МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 539.374

Л. М. ФЛИТМАН

ДОЗВУКОВОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ ЗАОСТРЕННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

Рассматривается установившееся обтекание полубесконечных тонких тел вращения упругопластической средой с учетом трения.

Аналогичные задачи обтекания в газовой динамике исследованы подробно с использованием линеаризации уравнений [1–4].

В пространственных задачах тел твердой среды такой подход неприемлем — нельзя свести проблему обтекания тонкого тела к решению уравнений линейной теории упругости из-за конечности деформаций. Действительно, попытка вычисления радиальной деформации на поверхности тела $r=r_0(x)$ по линейной теории приводит к результату: $e_r=u_r/r_0=1$, где $u_r=r_0$ – радиальное смещение точек среды (r, β, x – цилиндрические координаты). Использование теории конечных деформаций не изменяет этой оценки деформаций, а значит напряжения должны иметь порядок модулей упругости. Таких напряжений без разрушения или перехода в пластическое состояние не может выдержать большинство материалов. Этим обуславливается выбор упругопластической модели.

Подчеркнем, что в плоских задачах такая трудность не возникает и можно решать задачи расклинивания в рамках линейной теории упругости [5–8].

При решении задач проникания тонких тел без трения в упругопластическое полупространство с учетом анизотропии, неоднородности и разрушения [9–11] показано, что пластическая зона по форме подобна форме тела. Однако учет трения существенен при вычислении силы воздействия потока на тело. Кроме того, в публикуемой работе формулируются условия на параметры, при которых следует пользоваться теми или иными упрощениями задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим полубесконечное абсолютно жесткое тело с геометрией поверхности

$$r=r_0(x) \quad (x>0), \quad r_0(0)=0, \quad r_0'(x)>0 \tag{1.1}$$

$$\max r_0'(x)=\delta\ll 1 \tag{1.2}$$

Неравенство (1.2) есть определение тонкого тела. Обычно подразумевается, что при $x\to\infty$ функция $r_0(x)$ имеет горизонтальную асимптоту. На тело набегает однородный ненапряженный при $x\to-\infty$ поток упругопластической среды, направленный вдоль оси x. Напряжения и скорости частиц нормируем на τ_s – предел текучести и на скорость потока c. При $x\to-\infty$ выполнены следующие условия для безразмерных вектора скорости частиц $\mathbf{u}$, давления p и девиатора тензора напряжений $\mathbf{T}=\{\tau_{ij}\}$:

$$\mathbf{u}_\infty=(1,\ 0,\ 0), \quad p_\infty=0, \quad \mathbf{T}_\infty=0 \tag{1.3}$$

Около тела, по предположению, имеется пластическая зона с границей $r=r_1(x)$, определяемой по ходу решения задачи. Однако заранее предполагается, что

$$r_1'(x)=O(\delta) \tag{1.4}$$

Условия правомерности равенства (1.4) будут установлены ниже. Вне указанной границы материал находится в упругом состоянии.

Примем для простоты, что среда несжимаема (плотность ρ постоянна). Сжимаемость в упругой и пластической зоне с учетом принятых гипотез и уровня точности окончательных результатов оказывается несущественной. В пластической зоне уравнения несжимаемости, закона сохранения импульса, течения Сен-Венана — Мизеса и условие пластичности имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rx})=-\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_r-2\tau_r-\tau_\beta)+f^{-2}\left(u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\tau_r-\tau_\beta}{r}=-\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial x}+f^{-2}\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}\right) \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_r/\tau_r=\varepsilon_\beta/\tau_\beta=\varepsilon_{rx}/\tau_{rx}=\varepsilon_x/\tau_x \tag{1.8}$$

$$J(\mathbf{T})=\tau_r^2+\tau_\beta^2+\tau_\beta\tau_r+\tau_{rx}^2=1 \tag{1.9}$$

Здесь $f^2=\tau_S/\rho c^2$, $\sigma_r,\ldots$ — напряжения, $\varepsilon_r,\ldots$ — скорости деформаций и исключено напряжение σ_x.

