

УДК 539.374

© 1991 г.

В. К. ВОСТРОВ

ЗАРОЖДЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ, НАГРУЖЕННОЙ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Решения линейной теории упругости приводят к неограниченным или неоднозначным значениям напряжений и деформаций у сингулярных концентраторов напряжений (трещины, штампы, дислокации, точки разрыва граничных напряжений). Для таких концентраторов классические условия возникновения пластических деформаций (или разрушения), выраженные через напряжения в точке, заменяются на условие пластичности, выраженное через усредненные в некотором объеме (постоянного для данного материала диаметра Δ) упругие деформации. Такое условие приводит к представлению начальной пластической деформации как разрывной в пространстве (сдвиги в упругом теле) и скачкообразной во времени. Непрерывные зависимости — это рациональное упрощение при развитой пластичности, когда возникает большое количество сдвигов, чередующихся друг за другом при малых изменениях нагрузки. Рассматривается задача возникновения и начального распространения пластических деформаций в упругой полуплоскости (плоская деформация) под действием постоянного нормального давления, приложенного на конечном участке ее границы. Пластическая деформация образуется сдвигами одних атомных плоскостей относительно других и моделируется разрывами касательных перемещений вдоль симметрично расположенных прямолинейных отрезков с началом в точках разрыва граничного давления. Длина полос скольжений (сдвигов) находится из условия ограниченности напряжений на их концах. Развитие полос скольжений возможно от границы тела в любом направлении, вызывающем разгрузку наиболее напряженных микрообъемов (диаметра Δ); наиболее вероятным считается направление, вызывающее максимальную разгрузку этих микрообъемов у границ тела.

1. Возникновение первичных полос скольжений. Пусть на поверхности полуплоскости (плоская деформация) действует кусочно-постоянное давление P . В упругой стадии нагружения компоненты напряженного состояния определяются формулами [1]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \end{aligned} \right\} = -(1/2\pi)P[2(\theta_1 - \theta_2) \pm \sin 2\theta_1 \mp \sin 2\theta_2] \quad (1.1)$$

$$\tau_{xy}^e = (1/2\pi)P(\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2), \quad \sigma_z^e = -(1/\pi)2\nu P(\theta_1 - \theta_2)$$

где схема определения углов $\theta_{1,2}$ показана на фиг. 1. Полагая в (1.1) $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \theta$, получаем асимптотическое представление поля напряжений у края нагруженного участка [1]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \end{aligned} \right\} = -1/2 P(2\theta \pm \sin 2\theta)/\pi, \quad \sigma_z^e = -2\nu P\theta/\pi \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}^e = -1/2 P(1 - \cos 2\theta)/\pi$$

На основании приведенных формул главные напряжения, действующие в плоскости xy , равны

$$\sigma_{1,2}^e = -P(\gamma \pm \sin \gamma)/\pi, \quad \gamma = \theta_1 - \theta_2$$

Здесь γ — угол, под которым виден загруженный отрезок из точки (x, y) , $0 \leq \gamma \leq \pi$.

Из этих формул следует, что наименьшим главным напряжением является σ_1^0 , а наибольшим σ_2^0 и σ_3^0 в зависимости от величины коэффициента Пуассона ν . Следовательно, наибольшим касательным напряжением будет одна из величин

$$\tau_{1,2}^0 = P/\pi \cdot \sin \gamma, \quad \tau_{1z}^0 = P/2\pi | (1-2\nu)\gamma - \sin \gamma |$$

Максимальные значения этих напряжений равны P/π , $P(1-2\nu)/2$ и достигаются при $\gamma = \pi/2$ и $\gamma = \pi$ соответственно. Приравнивая эти значения, получаем величину $\nu_* = 0,18$ коэффициента Пуассона, такую, что, если $\nu > \nu_*$ то пластическая деформация начинается скольжениями в плоскости xy .

