МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 539.215

С. Е. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ГЛАДКОМ УСЛОВИИ ТЕКУЧЕСТИ

Целью работы является определение типа системы уравнений осесимметричного квазистатического течения изотропной сжимаемой идеальной жестко-пластической среды. Принимаем, что материал подчиняется произвольному выпуклому гладкому условию текучести. Вторые производные от функции текучести предполагаем непрерывными.

Уравнения осесимметричного течения при условии текучести Мизеса, которое относится к рассматриваемому типу, исследовалось в работе [1]. Однако в ней была рассмотрена неполная система уравнений. В работе [2], на которую ссылаются многие авторы, утверждается, что система уравнений пластического течения при условии Мизеса относится к гиперболическому типу, только если одна из нормальных компонент тензора скоростей деформации равна нулю.

Следует отметить, что системы уравнений, рассмотренные в [1, 2], не приводят к нормальному виду (за исключением случая, когда из уравнений ассоциированного закона течения может быть получена зависимость между напряжениями, например, если одна из нормальных компонент тензора скоростей деформации равна нулю), что не отмечается авторами. Тип такой системы не может быть определен.

Таким образом, вопрос о типе системы уравнений осесимметричного пластического течения при условии Мизеса до сих пор не решен.

Для условий текучести, зависящих от среднего напряжения σ, вопрос исследован еще меньше. Известны только работы, посвященные условию Грина при плоском течении, например, [3] и кусочно-линейным условиям текучести при плоском и осесимметричном течениях [4...6].

В настоящее время в связи с широким распространением уплотняемых материалов исследование системы уравнений пластического течения при условиях текучести, зависящих от σ, представляется актуальной задачей.

Так как исходная система уравнений не приводится к нормальному виду, то ее необходимо преобразовать. Ниже эта система квазилинейных уравнений преобразуется в нелинейную систему, которая может быть приведена к нормальному виду.

Показано, что преобразованная система уравнений относится к смешанному типу, получены условия, при которых тип системы меняется. Рассмотрены условия эквивалентности исходной и преобразованной систем. Приведены примеры, которые показывают, что множества, соответствующие гиперболическому типу, не пусты.

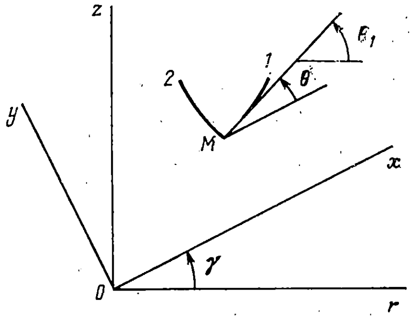
Основные уравнения. Произвольное гладкое условие текучести для рассматриваемой среды может быть представлено функцией трех главных напряжений $\Phi(\sigma_i)=0$, где σ_i — главные напряжения ($i=1, 2, 3$). В пространстве главных напряжений ему соответствует замкнутая поверхность.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z, совпадающей с осью симметрии. Положим $\sigma_3=\sigma_\varphi$ и $\sigma_1>\sigma_2$. Уравнения равновесия в этой системе координат имеют вид

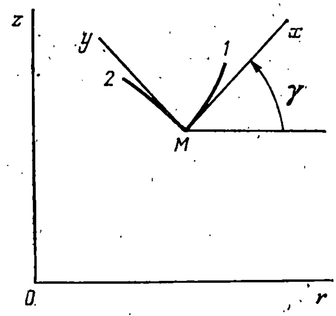
$$\partial\sigma_r/\partial r+\partial\tau_{rz}/\partial z+(\sigma_r-\sigma_\varphi)/r=0 \qquad (1.1)$$

$$\partial\sigma_z/\partial z+\partial\tau_{rz}/\partial r+2\tau_{rz}/r=0$$

Введем в меридиональной плоскости прямоугольную декартову систему координат x, y, которая получается из системы координат r, z поворотом на некоторый угол γ (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения равновесия в новой системе координат будут отличаться от уравнений (1.1) только членами, не зависящими от производных, которые обозначим f_1 и f_2:

$$
\begin{gathered}
\partial\sigma_x/\partial x+\partial\tau_{xy}/\partial y+f_1=0 \\
\partial\sigma_y/\partial y+\partial\tau_{xy}/\partial x+f_2=0, \quad x\cos\gamma-y\sin\gamma\geqslant 0
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Пусть θ — угол между направлением оси x и первым главным направлением тензора напряжений, отсчитываемый от оси x против хода часовой стрелки, а $\theta_1=\theta+\gamma$ — угол между направлением оси r и первым главным направлением тензора напряжений, отсчитываемый от оси r (фиг. 1).

