

УДК 539.3

© 1991 г.

А. А. СПЕКТОР

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА ПО ОСНОВАНИЮ И РЕЖИМЫ ИХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ТРЕНИЕМ

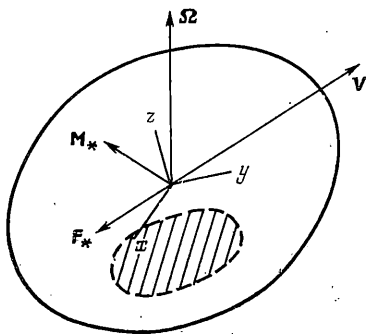
Рассматриваются связанные задачи динамики движения тела по основанию и их взаимодействия с трением в области контакта. Проблема состоит в определении эволюции во времени полей сил трения, скоростей проскальзывания, границ между подобластями проскальзывания и сцепления, а также кинематики движущегося тела. Предлагается метод их нахождения, сводящий задачу на каждом временном шаге к эквивалентной вариационной проблеме. С его использованием проведено исследование качения со скольжением упругого тела по инерции. Качественно описаны различные временные диапазоны движения. Установлены характерные для случаев существенного влияния инерции тела предельные (при больших временах) колебательные бездиссипативные режимы. Показано, что на начальном этапе изменение искомых характеристик близко к процессу установления стационарного скольжения. Часть полученных результатов анонсированы в [1, 2].

1. Введение. Впервые анализ нестационарного взаимодействия упругих тел с трением был осуществлен в задачах об их предварительном сдвиге (повороте), когда эволюция сил трения, подобластей проскальзывания и сцепления происходила в силу изменения сдвигающей (и нормальной) силы (крутящего момента) [3], (см. также [4]). Ряд общих свойств решения пространственных квазистатических задач для условий сложного нагружения установлен в [5, 6]. Физически реальная постановка и вариационное исследование в задаче о вдавливании с трением жесткого штампа в конечное упругое тело («задача Синьорини с трением») были даны в [7].

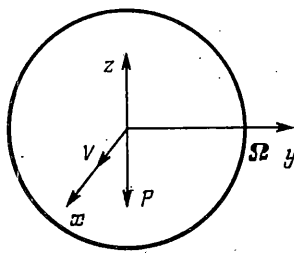
Задачи о нестационарных процессах иного типа — об эволюции сил трения от начального распределения к некоторому установившемуся состоянию, определяемому величиной приложенной и фиксированной во времени силы были сформулированы в [8] (см. также [4]). Были получены решения плоских задач о качении со скольжением упругих цилиндров. Общие пространственные нестационарные задачи о процессах установления как при заданных силовых факторах, так и при фиксированной во времени кинематике (но без учета инерционных свойств тела) исследовались и решались в [9, 10].

Динамические задачи теории упругости с односторонними граничными условиями изучались в [11, 7, 12]. Конечноеэлементные подходы и результаты их применения в анализе динамики конструкций приводятся в [13]. Уточненные законы контактного взаимодействия и примеры численного моделирования динамики скольжения для ряда плоских задач даны в [14, 15].

2. Постановка задачи. Пусть по основанию с плоской поверхностью под действием внешних сил с главным вектором $F_*(t)$ и моментом $M_*(t)$ движется тело массой M . Контакт его с основанием считаем локальным, так что размеры области контакта E много меньше размеров тела. Поэтому вдали от E скорости точек тела определяются так, как если бы оно было абсолютно жестким. Не учитываются также деформации, вызванные при-



Фиг. 1



Фиг. 2

ложением внешних сил. Введем подвижную систему координат с началом в центре масс и осью Z , нормальной к поверхности основания. Пусть \mathbf{V} — скорость центра масс, $\mathbf{\Omega}$ — абсолютная угловая скорость тела, \mathbf{K} — его центральный момент количества движения (фиг. 1). Уравнения движения тела могут быть записаны в виде

$$M d\mathbf{V}/dt = \mathbf{F}_*(t) + \int_E \boldsymbol{\sigma} dx dy \quad (2.1)$$

$$d\mathbf{K}/dt = \mathbf{M}_*(t) + \int_E [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}] dx dy \quad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\sigma}(-p, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ — контактные напряжения, $\mathbf{r}(x, y)$ — радиус-вектор точки (x, y) области контакта.