Из асимптотических формул (1.2) следует, что напряженное состояние у края нагруженного участка зависит только от полярного угла θ , т. е. оно является разрывным (неоднозначным) в точках $x = \pm l$ границы полуплоскости. Понятие напряжения (деформации) в точке теряет смысл, так же как и в особых точках с неограниченными производными от перемещений (края штампов, трещин, ядра дислокаций и др.). Условия возникновения пластических деформаций (или хрупкого разрушения) будем характеризовать усредненными в некотором объеме постоянного для данного материала диаметра Δ упругими деформациями $\varepsilon_{1,3}$ и соответствующим упругим объемным расширением ε [2]. Здесь деформация $\varepsilon_{1,3}$ представляют собой экстремальные значения ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_3$) усредненного на диаметре указанной сферы относительного удлинения $\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} l_i l_j$, где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций в точке, l_i — направляющие косинусы диаметра. Наибольшая разность $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ усредненных в сфере диаметра Δ деформаций определяет величину макросдвига Γ и касательного макронапряжения $T = G\Gamma$, G — модуль сдвига. Линия, по которой направлен макросдвиг, делит пополам угол с экстремальными деформациями.

Считается, что деформации тела подчиняются закону Гука до тех пор, пока максимальная величина касательного макронапряжения не достигнет определяемого в эксперименте предела текучести на сдвиг

$$\max |T| < \tau_s \quad (1.3)$$

В случае нарушения этого условия в теле возникают локализованные в полосах скольжений пластические деформации, образованные скольжениями одних атомных плоскостей относительно других. Указанные скольжения в сплошной модели твердого тела моделируются непрерывно распределенными вдоль некоторых поверхностей (линий) разрывами касательных перемещений. Развитие линий скольжений возможно от границы тела в любом направлении, вызывающем разгрузку наиболее напряженных микрообъемов (диаметра Δ) у границы тела. Наиболее вероятным считается направление, приводящее к максимальной разгрузке указанных микрообъемов.

Величина структурного параметра Δ определяется таким образом, чтобы нераспространение исходной трещины в испытуемом теле при циклическом нагружении происходило при тех же касательных макронапряжениях, что и при макрооднородной деформации. При одноосном растяжении напряжением S неограниченного плоскодеформированного тела с трещиной длины $2l$ максимальное касательное макронапряжение определяется формулой $T_{\max} \approx 0,43(2l/\Delta)^{1/2} S$. Приравнивая эту величину половине предела выносливости при пульсирующем нагружении σ_0 , получаем формулу $\Delta \approx 0,47(K_{th}/\sigma_0)^2$, где K_{th} — пороговое значение коэффициента интенсивности напряжений.

В случае плоской деформации относительное удлинение ε_n в направлении, составляющем угол φ с положительным направлением оси на плоскости определяется формулой

$$2G\varepsilon_n = \sigma_x(\cos^2 \varphi - \nu) + \sigma_y(\sin^2 \varphi - \nu) + \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (1.4)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Среднее относительное удлинение на диаметре длиной Δ , ориентированном в этом направлении, вычисляется с помощью интеграла

$$2G\varepsilon_n^* = \frac{2G}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon_n(r, \theta) dt \quad (1.5)$$

где r, θ — полярные координаты точек диаметра

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2t(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) + t^2$$

$$\theta = \arctg(y_0 + t \sin \varphi) / (x_0 + t \cos \varphi)$$

x_0, y_0 — декартовы координаты центра сферы.

Численные расчеты по формулам (1.1), (1.2), (1.5) при $\nu=0,3$ показывают, что на экстремальной полуокружности $\gamma=\pi/2$ касательные макронапряжения будут минимальными у края нагруженного участка с центром макросферы в точке с координатами $x_0=l, y_0=\Delta/2$ и составляют $T_0 \approx 0,88P/\pi$. При удалении от края нагруженного участка в любом направлении примерно на 5Δ , касательные макронапряжения совпадают с соответствующими максимальными касательными напряжениями τ_{\max} , вычисленными в точке. В частности, всюду на экстремальной полуокружности кроме ее концов $T=P/\pi$. У границы полуплоскости касательные макронапряжения имеют максимум T_0 в окрестности края нагруженного участка ($x_0=l, y_0=\Delta/2$), монотонно убывая при удалении от него.

Предполагая, что пластические сдвиги могут развиваться только от границы тела, из условия упругости (1.3) находим напряжение $P_1 \approx 1,14\pi\tau_s$, при достижении которого у краев нагруженного участка возникают симметрично расположенные полосы скольжений, ориентированные под некоторым углом α к границе полуплоскости. На линиях скольжений нормальные и касательные напряжения непрерывны вместе с нормальными перемещениями; касательные перемещения терпят разрыв неизвестной величины, определяемый из равенства $\tau_s = \tau_\alpha$, где τ_α — касательные напряжения в направлении скольжений. Длина R линий скольжений находится из условия ограниченности напряжений на концах этих линий.