Выразим σ_x, σ_y, τ_{xy} через главные напряжения и угол θ и подставим в (1.2):

$$
\begin{gathered}
\cos^2\theta\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}+(\sigma_2-\sigma_1)\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+ \\
+\frac{1}{2}\sin 2\theta\frac{\partial(\sigma_1-\sigma_2)}{\partial y}+(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}+F_1=0 \\
\frac{1}{2}\sin 2\theta\frac{\partial(\sigma_1-\sigma_2)}{\partial x}+(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}+ \\
+\cos^2\theta\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}+(\sigma_1-\sigma_2)\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}+F_2=0
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

где F_1 и F_2 — члены, не зависящие от производных.

Направим оси x, y по касательной к главным направлениям тензора напряжений в некоторой произвольной точке (фиг. 2). В этой системе координат $\gamma=\theta_{1M}$, $\theta=0$, где θ_{1M} — значение угла θ_1 в точке M. Уравнения равновесия в точке M принимают вид

$$
\begin{gathered}
\partial\sigma_1/\partial x+(\sigma_1-\sigma_2)\partial\theta/\partial y+F_1=0 \\
(\sigma_1-\sigma_2)\partial\theta/\partial x+\partial\sigma_2/\partial y+F_2=0
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

По ассоциированному закону течения имеем

$$
\xi_1=\lambda\Phi_1,\quad \xi_2=\lambda\Phi_2,\quad \xi_3=\lambda\Phi_3 \tag{1.5}
$$

Здесь ξ_i — главные скорости деформации, λ — неотрицательный множитель, $\Phi_i=\partial\Phi/\partial\sigma_i$.

Пусть u — проекция скорости на ось r, а v — на ось z. Тогда $\xi_3=\xi_\varphi=u/r$. Введем также проекции скорости u_x, u_y на оси x и y соответственно. Компоненты ξ_x, ξ_y, ξ_{xy} тензора скоростей деформации имеют вид $\xi_x=\partial u_x/\partial x$,

$\xi_y = \partial n_y/\partial u$, $\xi_{xy} = 0{,}5(\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x)$.

В точке M имеем $\xi_x = \xi_1$, $\xi_y = \xi_2$, $\xi_{xy} = 0$. Подставляя эти выражения в (1.5) и исключая λ, получаем

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{u}{r}\frac{\Phi_1}{\Phi_3} \tag{1.7}$$

Из условия текучести и уравнения (1.7) выразим σ_3 и σ_1:

$$\sigma_1 = G_1(\partial u_x/\partial x,\ \xi_3,\ \sigma_2),\ \sigma_3 = G_3(\partial u_x/\partial x,\ \xi_3,\ \sigma_2) \tag{1.8}$$

Исключим в (1.4), (1.5) и (1.7) напряжения σ_1 и σ_3 при помощи (1.8). Уравнения (1.4) примут вид

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} + (G_1 - \sigma_2)\frac{\partial \theta}{\partial y} + F_1 = 0, \qquad (G_1 - \sigma_2)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + F_2 = 0 \tag{1.9}$$

Нелинейная система уравнений (1.6), (1.9) относительно неизвестных σ_2, θ, u_x, u_y может быть преобразована к квазилинейной системе нормального вида [7].

Положим $\omega_1 = \partial u_x/\partial x$, $\omega_2 = \partial u_y/\partial x$ и продифференцируем уравнения (1.6) по переменной x. Так как уравнения (1.6) верны только для точки M, то для дифференцирования необходимо перейти в произвольную систему координат x, y, а затем после дифференцирования совместить ее оси с касательными к главным направлениям тензора напряжений в точке M. В результате этих преобразований и исключения λ получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \omega_1\left(\Phi_1\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \Phi_2\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)\Phi_1^{-2} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 2\omega_1(\Phi_1 - \Phi_2)\frac{\partial \theta}{\partial x}\Phi_1^{-1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \end{gathered} \tag{1.10}$$

