpha_3)(\alpha_2 a+\alpha_3)]>0$$

Нетрудно убедиться в том, что для положительности миноров $\Delta_j>0$ ($j=1,\ldots,5$) достаточно выбрать параметры из условий 1 или 2 теоремы 4.1. Выражение (4.7) при выполнении этих условий является не только знакоотрицательным, но и определенно отрицательным, так как правая часть соотношения (4.7) обращается в нуль только лишь при $z=0$. Отсюда, в силу первого интеграла (4.3), $z=0$ влечет за собой $y_1=0$. Следовательно, $V^{\cdot}=0$ только лишь при $x_1=x_2=x_3=0$; $y_1=y_2=y_3=0$ и $V^{\cdot}$ определенно отрицательна. Все условия теоремы Барбашина — Красовского об устойчивости в целом выполнены. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений/Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
2. *Летов А. М.* Динамика полета и управления. М.: Наука, 1969. 359 с.
3. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1963. 288 с.
4. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа/Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 430–431.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
6. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.
7. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977. 263 с.
8. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.

Алма-Ата, Москва

Поступила в редакцию 17.X.1989