2. Развитие полос скольжений. Если перемещения терпят разрыв постоянной величины $g = g_t + ig_n$ при переходе через произвольную полубесконечную прямую $L = \{z = z_0 + te^{i\beta}, t \geq 0\}$, выходящую из точки комплексной плоскости, то [3]:

$$\Phi(z) = iDge^{i\beta} / (z - z_0) \quad (2.1)$$

$$\Psi(z) = -iD[ge^{i\beta} / (z - z_0) - gz_0e^{i\beta} / (z - z_0)^2]$$

Здесь $z = x + yj$ — комплексная координата, $D = 2G / (\pi(\kappa + 1))$, $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоской деформации, β — угол, образованный прямой L с положительным направлением оси x , g_t, g_n — касательный и нормальный разрывы перемещений на линии L .

Для четырех симметричных относительно осей координат линий постоянного разрыва касательных перемещений, выходящих из точек $\pm z_t$,

$\pm \bar{z}_t, z_t = l + te^{i\alpha}, t \geq 0$, можно записать

$$\begin{aligned} \Phi_g(z) &= i2Dg_t \left[\frac{z_t e^{i\alpha}}{z^2 - z_t^2} - \frac{\bar{z}_t e^{-i\alpha}}{z^2 - \bar{z}_t^2} \right] \\ \Psi_g(z) &= -i2Dg_t \left[\frac{z_t e^{-i\alpha}}{z^2 - z_t^2} - \frac{\bar{z}_t e^{i\alpha}}{z^2 - \bar{z}_t^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{z}_t(z^2 + z_t^2) e^{i\alpha}}{(z^2 - z_t^2)^2} + \frac{z_t(z^2 + \bar{z}_t^2) e^{-i\alpha}}{(z^2 - \bar{z}_t^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Симметричный разрыв касательных перемещений (2.2) вызывает нормальные напряжения на оси x .

$$\sigma_y^g = -4Dg_t \sin \alpha \left\{ l \left(\frac{1}{x^2 - z_t^2} + \frac{1}{x^2 - \bar{z}_t^2} \right) + 2 \left[\frac{z_t^2(l - z_t)}{(x^2 - z_t^2)^2} + \frac{\bar{z}_t^2(l - \bar{z}_t)}{(x^2 - \bar{z}_t^2)^2} \right] \right\}$$

Снимая эти напряжения с границы полуплоскости ($y=0$), получаем

$$\Phi_g^0(z) = 2Dg_t \sin \alpha \left[\frac{1}{z - \bar{z}_t} \left(1 - \frac{\bar{z}_t - l}{z - \bar{z}_t} \right) - \frac{1}{z + \bar{z}_t} \left(1 + \frac{\bar{z}_t - l}{z + \bar{z}_t} \right) \right] \quad (2.3)$$

$$\Psi_g^0(z) = -z \partial \Phi_g^0(z) / \partial z$$

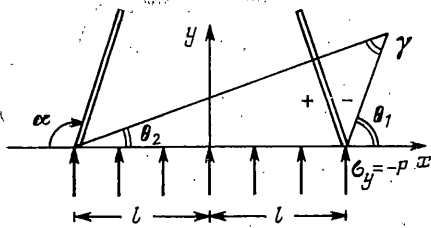
Сумма дислокационной составляющей (2.2) и составляющей (2.3) определяет напряженно-деформированное состояние полуплоскости $y \geq 0$ с постоянными наклонными разрывами касательных перемещений и свободной от напряжений границей полуплоскости. Параметр t в этих формулах характеризует положение начала наклонных линий разрыва.