В упругой зоне для описания полей напряжений и скоростей воспользуемся продольным φ и поперечным $\boldsymbol{\psi}$ потенциалом скорости. В силу осевой симметрии вектор $\boldsymbol{\psi}$ имеет единственную отличную от нуля компоненту вдоль направления β: $\psi(r, x)$. Деформации в упругой зоне будем предполагать малыми.

Полная система уравнений для неизвестных функций p, φ, ψ, вектора $\mathbf{u}$, тензоров девиатора напряжений $\mathbf{T}$, деформаций $\mathbf{E}$, скоростей деформаций $\mathbf{E}^0$ в упругой зоне и замыкающие задачу условия примут вид

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} \tag{1.10}$$

$$\Delta\varphi=0 \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r^2}+\gamma^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\qquad \gamma^2=1-\frac{c^2}{b^2}>0 \tag{1.12}$$

$$\mathbf{E}^0={}^1/_2[\operatorname{grad}\mathbf{U}+(\operatorname{grad}\mathbf{U})^*],\qquad \mathbf{E}=\int\limits_{-\infty}^{x}\mathbf{E}^0|_{r=\mathrm{const}}\,dx \tag{1.13}$$

$$\mathbf{T}=m^{-1}\mathbf{E},\qquad m=\tau_S/2\mu \tag{1.14}$$

$$p=-f^{-2}\partial\varphi/\partial x \tag{1.15}$$

где b — скорость упругих поперечных волн, μ — модуль сдвига

$$u_n=0,\qquad \tau_{n\tau}=-\tau_0(x)\qquad (r=r_0(x)) \tag{1.16}$$

$$[J(\mathbf{T})]=[\mathbf{u}]=[\boldsymbol{\sigma}_n]=0\qquad (r=r_1(x)) \tag{1.17}$$

$$\iiint\limits_V J(\mathbf{T})\,dV<\infty,\qquad \iiint\limits_V p^2\,dV<\infty \tag{1.18}$$

$$\varphi|_\infty=\psi|_\infty=0 \tag{1.19}$$

Здесь звездочка сверху означает операцию транспонирования матрицы, квадратные скобки — скачок величины при переходе через границу, n и τ — нормаль и касательная к указанным поверхностям.

В определении тензора деформаций (1.13) учтена близость линий тока в упругой зоне к невозмущенным линиям тока r=const и условия (1.3). На поверхности обтекаемого тела поставлены условия непроникания и трения. Функция $\tau_0(x)$ считается заданной, но в основном будем использовать значение

$$\tau_0(x)=1 \qquad (r=r_0(x)) \tag{1.20}$$

которое получается из альтернативного условия [12]:

$$\tau_{n\tau}=\operatorname{sgn} u_\tau\cdot\min(1,\ \nu|\sigma_{nn}|) \tag{1.21}$$

(ν — коэффициент сухого трения) при больших значениях нормального напряжения.

Первое из условий на границе упругой и пластической зон (1.17) означает, что переход в пластическое состояние подготавливается в упругой зоне, остальные — обычные следствия законов сохранения на линии слабого разрыва $r=r_1$. Отсутствие сильных разрывов обусловлено принятыми гипотезами.

В условиях (1.18) V — произвольный конечный объем вне жесткого тела. Ниже будет показано, что граница между упругой и пластической зонами имеет острие, совпадающее с вершиной тела. Условия (1.18) означают отсутствие источников в этой особой точке.

Ниже будет построено асимптотическое решение нелинейной задачи (1.5)—(1.19) при $\delta\to 0$. Сначала преобразуются уравнения в пластической области и выясняется, что при различных соотношениях между параметрами δ и f преобразованные уравнения выглядят по разному. Представления поля в этой зоне сначала будут содержать произвол, который исчезает после удовлетворения условиям (1.17). В упругой зоне будут построены потенциалы, удовлетворяющие условиям (1.18), (1.19), и содержащие неопределенные элементы. Будет найдена асимптотика потенциалов при малых r и x. Из условий непрерывности смещений и напряжений находятся свободные элементы в представлении упругого поля, из первого условия (1.17) находится граница зон и, наконец, из непрерывности $\sigma_{n\tau}$ и u_τ полностью определяется поле в пластическом слое, окружающем тело.