Теперь система уравнений (1.6), (1.9), (1.10) может быть разрешена относительно производных по y:

$$\begin{gathered} \partial u_x/\partial y + \omega_2 = 0, \quad \partial u_y/\partial y - \omega_1\Phi_2/\Phi_1 = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} + (G_1 - \sigma_2)^{-1}\left(\frac{\partial G_1}{\partial \omega_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_2}\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\right) + (G_1 - \sigma_2)^{-1}F_1 = 0 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \omega_1\left[\Phi_1\left(\Phi_{21}\frac{\partial G_1}{\partial x} + \Phi_{22}\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \Phi_{23}\frac{\partial \sigma_3}{\partial x} - \right.\right. \\ \left.\left. - \Phi_2\left(\Phi_{11}\frac{\partial G_1}{\partial x} + \Phi_{12}\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \Phi_{13}\frac{\partial \sigma_3}{\partial x}\right)\right]\Phi_1^{-2} = 0, \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_i\,\partial \sigma_j} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + (G_1 - \sigma_2)\frac{\partial \theta}{\partial x} + F_2 = 0, \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - 2\omega_1(\Phi_1 - \Phi_2)\Phi_1^{-1}\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{gathered} \tag{1.11}$$

Покажем, что величина $\partial \xi_3/\partial x$ не зависит от производных от искомых функций:

$$\partial \xi_3/\partial x = [(\partial u/\partial x)r - u(\partial r/\partial x)]r^{-2}$$

$$u = u_x\cos\gamma - u_y\sin\gamma,\quad \partial r/\partial x = \cos\gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\cos\gamma - u_x\sin\gamma\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\sin\gamma - u_y\cos\gamma\frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

Так как γ — угол между осями r и x, то его величина не зависит от x, кроме того, в точке M угол $\theta=0$, следовательно, получаем $\partial u/\partial x=\omega_1 \cos\theta_{1M} - \omega_2 \sin\theta_{1M}$.

2. Исследование уравнений. Определим характеристические направления системы уравнений (1.11) из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & a_{34} & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & a_{43} & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & -\mu & a_{56} \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & 1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.1)$$

Это уравнение имеет два нулевых корня: $\mu_5=\mu_6=0$. Для остальных четырех корней имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} -\mu & a_{34} & 0 & a_{36} \\ a_{43} & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & a_{54} & -\mu & a_{56} \\ a_{63} & 0 & 1 & -\mu \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2)$$

$$a_{34}=(G_1-\sigma_2)^{-1}(\partial G_1/\partial\sigma_2),\ a_{36}=(G_1-\sigma_2)^{-1}(\partial G_1/\partial\omega_1);\ a_{43}=G_1-\sigma_2$$

$$a_{54}=-\omega_1\Big[\Phi_1\Big(\Phi_{21}\frac{\partial G_1}{\partial\sigma_2}+\Phi_{22}+\Phi_{23}\frac{\partial G_3}{\partial\sigma_2}\Big)-$$

$$-\Phi_2\Big(\Phi_{11}\frac{\partial G_1}{\partial\sigma_2}+\Phi_{12}+\Phi_{13}\frac{\partial G_3}{\partial\sigma_2}\Big)\Big]\Phi_1^{-2}$$

$$a_{56}=-\frac{\Phi_2}{\Phi_1}-\omega_1\Big[\Phi_1\Big(\Phi_{21}\frac{\partial G_1}{\partial\omega_1}+\Phi_{23}\frac{\partial G_3}{\partial\omega_2}\Big)-\Phi_2\Big(\Phi_{11}\frac{\partial G_1}{\partial\omega_1}+\Phi_{13}\frac{\partial G_3}{\partial\omega_1}\Big)\Big]\Phi_1^{-2}$$

$$a_{63}=-2(\Phi_1-\Phi_2)\omega_1\Phi_2^{-1}$$

Уравнение (2.2) преобразуется к биквадратному уравнению

$$\mu^4-2b\mu^2+c=0 \qquad (2.3)$$

$$b=0{,}5(a_{63}a_{36}+a_{56}+a_{43}a_{34})\ c=a_{43}(a_{34}a_{56}-a_{54}a_{36})$$

Исследование уравнений (2.2) показывает, что количество действительных характеристик зависит от знаков величин: b^2-c, c, b.