Граничные условия для определения области контакта имеют вид

$$w^+ - w^- > \delta - f(x, y, t) = F(x, y, t), p = 0 \quad (2.3)$$

$$w^+ - w^- = F, p \geq 0 \quad (2.4)$$

Кроме того, в точках, где реализуются соотношения (2.4), выполняются следующие условия определения подобластей проскальзывания и сцепления

$$|\mathbf{s}| = 0, |\boldsymbol{\tau}| \leq \rho p \quad (2.5)$$

$$|\mathbf{s}| > 0, \boldsymbol{\tau} = \rho p \mathbf{s} / |\mathbf{s}| \quad (2.6)$$

Здесь w^\pm — упругие нормальные смещения поверхностей тела и основания, $\mathbf{s}(s_x, s_y)$ — скорость их относительного проскальзывания в точке (x, y) области контакта, $-\delta$ — нормальное сближение тела и основания ($\delta = -V_z$), функция f — описывает форму поверхности тела, $\boldsymbol{\tau}(\tau_{xz}, \tau_{yz})$ — силы трения, ρ — коэффициент трения.

Скорость проскальзывания \mathbf{s} представляется суммой «кажущейся» скорости скольжения $\mathbf{v}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{V})$, подсчитываемой как если бы тело было абсолютно жестким, а также — скорости, определяемой изменением во времени относительных касательных смещений. В общем случае вторая составляющая проскальзывания разбивается на две части — местное скольжение и проскальзывание вследствие переносного движения. В итоге скорость \mathbf{s} представляется в виде [9]:

$$\mathbf{s} = \mathbf{v} + B^*(\boldsymbol{\tau}, p) - B(\partial \boldsymbol{\tau} / \partial t, \partial p / \partial t) \quad (2.7)$$

$$B^*(\cdot) = -V_x \partial B(\cdot) / \partial x - V_y \partial B(\cdot) / \partial y$$

где $B(\cdot)$ — известный интегральный оператор, выражающий скачок поверхностных смещений через контактные напряжения. Таким образом, ре-

шение задачи сводится к определению по начальным данным $V(0)$, $K(0)$, $p(0)$, $\tau(0)$ характеристик $V(t)$ и $K(t)$, задающих движение тела, совместно с полем контактных напряжений $\sigma(x, y, t)$.

3. Метод решения. Ограничимся ниже случаями отщепления задачи определения области контакта и давления от нахождения сил трения и скоростей проскальзывания (условия этого см. в [16])¹⁾. Общий случай может быть рассмотрен с использованием итерационного процесса, предложенного в [16].

Будем считать давление и область контакта найденными и остановимся лишь на задаче определения $\tau(x, y, t)$, $s(x, y, t)$, $K(t)$, $V(t)$ из условий (2.1), (2.2), (2.5)–(2.7). Разобьем рассматриваемый интервал времени $[0, T]$ на элементарные интервалы $\Delta t = T/N$ и будем определять искомые величины в точках $t = t^k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$. В разностных аналогах (2.1), (2.2) будем использовать выражения

$$(\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k)/\Delta t, \quad (\mathbf{K}^{k+1} - \mathbf{K}^k)/\Delta t$$

$$\mathbf{F}_*^k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}_*(t) dt, \quad \mathbf{M}_*^k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{M}_*(t) dt$$

В условиях (2.5), (2.6) заменим τ на τ^{k+1} , а в (2.7) $\partial\tau/\partial t$ — на $(\tau^{k+1} - \tau^k)/\Delta t$. Дальнейшие проблемы связаны с заменой τ в равенстве (2.7) и $\sigma(\mathbf{v})$ в уравнениях (2.1), (2.2). Выбор τ^k или τ^{k+1} , \mathbf{v}^k или \mathbf{v}^{k+1} определяет соответственно явную или неявную разностную аппроксимацию по τ и \mathbf{v} . В [9] была обоснована неявная аппроксимация по τ . Можно показать, что выбор явной схемы здесь невозможен, так как в этом случае отсутствует сходимость при $\Delta t \rightarrow 0$ к решению исходной задачи в скоростях. Поэтому $s(t)$ в условиях (2.5), (2.6) заменим последовательностью

$$\Delta s^{k+1} = \mathbf{v}^k \Delta t + B^*(\tau^{k+1}) - B(\tau^{k+1} - \tau^k) \quad (3.1)$$