Введение плотности $v(t) = 2Dg'(t)$ непрерывно распределенных разрывов перемещений $g(t)$, $0 \leq t \leq R$ вдоль линий скольжений и использование формул Колосова приводит к дислокационным напряжениям в полуплоскости

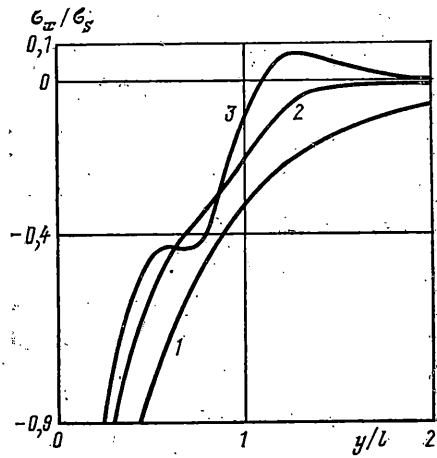
$$\begin{aligned} 1/2(\sigma_y^g + \sigma_x^g) &= \operatorname{Re} \int_0^R [S(-z, z_t) + S(z, z_t)] v(t) dt \\ 1/2(\sigma_y^g - \sigma_x^g) + i\tau_{xy}^g &= - \int_0^R [H(-z, z_t) + H(z, z_t)] v(t) dt \\ S(z, z_t) &= -ie^{i\alpha}(z + z_t)^{-1} + S_1(z, z_t) \\ H(z, z_t) &= -1/2i [e^{-i\alpha}(z + z_t)^{-1} + (\bar{z} + \bar{z}_t) e^{i\alpha}(z + z_t)^{-2}] + H_1(z, z_t) \\ S_1(z, z_t) &= \frac{ie^{-i\alpha}}{z + \bar{z}_t} - \frac{2 \sin \alpha}{z + \bar{z}_t} \left(1 + \frac{te^{-i\alpha}}{z + \bar{z}_t} \right) \\ H_1(z, z_t) &= i \frac{(z + \bar{z}_t) e^{i\alpha} + (\bar{z} + z_t) e^{-i\alpha}}{2(z + \bar{z}_t)^2} - \frac{(z - \bar{z}) \sin \alpha}{(z + \bar{z}_t)^2} \left(1 + \frac{2te^{-i\alpha}}{z + \bar{z}_t} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сумма соответствующих компонент (1.1) и (2.4) представляет собой напряжения в полуплоскости от действия граничного кусочно-постоянного давления и непрерывно распределенных вдоль линий скольжения дислокаций. В частности, нормальные и касательные напряжения на линии скольжений $z_\alpha = l + re^{i\alpha}$ непрерывны, а нормальные напряжения σ_t на площадках ортогональных линий скольжений разрывны, при этом

$$4\pi v(t) = \sigma_t^+ - \sigma_t^-, \quad 0 \leq t \leq R \quad (2.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где знаки \pm соответствуют положительной и отрицательной сторонам линии скольжений (фиг. 1). Приравняв касательное напряжение на линии скольжений пределу текучести на сдвиг τ_s , приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода

$$\int_0^R [(t-r)^{-1} - E_\alpha(t,r) + U_\alpha(t,r)] v(t) dt = \tau_s - \frac{P}{\pi} \sin^2(\theta_2 - \alpha) \quad 0 \leq r \leq R$$

$$U_\alpha(t,r) = -\text{Im} [e^{2i\alpha} H(z_\alpha, z_i)], \quad \theta_2 = \text{arctg} [r \sin \alpha (2l + r \cos \alpha)^{-1}] \quad (2.6)$$

$$E_\alpha(t,r) = \frac{1}{2}(t-r) \left[\frac{e^{4i\alpha}}{(t-re^{2i\alpha})^2} + \frac{e^{-4i\alpha}}{(t-re^{-2i\alpha})^2} \right] -$$

$$- 2rt \sin^2 \alpha \left[\frac{e^{4i\alpha}}{(t-re^{2i\alpha})^3} + \frac{e^{-4i\alpha}}{(t-re^{-2i\alpha})^3} \right]$$