При условиях $b^2-c<0$; $b^2-c>0$, $b<0$, $c>0$; $b^2-c=0$, $b<0$ характеристик нет.

При условиях $b^2-c>0$, $c<0$; $b^2-c>0$, $b<0$, $c=0$ имеются две характеристики.

При условиях $b^2-c>0$, $b>0$, $c\geqslant0$; $b^2-c=0$, $b\geqslant0$ имеется четыре характеристики.

Во всех этих случаях нужно добавить двойные характеристики $y=\mathrm{const}$, соответствующие характеристическим числам μ_5, μ_6.

Величина μ_n в каждой точке равна тангенсу угла наклона характеристического направления к первому главному направлению тензора напряжений. Следовательно, угол, который характеристические направления составляют с осью r равен $\psi_n=\operatorname{arctg}\mu_n+\theta_1$ $(n=1\div6)$.

Вопрос об эквивалентности исходной и преобразованной систем в общем виде рассмотрен в [7]. В частности, искомые функции должны принадлежать к классу c_2. В нашем случае достаточно потребовать, чтобы к классу c_2 принадлежали только функции u_x, u_y, а остальные функции могут принадлежать к классу c_1. Помимо того должны выполняться равенства $\omega_1=\partial u_x/\partial x$, $\omega_2=\partial u_y/\partial x$. Условия, при которых они имеют место, рассмотрены в [7].

Поскольку коэффициенты b и c, входящие в уравнение (2.3) — величины безразмерные, то из общих положений теории размерностей следует, что ω_1 и ξ_3 могут входить в выражения для этих коэффициентов только в виде функции отношения ξ_3/ω_1. Это отношение может быть выражено через напряженное состояние из ассоциированного закона течения $\varepsilon=\xi_3/\omega_1=\Phi_3/\Phi_1$. Таким образом, тип системы уравнений (1.11) определяется только напряженным состоянием. На поверхности текучести могут быть выделены зоны, соответствующие различным типам системы уравнений (1.11).

Так как уравнение (2.3) биквадратное, а остальные два корня уравнения (2.1) равны $\mu_5=\mu_6=0$, отсюда следует, что характеристики системы (1.11), если они существуют, симметричны относительно главных направлений тензора напряжений.

3. Пример. В теории обработки давлением уплотняемых материалов наиболее распространенным является условие текучести Грина [3]:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2=6\tau_s^2.$$

Здесь η, τ_s — параметры, не зависящие от напряжений. Для этого условия имеем $\Phi_i=2(2\sigma_i-\sigma_j-\sigma_k)+2\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$ $\Phi_{ij}=2(\eta-1)$ при $i\neq j$, $\Phi_{ii}=2(2+\eta)$,

$$\varepsilon=[(2+\eta)\sigma_3+(\eta-1)(\sigma_2+\sigma_1)]/[(2+\eta)\sigma_1+(\eta-1)(\sigma_1+\sigma_2)]$$

Коэффициенты уравнения (2.2) имеют вид

$$a_{34}=\frac{(1-\eta)\sigma_1-[(1+2\eta)+(1-\eta)\varepsilon]\sigma_2+\varepsilon(1-\eta)\sigma_3}{\{[(\eta+1)+\varepsilon\eta]\sigma_1-[(1-2\eta)\varepsilon+1]\sigma_2+[(3\eta+1)\varepsilon-\eta]\sigma_3\}(\sigma_1-\sigma_2)}$$

$$a_{43}=\sigma_1-\sigma_2,$$

$$a_{36}=\frac{-[2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)][2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)]\varepsilon}{3\omega_1[(2\eta+1)\sigma_1+(\eta-1)(1+\varepsilon)\sigma_2+(1+2\eta)\varepsilon\sigma_3](\sigma_1-\sigma_2)}$$

$$a_{54}=-9\eta\omega_1\times$$

$$\times\left\{\frac{[(\eta-1)+\varepsilon(\eta+2)]\sigma_1\sigma_2+2(\eta-1)\sigma_1\sigma_2+(\eta+2)\sigma_1^2+(\eta-1)(1+\varepsilon)\sigma_2\sigma_3}{[\sigma_1(1+2\eta)+\sigma_2(\eta-1)(\varepsilon+1)+\sigma_3\varepsilon(2\eta+1)][2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\eta+2)\sigma_2^2+\varepsilon(\eta-1)\sigma_3^2}{[\sigma_1(1+2\eta)+\sigma_2(\eta-1)(\varepsilon+1)+\sigma_3\varepsilon(2\eta+1)][2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)]^2}\right\}$$