Относительно функции \mathbf{v} в (2.1), (2.2) будем использовать явную аппроксимацию, так что задача сводится к нахождению $\tau^{k+1}(\mathbf{v}^k)$ из граничных условий (2.5), (2.6) и затем к непосредственному определению новых значений \mathbf{v}^{k+1} из равенств (2.5), (2.6).

Определение τ^{k+1} из условий (2.5), (2.6) эквивалентно решению вариационной задачи

$$\min_{|\tau^{k+1}| \leq \sigma p} \int_E [\sigma p |\Delta s^{k+1}(\tau^{k+1})| - \Delta s^{k+1} \tau^{k+1}] dx dy \quad (3.2)$$

Доказательство этого утверждения для близкого случая приведено в [17]; там же описан способ перехода к конечномерной по x, y задаче математического программирования. В настоящей работе использовалась регуляризация негладкой части функционала (3.2) и последующее решение задачи методом проекций градиента с выбором шага по стратегии, предложенной Р. П. Федоренко.

Описанным выше методом было проведено исследование движения по инерции ($\mathbf{M}_* = 0$, $\mathbf{F}_* = 0$) упругого шара (фиг. 2).

В рассматриваемом случае следует решать первое из уравнений движения

$$MV' = - \int_E \tau_{xz}(x, y, t) dx dy \quad (3.3)$$

Уравнение моментов позволяет выразить угловую скорость шара через скорость его центра $\Omega = \eta(V - V(0)) + \Omega(0)$, $\eta = MR^2/J$. Здесь R — ра-

¹⁾ При этом операторы B и B^* перестают зависеть от давления.

диус шара, J — момент инерции относительно оси y . Отсюда очевидно под- считывается скорость жесткого проскальзывания $v = V - \Omega R = (1 + \eta)V - \eta V(0) - \Omega(0)R$. В ряде случаев вместо (3.3) удобно решать уравнение

$$Mv' = -(1 + \eta) \int_E \tau_{xz}(x, y, t) dx dy \quad (3.4)$$

4. Модельное исследование движения упругого шара с трением. Известно [18], что в аналогичной задаче для абсолютно жесткого шара движение с любыми начальными $V(0)$, $\Omega(0)$ за конечное время переходит в чистое качение, при котором $v = 0$ и $T = 0$ (T — полная сила трения).

Рассмотрим теперь движение шара по основанию, когда их контакт, как и в жестком случае, сосредоточен в точке, однако тела обладают податливостью, и касательная сила вызывает пропорциональные ее величине касательные перемещения. Тогда аналог условий (2.5), (2.6) имеет вид

$$|s(t) - V - \Omega R - KT'| = 0, \quad |T(t)| \leq \rho P \quad (4.1)$$

$$|s(t)| > 0, \quad T = \rho P \operatorname{sign} s \quad (4.2)$$

Здесь K — коэффициент пропорциональности между относительным касательным смещением и силой трения.

Обезразмеривая соответственно v , T , t на $v(0)$, ρP , $Mv(0)/\rho P$ и оставляя старые обозначения, преобразуем граничные условия и уравнения движения к виду:

$$v' = -(1 + \eta)T, \quad T' = \chi v, \quad |T| \leq 1 \quad (4.3)$$

$$v' = -(1 + \eta)T, \quad T = \operatorname{sign}(\chi v - T') \quad (4.4)$$

$$\chi = Mv^2(0)/K\rho^2P^2$$

Приведем решение системы (4.3), (4.4) для случая $T(0) = 0$, $\chi > 1 + \eta$:

$$v(t) = \begin{cases} \cos \omega t, & t \leq \omega^{-1} \arcsin[\omega \chi^{-1}] = t^* \\ \beta - (1 + \eta)(t - t^*), & t^* < t \leq t^{**} = t^* + \beta(1 + \eta) \\ -\omega \chi^{-1} \sin \omega(t - t^{**}), & t > t^{**} \end{cases}$$

$$\omega = [\chi(1 + \eta)]^{1/2}, \quad \beta = [(\chi - 1 - \eta)/\chi]^{1/2}$$

$$T(t) = \begin{cases} \chi \omega^{-1} \sin \omega t, & t \leq t^* \\ 1, & t^* < t \leq t^{**} \\ \cos \omega(t - t^{**}), & t^{**} < t \end{cases}$$

При $T(0) \neq 0$ качественный характер решения сохраняется, но оно имеет несколько более сложный вид. При $\chi \leq 1 + \eta$ отсутствует второй интервал $t^* \leq t \leq t^{**}$ постоянства T .

Проанализируем полученное решение. Из него вытекает, что сначала реализуется режим сцепления, затем — проскальзывания и после t^{**} — вновь режим сцепления. Таким образом, как и в случае контакта жестких тел все решения за конечное время переходят в режим полного сцепления («чистого качения»), однако теперь он обладает новыми характерными чертами. Здесь жесткое (кажущееся) проскальзывание и сила не обращаются в нуль, а меняются периодически, так чтобы в контакте отсутствовало истинное проскальзывание s и со временем реализовался бездиссипативный режим движения.

В приведенном примере с точечным контактом предельный режим характеризовался осцилляционным (периодическим) изменением искомых

величин. Проиллюстрируем это на более сложной модели взаимодействия движущегося шара и основания.

Пусть упругие деформации распределены по конечной площадке E . Для задания касательных смещений будем использовать модель «щетки» [4], предложенную в подобных задачах А. Ю. Ишлинским. В этом случае для скорости проскальзывания

$$s_x(x, y, t) = v(t) - K \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, t)}{\partial t} + KV \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, t)}{\partial x} \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) записано в движущейся системе координат. Если перейти в неподвижную систему, то оно приводится к виду

$$s_x(x', y, t) = v(t) - K \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xz}(x', y, t), \quad x = x' - Vt \quad (4.6)$$

Исследуем характер движения при полном сцеплении. Преобразуем уравнение движения к виду

$$Mv'' = -(1+\eta) \frac{\partial}{\partial t} \int_{E(t)} \tau_{xz}(x', y, t) dx' dy \quad (4.7)$$

Здесь $E(t)$ область, занимаемая площадкой контакта в момент времени t . Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{E(t)} \tau_{xz}(x', y, t) dx' dy = & V \left[\int_{L^+} \tau_{xz}(x', y, t) ds - \right. \\ & \left. - \int_{L^-} \tau_{xz}(x', y, t) ds \right] + \int_{E(t)} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t}(x', y) dx' dy \end{aligned}$$

где L^+ , L^- — передняя и задняя дуги границы $E(t)$ в системе x, y ; ds — интегрирование по их контурам.

Так как $|\tau| \leq \rho p$ и $p=0$ на L^\pm , имеем $\tau_{xz} \equiv 0$ на L^\pm . Тогда подставляя $\partial \tau_{xz} / \partial t$ в (4.7) из (4.6) при $s_x=0$, получим $Mv'' + K^{-1}(1+\eta)s_E v = 0$, где s_E — площадь области E .

Обезразмеривая v на $v(0)$, t — на $Mv(0)/\rho P$, получаем уравнение колебаний для скорости жесткого проскальзывания

$$v'' + (1+\eta)\chi v = 0, \quad \chi = Mv^2(0)s_E/K\rho^2 P^2$$

Таким образом, и в модели с конечной площадкой контакта искомые характеристики (легко видеть, что это относится и к силе трения T) в бездиссипативном режиме изменяются колебательным образом.