Асимптотика поля напряжений в полярной системе координат с вершиной в конце $x=l$ нагруженного участка и углом θ , отсчитываемым от ненагруженной границы полуплоскости, имеет вид

$$\sigma_r^g = K_1 p r^{p-1} [(3-p)(A_j C_- - B_j S_-) - (p+1)(C_j C_+ - D_j S_+)] +$$

$$+ 2(A - C \cos 2\theta + D \sin 2\theta)$$

$$\sigma_\theta^g = K_1 p (p+1) r^{p-1} [A_j C_- - B_j S_- + C_j C_+ - D_j S_+] + 2(A + C \cos 2\theta - D \sin 2\theta)$$

$$\tau_{r\theta}^g = K_1 p r^{p-1} [(p-1)(A_j S_- + B_j C_-) + (p+1)(C_j S_+ + D_j C_+)] +$$

$$+ 2(C \sin 2\theta + D \cos 2\theta) \quad (2.7)$$

Здесь $C_\pm = \cos(p \pm 1)\theta$, $S_\pm = \sin(p \pm 1)\theta$, K_1 — коэффициент интенсивности напряжений в начале полосы скольжений, p — корень трансцендентного уравнения

$$\cos p\pi + (2p^2 \sin^2 \alpha - 1) \cos p(\pi - 2\alpha) - p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) = 0 \quad (2.8)$$

значение $j=1$ соответствует области $0 \leq \theta \leq \alpha$, $j=2$ — области $\alpha \leq \theta \leq \pi$, при этом

$$A_1 = -(\sin p\pi)^{-1} [p \sin \alpha \cos p(\pi - \alpha) - \cos \alpha \sin p(\pi - \alpha)], \quad C_1 = -A_1$$

$$B_1 = (\sin p\pi)^{-1} (p+1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha), \quad D_1 = -(p-1)B_1 / (p+1)$$

$$A_2 = A_1 - \cos(p-1)\alpha, \quad B_2 = B_1 + \sin(p-1)\alpha, \quad C_2 = C_1 + \cos(p+1)\alpha$$

$$D_2 = D_1 - \sin(p+1)\alpha, \quad C = -1/4\sigma_0^g, \quad A = 1/4\sigma_0^g, \quad \lambda = l/R, \quad D = 0$$

$$\sigma_0^g = -8 \sin \alpha \int_0^R \left[\frac{\cos \alpha}{t} + t \frac{(4l^2 + t^2) \cos \alpha + 2lt(1 + \cos^2 \alpha)}{(4l^2 + 4lt \cos \alpha + t^2)^2} \right] v(t) dt$$

При $\alpha = \pi/2$ уравнение (2.8) имеет корень $p=1$ и напряжения в малой окрестности конца $x=l$, загруженного участка принимают вид:

$$\sigma_x^g = 2\pi^{-1} K_1 (\pi + 2\theta + \sin 2\theta) + \sigma_0^g, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\sigma_y^g = \frac{2}{\pi} K_1 \begin{cases} 2\theta - \sin 2\theta, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -2(\pi - \theta) - \sin 2\theta, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\tau_{xy}^g = 2K_1 (1 - \cos 2\theta) / \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Из формул (2.5), (2.7), (2.9), следует, что плотность $v(t)$ интегрального уравнения (2.6) ведет себя как степенная функция

$$v(t) = -p K_1 t^{p-1} / \pi, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

в начале полосы скольжений, и ограничена при $\alpha = \pi/2$.

Асимптотическое поведение плотности $v(r)$ в конце полосы скольжений существенно зависит от угла α . Так, если $R \cos \alpha + l \neq 0$, то плотность имеет корневую особенность, соответствующую особенности

$$v(t) = K_2 / [\pi(R-t)^{1/2}], \quad t \rightarrow R \quad (2.11)$$

напряжений в конце трещины поперечного сдвига. Асимптотика поля напряжений в полярной системе координат с вершиной в конце полосы скольжений и углом θ , отсчитываемым от продолжения полосы, определяется формулами (2.7), где K_1 заменяется на коэффициент интенсивности напряжений K_2 :

$$B_1 = B_2 = 1, \quad D_1 = D_2 = -1, \quad A_1 = C_1 = A_2 = C_2 = 0, \quad p = 1/2$$

$$A = \operatorname{Re}(V), \quad C = \operatorname{Re}(U), \quad D = +\operatorname{Im}(U) \quad (2.12)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^R [S_1(-z_R, z_i) + S_A(z_R, z_i)] v(t) dt$$

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^R [H_1(-z_R, z_i) + H_A(z_R, z_i)] v(t) dt \quad (2.13)$$

$$z_R = l + R e^{i\alpha}, \quad S_A(z, z_i) = S(z, z_i), \quad H_A(z, z_i) = H(z, z_i)$$