2. Поле в пластической зоне. Введем новый масштаб вдоль направления r и обозначения:

$$r=\delta\cdot y, \qquad y_0(x)\equiv\delta^{-1}r_0(x), \qquad y_1(x)=\delta^{-1}r_1(x) \tag{2.1}$$

Примем по аналогии с газодинамическими задачами [4] предположение о малости возмущения скорости

$$u_r=\delta w_r, \qquad u_x=1+\delta w_x \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial w_r}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{\beta\beta}=\frac{w_r}{y}, \qquad \varepsilon_{xx}=\delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{rx}={}^1/_2\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\delta\cdot\frac{\partial w_r}{\partial x}\right)$$

В отличие от [4] возмущение u_x имеет порядок δ, а не δ^2, из-за второго условия (1.16) и конечности скоростей деформаций. Из условия непроникания (1.16) и уравнения неразрывности путем подстановки (2.1), (2.2) при учете (2.3) и отбрасывании членов порядка δ находим возмущение w_r

$$w_r=y_0'(x)\,y_0(x)\cdot y^{-1} \tag{2.4}$$

а затем из (1.8), (1.9), (2.3), (2.4) следует (с точностью до $O(\delta)$):

$$\varepsilon_r=-\varepsilon_\beta=-\frac{y_0y_0'}{y^2}, \qquad \varepsilon_{rx}={}^1/_2\frac{\partial w_x}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{xx}=0 \tag{2.5}$$

$$\tau_x=0, \quad \tau_\beta=-\tau_r \tag{2.6}$$

$$\tau_r=-(1-\tau_{rx}^2)^{1/2} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial y}=\frac{2\tau_{rx}}{(1-\tau_{rx}^2)^{1/2}}\cdot\frac{y_0 y_0'}{y^2} \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) означает, что после определения компоненты τ_{rx} возмущение w_x находится квадратурой. Преобразуем уравнения сохранения импульса (1.6) и (1.7), оставляя члены $O(\delta^2)$:

$$\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial y}+\frac{\tau_{rx}}{y}=-\delta\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_r-\tau_r)+\frac{\delta^2}{f^2}\left(w_r\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial y}+\frac{2\tau_r}{y}=-\delta\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial x}+\frac{\delta^2}{f^2}\left(w_r\frac{\partial w_r}{\partial y}+\frac{\partial w_r}{\partial x}\right) \tag{2.9}$$

Из этих соотношений видно, что существенную роль играет отношение $(\delta/f)^2$. Величина f может меняться в широких пределах при принятом ограничении о дозвуковом характере потока, ибо для большинства материалов $\tau_S\ll\mu$. Может быть $\delta\leqslant f^2$, а тогда

$$(\delta/f)^2\leqslant\delta \tag{2.10}$$

Такой случай соответствует умеренным скоростям потока и очень тонким телам. Ниже ему будет уделено основное внимание.

Уравнения (2.9) в главном принимают вид статических уравнений для напряжений

$$\partial\tau_{rx}/\partial y+\tau_{rx}/y=\partial\sigma_r/\partial y+2\tau_r/y=0 \tag{2.11}$$

Они возникли из-за условия «тонкости» тела, что привело к малым силам инерции. В [9—12] первое уравнение (2.11) отсутствовало, так как полагалось $\tau_{rx}=0$, второе — фигурировало в том же виде, но без обсуждения условия применимости.