Покажем теперь, что и для задачи в полной постановке любое решение стремится перейти в бездиссипативный режим. Рассмотрим кинетическую энергию тела

$$L = MV^2/2 + J\Omega^2/2$$

и потенциальную энергию системы тело+основание

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_E \tau B(\tau) dx dy$$

Далее будем иметь

$$L' + \Pi' = MVV' + J\Omega\Omega' + \int_E \tau B(\partial \tau / \partial t) dx dy$$

Заменяя v и Ω из уравнений движения, получаем

$$L + \Pi = -v \int_E \tau_{xz} dx dy + \int_E \tau B(\partial\tau/\partial t) dx dy$$

Так как $s = v + B^*(\tau) - B(\partial\tau/\partial t)$, а B^* — кососимметричный оператор, то

$$\int_E s\tau dx dy = \int_E v\tau dx dy - \int_E \tau B(\partial\tau/\partial t) dx dy$$

Таким образом, имеем

$$L + \Pi = - \int_E s\tau dx dy \quad (4.8)$$

Очевидно, $L(t) \geq 0$, $\Pi(t) \geq 0$. Допустим, имеется решение, на котором

$$\int_E s(t)\tau(t) dx dy > \varepsilon_0 > 0, \quad \forall t$$

Тогда в силу (4.8) при некотором t^* выражение $L + \Pi$ должно стать отрицательным. Вследствие граничных условий

$$\int_E s\tau dx dy = - \int_E p|s| dx dy$$

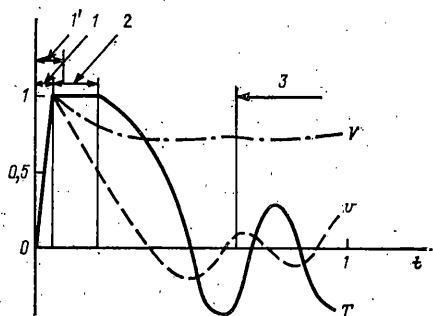
Поэтому $\int_E p|s| dx dy \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что область эффективного проскальзывания со временем вырождается, и предельным может быть только бездиссипативный режим полного сцепления.

5. Численное решение задачи. Качественный анализ движения. Будем строить и исследовать решения исходной граничной — динамической задачи с использованием предложенного численного метода. Для простоты рассмотрим случай Герцевского давления в области контакта с параметрами p_0 (максимальное давление); a, b (полуоси эллипса контакта) и одинаковых материалов тел. Обезразмерим x, y — на $(ab)^{1/2}$, s и v — на $V(0)$, t — на $MV(0)/\rho p_0 ab$. Для построения решения будем использовать уравнение (3.4). После проведения обезразмеривания в нем будут отсутствовать безразмерные параметры. Выражение для проскальзывания s приобретает следующий вид

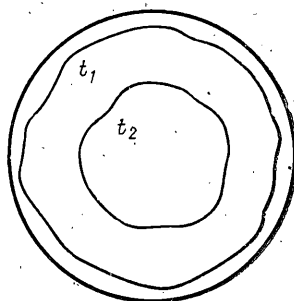
$$s = (v, 0) + \gamma B^*(\tau) - \gamma \chi^{-1} B(\tau) \quad (5.1)$$

где параметр $\gamma = \rho p_0 / G$ (G — модуль сдвига материала) введен по аналогии со стационарными задачами [17], $\chi = MV^2(0)/[\rho p_0 (ab)^{3/2}]$.