При этом, если $\alpha > \pi/2$ и $R \cos \alpha + l > 0$, то полосы скольжений пересекаются в точке с координатами $x=0$, $y=y_0$, $y_0 = -l \operatorname{tg} \alpha$. Асимптотика поля напряжений в локальной системе координат с вершиной в этой точке и осями, параллельными осям x , y , также имеет вид (2.7), где коэффициент K_1 заменен на соответствующий коэффициент K_3 интенсивности напряжений в точке пересечения полос скольжений, p — корень уравнения

$$p(\sin(p\pi/2) + \sin 2p\beta \cos 2\alpha) - \cos 2p\beta \sin 2\alpha = 0$$

$$\beta = 3\pi/4 - \alpha \quad (2.14)$$

Значение $j=1$ здесь соответствует клину $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$, а $j=2$ клину $\pi - \alpha \leq \theta \leq \pi$ и кроме того

$$\begin{aligned}
 B_1 &= D_1 = 0 \\
 A_1 &= -\sin(p-1) (\pi/2 - \alpha) / \cos(p/2 \pi) \\
 C_1 &= \sin(p+1) (\pi/2 - \alpha) / \cos p\pi/2 \\
 A_2 &= A_1 + \cos(p-1) (\pi - \alpha), \quad B_2 = -\sin(p-1) (\pi - \alpha) \\
 C_2 &= C_1 - \cos(p+1) (\pi - \alpha), \quad D_2 = \sin(p+1) (\pi - \alpha)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Коэффициенты регулярных слагаемых в асимптотических формулах (2.7), как и выше определяются интегралами (2.12), (2.13), где, теперь

$$\begin{aligned}
 z_R &= iy_0, \quad S_A(z_R, z_i) = -ie^{i\alpha} (z_i + z_R)^{-1} \\
 H_A(z_R, z_i) &= -1/2i [e^{-i\alpha} (\bar{z}_i + z_R)^{-1} + (\bar{z}_i + \bar{z}_R) e^{i\alpha} (\bar{z}_i + z_R)^{-1}].
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Если $R \cos \alpha + l = 0$ (полосы скольжений вместе с нагруженным участком границы образуют равнобедренный треугольник), то в асимптотических формулах (2.7) p — корень уравнения

$$\cos p\pi + p \sin 2\alpha \sin 2p (\pi - \alpha) + \cos 2\alpha \cos 2p (\pi - \alpha) = 0 \tag{2.17}$$

а формулы (2.15) переписутся в виде

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -1/2 \sin(p-1) (\pi/2 - \alpha) / \cos p\pi/2 \\
 B_1 &= -1/2 \sin(p-1) (\pi/2 - \alpha) / \sin p\pi/2 \\
 C_1 &= -1/2 \sin(p+1) (\pi/2 - \alpha) / \cos p\pi/2 \\
 D_1 &= -1/2 \sin(p+1) (\pi/2 - \alpha) / \sin p\pi/2 \\
 A_2 &= A_1 + \cos(p-1) (\pi - \alpha), \quad B_2 = B_1 + \sin(p-1) (\pi - \alpha) \\
 C_2 &= C_1 - \cos(p+1) (\pi - \alpha), \quad D_2 = D_1 - \sin(p+1) (\pi - \alpha)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Коэффициенты регулярных слагаемых в (2.7) находятся по приведенным выше формулам (2.12), (2.13), (2.16). Плотность скольжений в окрестности точки пересечения при $R \cos \alpha + l \geq 0$, $\alpha > \pi/2$ имеет асимптотическое представление

$$v(t) = -pK |R* - t|^{p-1}/\pi, \quad t \rightarrow R* \tag{2.19}$$

где $R* = -l/\cos \alpha$, p — корень уравнения (2.14) или (2.17), K — соответствующий коэффициент интенсивности напряжений.

Уравнение (2.8) (впервые полученное в работе [4]), не имеет корней в полосе $0 \leq \operatorname{Re}(p) \leq 1$ за исключением $p=0$ и $p=1$ при $\alpha = \pi/2$. Следовательно, плотность интегрального уравнения (2.6) обращается в нуль при $t=0$ (за исключением случая $\alpha = \pi/2$, когда плотность конечна), а напряжения на концах нагруженного участка ограничены.