Ниже будет кратко рассмотрен случай, когда силы инерции еще малы по сравнению с единицей, но уже больше членов имеющих порядок δ:

$$\delta\ll(\delta/f)^2\ll1 \tag{2.12}$$

Тогда влияние этих сил будет учтено, как малое возмущение. Случай $\delta/f=O(1)$ рассматривать не будем. Он соответствует малым значениям предела текучести или «не очень тонкому телу» или большой скорости набегающего потока, а пластическая зона будет обширной. При выполнении неравенства $(\delta/f)^2\gg1$ имеем высокоскоростное обтекание. Пример задачи такого рода «обтекание конуса» рассмотрен в [13].

Для удовлетворения краевым условиям понадобятся в дальнейшем выражения для напряжений на площадках пологого меридиана $r=\delta y_i(x)$, $i=0, 1$ с точностью $O(\delta)$:

$$\sigma_{nr}=\sigma_{rr}-\delta y_i'\tau_{rx}, \qquad \sigma_{nx}=\tau_{rx}-\delta y_i'\sigma_x \tag{2.13}$$

$$\tau_{n\tau}=-\tau_{rx}+\delta y_i'(\tau_x-\tau_r) \tag{2.14}$$

Формулы (2.13), (2.14) после отбрасывания малых величин позволяют привести тангенциальное условие на обтекаемом теле (1.16) и условия непрерывности векторов скорости и напряжений на границе упругой и пластической зон (по предположению (1.4) она также является пологим меридианом) к виду

$$\tau_{rx}=\tau_0(x), \qquad y=y_0(x) \tag{2.15}$$

$$[\tau_{rx}]=[\sigma_{rr}]=0, \qquad y=y_1(x) \tag{2.16}$$

Понадобится выражение проекции на направление x равнодействующей напряжений, действующих на участке поверхности тела от носовой части длины l. С учетом (2.13), (2.15) находим

$$F=2\pi\int_0^l \sigma_{nx}r_0\,dx=2\pi\delta\int_0^l(\tau_0-\delta y_0'\sigma_{rr})y_0\,dx \tag{2.17}$$

Асимптотически наибольший вклад в силу воздействия потока на тело дают касательные напряжения, если не считать взаимодействие потока с телом идеально гладким.

Опишем окончательно представление поля в пластической зоне при условии (2.10). Задача определения компоненты девиатора напряжений τ_{rx} отделяется. Из (2.11) и (2.15) имеем

$$\tau_{rx}=\tau_0(x)y_0(x)/y \tag{2.18}$$

После этого компоненты τ_{rr}, τ_β определяются по формулам (2.6), (2.7), возмущение w_x – интегрированием (2.8), радиальное возмущение скорости w_r дается формулой (2.4), скорости деформаций – формулами (2.5). Окончательные выражения для напряжения σ_r и поправки w_x из второго уравнения (2.11) и (2.8) удобно представить квадратурами в виде

$$\sigma_r=\sigma_1-2\int_{\tau_1}^{\tau_{rx}}(1-\tau^2)^{1/2}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$w_x=w_1-\frac{2y_0'(x)}{\tau_0(x)}\int_{\tau_1}^{\tau_{rx}}\frac{\tau\,d\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}} \tag{2.19}$$

Интегралы в (2.19) легко вычисляются, но осталось определить границу $y_1(x)$ и величины $\sigma_1=\sigma_r(x, y_1)$, $w_1=w_x(x, y_1(x))$, $\tau_1=\tau_{rx}(x, y_1(x))$ – значения искомых функций на этой границе. При этом функция $\tau_1(x)$ становится известной, после того как будет найдена граница $y_1(x)$, благодаря формуле (2.18).

3. Поле в упругой зоне. Составим решения уравнений (1.11), (1.12) путем суперпозиции источников, распределенных на полупрямой $r=0$, $x\geqslant 0$:

$$\varphi=-\int_0^\infty\frac{q(\xi)d\xi}{R_1},\qquad \psi=-\frac{1}{r}\int_0^\infty s(\xi)\left(1+\frac{x-\xi}{R_2}\right)d\xi$$

$$R_1^2=(x-\xi)^2+r^2,\qquad R_2^2=(x-\xi)^2+\gamma^2r^2 \tag{3.1}$$

В формулах (3.1) функции q и s пока произвольные, но обеспечивают существование интегралов, функции φ и ψ исчезают на бесконечности и регулярны вне полупрямой $r=0$, $x\geqslant 0$. Из (1.10), (3.1) имеем выражения для возмущений скорости v_r, v_x ($\mathbf{V}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_\infty$):

$$v_r=\frac{\partial}{\partial r}(\varphi+\psi_1),\qquad v_x=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\gamma^2\psi_1),\qquad \psi_1=-\int_0^\infty\frac{s}{R_2}d\xi \tag{3.2}$$