$$a_{56}=-\frac{[3(\eta^2+\eta+1)-\varepsilon(\eta-1)^2]\sigma_1\sigma_2+}{[2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)]\times}$$

$$\frac{+(\eta-1)(2\eta+1+3\varepsilon)\sigma_1\sigma_3+(\eta-1)^2(1+\varepsilon)\sigma_2\sigma_3}{\times[(2\eta+1)\sigma_1+(\eta-1)(1+\varepsilon)\sigma_2+(1+2\eta)\varepsilon\sigma_3]}+$$

$$+\frac{(\eta-1)[2\eta+1-\varepsilon(2+\eta)]\sigma_1^2+}{[2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)]\times}$$

$$\frac{+(\eta-1)(2+\eta)\sigma_2^2+\varepsilon(\eta-1)^2\sigma_3^2}{\times[(2\eta+1)\sigma_1+(\eta-1)(1+\varepsilon)\sigma_2+(1+2\eta)\varepsilon\sigma_3]}$$

$$a_{63}=\frac{6(\sigma_2-\sigma_1)\omega_1}{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3+\eta(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}$$

В этих выражениях напряжения σ_1 и σ_3 должны быть исключены при помощи условия текучести и уравнения

$$\sigma_3=\frac{(1-\eta)(1-\varepsilon)\sigma_2+[(1-\eta)+\varepsilon(2-\eta)\sigma_1}{2+\eta+\varepsilon(1-\eta)}$$

В предельном случае при $\eta\to0$ условие текучести Грина переходит в условие текучести Мизеса.

Коэффициенты уравнения (2.3) при условии текучести Грина определялись численным методом. Напряжения были отнесены к величине τ_s (предел текучести при чистом сдвиге).

В пространстве главных напряжений сечение поверхности текучести Грина плоскостью $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=3\sigma_0$ является окружностью. Причем, $|\sigma_0|\leqslant\leqslant(1,5\eta)^{-1/2}$. Положение точек на этой окружности можно определить с помощью параметра Лоде $\mu'=(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2)/(\sigma_1-\sigma_2)$ или связанного с ним зависимостью $\mu'=-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, угла α. Поскольку $\sigma_1\geqslant\sigma_2$, то $\pi/2\leqslant\alpha\leqslant3\pi/2$. Плоское течение соответствует значению $\alpha=\pi$. Результаты расчета показывают, что при $-1\leqslant\sigma\leqslant0$ величина $c<0$ во всех случаях, за исключением $\alpha=\pi$. Следовательно, гиперболичность возможна только при плоском течении. Ранее такой же результат для плоского течения другим способом был получен в [3].

Для условия Мизеса коэффициенты уравнения (2.3) будут

$$b=\frac{0,5(2+2\varepsilon-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon+\varepsilon^2},\qquad c=1,\qquad b^2-c=-3\left[\frac{\varepsilon(\varepsilon+2)}{2(1+\varepsilon+\varepsilon^2)}\right]^2$$

Таким образом, получаем, что система уравнений (1.11) будет относиться к гиперболическому типу, если только $\varepsilon=0$, т. е. если имеет место плоское течение. В остальных случаях имеются только две действительные характеристики, соответствующие характеристическим числам $\mu_5=\mu_6=0$.

Автор благодарит профессора Б. А. Друянова за руководство и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Symonds P. S.* On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity // Quart. appl. math. 1949. V. 6. No. 4. P. 448–452.
2. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир 1964, 308 с.
3. *Штерн М. Б., Сердюк Г. Г., Максименко Л. А. и др.* Феноменологические теории прессования порошков. Киев: Наук. думка, 1982. 140 с.
4. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
5. *Штейн М. Ш.* Осесимметричное пластическое течение идеально связанной среды с трением // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 146–156.
6. *Александров С. Е., Друянов Б. А.* О типе уравнений двумерных течений идеальной жестко-пластической среды при условии текучести Драккера // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 12. С. 155–158.
7. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 687 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.VII.1989