Уравнение (2.14) также не имеет корней в полосе $0 \leq \operatorname{Re}(p) \leq 1$, так что плотность $v(t)$ обращается в нуль в точке пересечения полос скольжений при $\pi/2 < \alpha < \pi$ и $R \cos \alpha + l > 0$, а напряжения ограничены в этой точке.

И, наконец, трансцендентное уравнение (2.17) имеет корни в полосе $0 \leq \operatorname{Re}(p) < 1$, следовательно, как плотность интегрального уравнения (2.6), так и напряжения в точке встречи полос скольжений при $\pi/2 < \alpha < \pi$ и $R \cos \alpha + l = 0$ неограничены, если отличен от нуля соответствующий коэффициент интенсивности напряжений.

Наличие известного асимптотического поведения плотности разрыва смещений на концах полосы скольжений позволяет применить для численного решения интегрального уравнения (2.6) метод [5], основанный на неравномерном разбиении отрезка интегрирования. Однако, в этом случае узлы квадратурных формул будут зависеть от угла наклона полосы скольжений к границе полуплоскости, поэтому, в дальнейшем, применяется метод дискретных вихрей [6], реализующий равномерное разбиение отрезка интегрирования. Пусть точки $t_k = khR$, $r_k = t_k - Rh/2$, $k = 1, 2, \dots, N$, $h = (N+1)^{-1}$ реализуют каноническое разбиение отрезка интегрирования $(0, R)$, N — число внутренних точек разбиения. Тогда, с учетом того, что индекс уравнения (2.6) равен нулю, получается система N линейных уравнений для определения N значений плотности разрыва смещений во внутренних точках $t_k \in (0, R)$. Коэффициенты интенсивности напряжений в начале ($t=0$) и конце ($t=R$) полосы скольжений находятся с помощью интерполяционного полинома Лагранжа по значениям плотности во внутренних точках отрезка интегрирования.

Результаты численного расчета показывают, что появление полос скольжений при достижении предельной нагрузки ($p=p_1$) уменьшает величину максимального касательного макронапряжения у краев нагруженного участка границы. Величина этих напряжений зависит от угла наклона линий скольжений к границе полуплоскости и достигает минимального значения $T \approx 0,95\tau_s$ при $\alpha \approx 99^\circ$. Считая, что сдвиги происходят в направлениях, вызывающих максимальную разгрузку наиболее напряженных микрообъемов у границы тела, получим, что первичные скольжения произойдут под углом $\alpha \approx 99^\circ$, а длина R_1 линий скольжений будет равна $1,43l$.

При относительно небольшой догрузке $\Delta p \approx 0,3\tau_s$ максимальные касательные макронапряжения у краев нагруженного участка вновь достигают предела текучести, т. е. при достижении граничным напряжением величины $p_2 \approx 1,24\mu\tau_s$ в полуплоскости возникают вторичные полосы скольжений с началом в точках разрыва граничных напряжений. Длина первичных полос скольжений увеличивается при этом до значения $R_2 \approx 1,82l$.

Возникновение первичных полос скольжений и рост их длины до величины R_2 вызывает появление в полуплоскости нормальных растягивающих напряжений. На фиг. 2 показаны графики безразмерных напряжений σ_x/σ_s , $\sigma_s = 2\tau_s$ на линии симметрии $x=0$, соответствующие предельным напряжениям $p=p_1$ ($R=0$, $R=R_1$) и $p=p_2$ ($R=R_2$) (кривые 1, 2, 3 соответственно). Максимальная величина нормальных напряжений σ_x на момент появления вторичных полос скольжений равна $0,14\tau_s$ и достигается на расстоянии $y \approx 1,25l$ от границы полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.
2. Леонов М. Я., Нисневич Е. Б., Предигер В. Е. Возникновение полос скольжения в пластине с трещиной // Физико-хим. механика материалов. 1982. Т. 18. № 1. С. 10–16.
3. Шерман Д. Н. Об одной задаче теории упругости // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 907–910.
4. Черепанов Г. П. Равновесие откоса с тектонической трещиной // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 136–151.
5. Erdogan F. E., Gupta G. D., Cook T. S. The numerical solutions of singular integral equations // Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff Intern. publ., 1973. P. 368–425.
6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.