Используемый здесь метод источников широко применяется [9–11]. Однако представление поперечного потенциала иное, чем в [9–11]. Оно приводит к одинаковым особенностям у продольной и поперечной части решения вблизи оси и позволяет удовлетворить условиям (1.18) в окрестности острия. В соответствии с (1.9), (1.13), (1.14), (1.15), (3.1), (3.2) имеем

$$p=f^{-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \tau_{rx}=\frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial r}[2\varphi+(1+\gamma^2)\psi_1] \tag{3.3}$$

$$\tau_r=-\tau_\beta-\tau_x,\qquad \tau_x=v_x m^{-1} \tag{3.4}$$

$$\tau_\beta=\frac{1}{mr}\int\limits_{-\infty}^{x} v_x(r,\xi)\,d\xi \tag{3.5}$$

Относительно функций q и $s(x)$ выскажем гипотезы: при $x>0$ они имеют две непрерывных производных, а при $x=0$:

$$q(0)=s(0)=0,\qquad |q'(0)|<\infty,\qquad |s'(0)|<\infty \tag{3.6}$$

Можно показать, что в предположениях (1.1), (3.6) условия (1.18) будут выполнены и, более того, в окрестности острия поведение искомых функций будет следующим: v_r и τ_{rx} — ограничены, v_x, p, τ_r, τ_x, τ_β имеют логарифмическую особенность. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать схему обтекания, в которой пластическая зона начинается на острие тела, а непосредственно перед телом материал находится в упругом состоянии — столь слабая особенность у напряжений не противоречит гипотезе об упругом поведении материала впереди острия. Таким образом, картина обтекания заостренных тонких осесимметричных тел совсем иная, чем при обтекании затупленных тел или в задачах резания, расклинивания при плоской деформации.

Не приводя выкладок напишем теперь главные члены разложений по r для скоростей и напряжений при $r\to 0$, исходя из соотношений (3.1)–(3.4):

$$v_r=2(q(x)+s(x)+O(r\ln r))/r \tag{3.7}$$

$$v_x=2[q'\ln r+s'\gamma^2\ln(\gamma r)]-h_q'(x)+\gamma^2 h_s'(x)+O(r^2\ln r) \tag{3.8}$$

$$\tau_{rx}=\frac{1}{mr}[2q'+(1+\gamma^2)s']+O(r\ln r) \tag{3.9}$$

$$\tau_r=-\frac{2}{mr^2}\int\limits_0^x [q(\xi)+s(\xi)]\,d\xi+O(\ln r) \tag{3.10}$$

$$p=O(\ln r) \tag{3.11}$$

$$h_q(x)=\int\limits_0^\infty q'(\xi)\ln 2|x-\xi|\cdot \operatorname{sgn}(x-\xi)\,d\xi$$

Эти формулы понадобятся при нахождении пяти неизвестных функций $q(x)$, $s(x)$, $r_1(x)$, σ_1, w_1 из пяти условий сопряжения решений на неизвестной границе (1.17), (2.16).

4. Определение неизвестных функций, анализ решения. Условия непрерывности радиальной скорости и напряжения τ_{rx} в силу (2.4), (2.18), (3.7), (3.9) приводят к системе двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями (3.6), решение которой приведем сразу:

$$q=\frac{\delta}{2(1-\gamma^2)}\left\{f(x)-\frac{1+\gamma^2}{2}\delta(y_0^2)'\right\}$$

$$s=\frac{\delta}{2(1-\gamma^2)}\{\delta(y_0^2)'-f(x)\},\qquad f(x)=2m\int_0^x y_0(\xi)\tau_0(\xi)d\xi \tag{4.1}$$

$$m=\tau_s/2\mu$$

Для большинства сред $m\ll 1$. Поэтому без дополнительных предположений нельзя установить старшинство членов в (4.1). Заметим, что поле в упругой зоне определено еще до того, как найдена граница этой зоны. На этой границе из формул (2.18), (3.10), (4.1) и в силу непрерывности τ_{rx} (2.16) имеем решение для компонент τ_r и τ_{rx}:

$$\tau_r=-\frac{1}{2m}\left(\frac{y_0}{y_1}\right)^2,\qquad \tau_{rx}=\tau_0\frac{y_0}{y_1} \tag{4.2}$$

Из (3.5), (3.8), (3.6) следует $|\tau_x|\ll\tau_{rx}$, а значит с принятой точностью $J=\tau_{rr}^2+\tau_{rx}^2$. Теперь условие непрерывности инварианта J и равенства $J=1$ на границе зон позволяют получить сначала биквадратное уравнение для определения границы зон, а затем и его решения с точностью до $O(m^2)$:

$$y_0^2/y_1^2=2m(1-m\tau_0^2) \tag{4.3}$$

или с точностью до $O(m)$:

$$y_0^2/y_1^2=2m,\qquad r_1=(\mu/\tau_s)^{1/2}r_0(x) \tag{4.4}$$

Формула (4.4) совпадает с результатом [9—11]. Таким образом, учет касательных напряжений мало влияет на размер пластической зоны и граница зон оказывается подобной форме обтекаемого тела. В задачах обтекания цилиндра и шара (затупленные тела) также имело место подобие границ тела и зоны с коэффициентами $(2\mu/\tau_s)^{1/2}$ и $(2\mu/\tau_s)^{1/3}$. Значит размером пластической зоны управляет отношение μ/τ_s в степени, которая зависит от формы тела.

Формула (4.4) и предыдущие показывают, что условием применимости гипотезы «тонкости» пластической области является следующее соотношение порядков параметров δ и m:

$$\delta\ll\sqrt{m} \tag{4.5}$$

С учетом неравенства $c<b$ (дозвуковой поток) из (4.5) следует $\delta^2\ll f^2$. Таким образом, в случаях $\delta/f\gg 1$ и $\delta/f=O(1)$ пластическую зону нельзя считать тонкой. Физически это объясняется тем, что при $\tau_s\to 0$ (и замороженных прочих параметрах) пластическая зона неограниченно расширяется при каждом фиксированном значении $x>0$.

В выражении для поправки w_x из (2.19) можно пренебречь членом w_1. В силу (1.17), (3.6), (3.8) он является малым и его вычислять не будем. Для оставшихся неопределенных элементов σ_1 и τ_1 из (3.11), (4.2), (4.3), пренебрегая слагаемыми порядка m и выше, получим

$$\sigma_1=\tau_{rr}|_{y=y_1}=m\tau_0^2-1,\qquad \tau_1=\tau_0\sqrt{2m} \tag{4.6}$$

а для вычисления нормального напряжения на границе тела σ_0 воспользуемся формулой (2.19), полагая $\tau_{rx}=\tau_0$:

$$-\sigma_0=\ln(2/m)+2\sqrt{1-\tau_0^2}-1-2\ln\left(1+\sqrt{1-\tau_0^2}\right)+{}^1/_2 m\tau_0^2 \tag{4.7}$$

Видно, что нормальное напряжение в данной точке зависит от величины касательного напряжения, действующего именно в этой точке. При сделанных предположениях о параметрах δ, m, f величина σ_0 не зависит ни от формы тела, ни от скорости потока. Если $\tau_0(x)$ известна, то σ_0 полностью определяется. При $\tau_0=0$ из (4.7) следует результат [9, 10]. Приведем значение σ_0 при $\tau_0=1$, 0:

$$-\sigma_0=\ln\frac{2}{m}-1+\frac{m}{2}, \qquad -\Sigma_0=\tau_s\left(\ln\frac{4\mu}{\tau_s}-1+\frac{\tau_s}{4\mu}\right), \qquad \tau_0=1 \tag{4.8}$$

где $\Sigma_0=\tau_s\sigma_0$ — размерное напряжение

$$-\Sigma_0=\tau_s(1+\ln\mu/\tau_s), \quad \tau_0=0 \tag{4.9}$$

Формулы (4.8), (4.9) дают очень близкие значения σ_0 — касательное напряжение слабо повлияло на величину нормального давления. Важно, что, как и для затупленных тел, давление определяется величиной $\ln(\mu/\tau_s)$ и этот факт может быть полезен при обработке экспериментальных данных.

В общем случае естественным является условие (1.21). При подстановке в него зависимости $\sigma_0=\sigma_0(\tau_0)$ оно будет представлять собой уравнение для τ_0. Координата x явно не входит, следовательно $\tau_0=\mathrm{const}$ и $\sigma_0=\mathrm{const}$ на всей поверхности тела. Какие именно значения τ_0, σ_0 получаются, зависит от параметров m и ν (то есть выполнено условие пластичности или условие сухого трения). При $m=0{,}5$ формула (4.8) дает $\sigma_0=-1$ и при $m<0{,}5$ и любом ν из (1.21) следует (1.20). Поскольку $m<0{,}5$ для большинства материалов в дальнейшем при вычислении σ_0 будем пользоваться формулой (4.8).

Рассмотрим носовую часть полубесконечного тела длины l и вычислим силу воздействия на нее по формуле (2.17). В размерных переменных окончательный результат принимает вид

$$F=\tau_s(S-\sigma_0(m)\cdot S_l) \tag{4.10}$$

где S и S_l — боковая поверхность и площадь поперечного сечения тела с абсциссой l, $\sigma_0(m)<0$.

Слагаемые в (4.10) неравноценны, так как боковая поверхность у тонкого тела на порядок больше площади данного сечения. Отношение второго слагаемого к первому оценивается величиной $\delta\ln\delta$. Поэтому главную часть силы воздействия потока на тело образуют касательные напряжения. Этот очевидный факт не был замечен ранее теоретиками. В экспериментальных работах по внедрению тонких тел в пластилин [14—15] опытные данные обрабатывались, опираясь на формулу $F_1=S\tau_s$.

В рамках принятой точности напряжения в фиксированном сечении не зависят от граничных условий по соседству. Это наводит на мысль о справедливости гипотезы плоских сечений [2, 3]. Для окончательного суждения можно применить эту гипотезу к рассматриваемой задаче и решить получившуюся при этом модельную задачу о медленно расширяющемся и движущемся вдоль оси цилиндре. Непосредственное сравнение формул для напряжений и для границы зон представленного решения и решения модельной задачи показывает их полное совпадение в главном. Таким образом, при принятых ограничениях и сделанных предположениях можно считать оправданной гипотезу плоских сечений. В частности, формулу для силы сопротивления (как и все остальные формулы) можно распространить на задачи проникания и обтекания в кавитационном режиме. Важно подчеркнуть, что последовательное исследование задачи, предпринятое в публикуемой работе, позволило найти условия применения гипотезы плоских сечений:

$$\delta f^{-2}\leqslant 1, \quad \delta\ll\sqrt{m} \tag{4.11}$$

Кроме того, в работах [9—11], основанных на гипотезе плоских сечений, изучались движения тел, с нулевыми касательными напряжениями на теле. Здесь это ограничение снято.

5. Об учете влияния скорости потока на величину силы сопротивления. При соотношении параметров (2.12) ограничимся изложением основных результатов и выводов. В этом случае влияние сил инерции на скорости и напряжения можно учесть методом возмущений. Скорость потока при этом окажется в числе параметров, явно входящих в выражения некоторых искомых функций. Изложенное в п. 2—4 показывает, что если пренебрегать членами порядка δ и меньшими, то выражения для радиальной и продольной скоростей (2.4) и (2.19) (величиной w_1 в (2.19) по прежнему пренебрегаем), а так же формула для границы зон (4.4) и значения σ_r на ней (4.6) остаются прежними. Приведем ниже лишь результат решения линейной задачи для поправок к напряжениям (2.9) с сохранением в (2.9) членов $O(\delta^2/f^2)$ для конуса $r_0=\delta\cdot x$. В выражении для силы сопротивления (4.10) вместо σ_0 должна стоять теперь величина

$$\sigma_*=\sigma_0(m)+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{f^2}\left[\ln\frac{1}{2m}+2{,}545\right]$$

Для конуса поправка к нормальному напряжению не зависит от x. Перепишем с учетом сказанного формулу (4.10) в виде

$$\frac{F}{S_l}=c_x\frac{\rho c^2}{2}+\tau_s\cdot q;\qquad c_x=\delta^2\left(\ln\frac{\mu}{\tau_s}+2{,}545\right)$$

$$q=1/\delta+\ln(4\mu/\tau_s)-1+\tau_s/4\mu \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что эта формула выведена при условиях

$$\tau_s/(\rho c^2)\ll\delta\ll(\tau_s/\mu)^{1/2},\quad \tau_s/\mu\ll1 \tag{5.2}$$

Заслуживает внимания наличие в коэффициенте сопротивления c_x слагаемого $\ln(\mu/\tau_s)$. Именно через него обнаруживают себя прочностные свойства среды, в величине, имеющей традиционно гидродинамический смысл. Может вызвать недоумение, что при $\tau_s\to0$ будет $c_x\to0$. Однако зависимость c_x от τ_x слабая и прежде чем коэффициент c_x возрастет значительно, нарушатся условия применимости формул (5.1) — неравенства (5.2).

Для приложений небезразлично, какое значение параметра может считаться достаточно малым, чтобы вычисления наиболее важных величин оставались в рамках заданной точности. Примем в качестве такой величины нормальное напряжение на теле σ_0. При малой ошибке в величине σ_0 неточность в определении силы воздействия потока на тело вследствие строения формулы (4.10) будет еще меньше. Ориентировочные значения параметров δ и f^2, обеспечивающих ошибку в 5—10% при определении напряжения σ_0 можно получить из точного решения модельной задачи о расширяющемся и движущемся вдоль оси цилиндре, окруженном пластической средой. Они таковы $\delta<0{,}3$, $f^2>0{,}25$.

Отсюда, в частности, следует, что неравенство (4.5), управляющее размером пластической зоны, не столь существенно для определения напряжений на поверхности тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 951–953.
2. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
3. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
4. *Франкль Ф. И., Карпович Е. А.* Газодинамика тонких тел. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 175 с.
5. *Баренблат Г. И., Черепанов Г. П.* О расклинивании хрупких тел // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 667–682.

6. *Звягин А. В.* Дозвуковое движение твердого тела в упругой среде // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1979. № 3. С. 60–64.
7. *Симонов И. В.* Трансзвуковое обтекание тонкого твердого тела упругой средой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 114–122.
8. *Симонов И. В.* О хрупком расклинивании кусочно-однородной упругой среды // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 275–283.
9. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А.* Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 75–84.
10. *Багдоев А. Г., Минасян Б. Ц.* Исследование проникания тонкого твердого тела в металлы // Изв. АН АрмССР. Сер. техн. н. 1979. Т. 32. № 3. С. 19–25.
11. *Багдоев А. Г.* Проникание тонкого тела вращения в упругую среду // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 5. С. 17–37.
12. *Григорян С. С.* Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 846–849.
13. *Флитман Л. М.* О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 131–137.
14. *Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П.* Исследование движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 159–165.
15. *Бивин Ю. К., Викторов В. В., Коваленко Б. Я.* Определение динамических характеристик грунтов методом пенетрации // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 105–110.

Москва

Поступила в редакцию
12.IX.1989