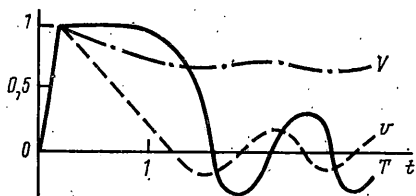
На фиг. 3 для случая $\gamma = 2,8 \cdot 10^{-3}$, $\chi = 0,28$, $\Omega(0) = 0$ приведены результаты расчетов эволюции со временем интегральной силы трения (сплошная линия), скорости жесткого проскальзывания (штриховая), и скорости центра шага (штрихпунктир). На этапе 1 происходит интенсивное возрастание силы трения; соответствующий процесс близок к предварительному смещению шара относительно основания. Решение на этом этапе имеет более сложный характер по сравнению с рассмотренной выше модельной задачей: на нем реализуются и подобласти проскальзывания, и подобласти сцепления. Последние со временем сжимаются (на фиг. 4 пунктиром приведены их границы для $t_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ и $t_2 = 10^{-2}$), и осуществляется переход к этапу 2 — полного проскальзывания. Первый этап, в совокупности с начальной частью второго (1' на фиг. 3) можно проанализировать и с другой точки зрения. Видно, что в течение 1' кинематика шара меняется слабо, и этот этап близок к процессу «стабилизации сил трения» с переходом к стационарному проскальзыванию, рассмотренному в [9, 10] без учета инерционных эффектов. Длительность его порядка времени прохождения нескольких ширин площадки контакта (здесь очевидно характерный интервал $(ab)^{1/2}/V(0)$). Таким образом, параметр χ в (5.1) представляет собой отношение характерного времени протекания динамических процессов $(MV(0)/(\rho p_0 ab))$ к характерному времени начальной стабилизации сил трения $((ab)^{1/2}/V(0))$.



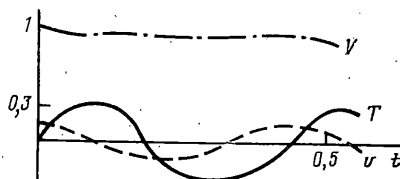
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

После периода полного проскальзывания возникают и расширяются подобласти сцепления. В дальнейшем реализуется режим 3 — осцилляционного изменения силы трения, скоростей проскальзывания и сцепления. В численном решении на режиме 3 подобласти проскальзывания отсутствовали.

На фиг. 5 приведены графики изменения тех же величин, но для тела большей массы ($M_2/M_1=3,6$). Качественно характер движения сохраняется, но возрастает длительность этапа полного проскальзывания и «периода» осцилляций.

На фиг. 6 даны результаты для тех же γ и χ , что и на фиг. 3, но при $\Omega(0) \neq 0$, когда $V(0)/\Omega(0)R=0,9$. Этот случай отвечает начальным условиям, близким к режиму качения. Как видно, основной качественной особенностью рассматриваемого режима является отсутствие интервала полного проскальзывания.

Таким образом, решение модельных задач и численный эксперимент показали, что совокупное влияние упругости, инерционных свойств тела и сухого трения приводят к предельным колебательным режимам. В случае движения по инерции эти режимы являются бездиссипативными. С точки зрения отсутствия проскальзывания в контакте они родственны чистому качению жестких тел. Анализ результатов расчетов на фиг. 3, 5 и 6 позволяет одновременно охарактеризовать движение шара с кинематической точки зрения как качение с проскальзыванием, так как среднее значение разности $|V - \Omega R|$ отлично от нуля, но значительно меньше, чем среднее значение V .

Автор признателен В. А. Самсонову за полезные советы и обсуждения, И. А. Дулеву — за помощь в проведении расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спектор А. А. Связанные задачи движения тела и его контактного взаимодействия с основанием // В кн. Смешанные задачи механики деформируемого тела. IV Всес. конференция. Одесса. Изд. Одесского ун-та. 1989. С. 93.
2. Spector A. A. Non-Stationary Friction Contact of Moving Elastic Bodies. Proc. 5th Inter. Congress Evrotrib-89, Helsinki, 1989, V. 1, P. 299–303.
3. Mindlin R. D., Deresiewicz H. Elastic Spheres in Contact under Varying Oblique Forces // J. Appl. Mech. 1953. V. 20. No. 3. P. 327–344.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
5. Гольдштейн Р. В., Жигников Ю. В. Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. С. 141–148.
6. Гольдштейн Р. В., Жигников Ю. В. Контактная задача с учетом сил трения при сложном нагружении // В кн. Выездное заседание по современным проблемам теории контактных взаимодействий. Ереван. Изд. АН Арм. ССР. 1988. С. 36–38.
7. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ. 1980. Вып. 1. С. 122–129.

8. *Kalker J. J.* Transient Phenomena in Two Elastic Cylinders Rolling Over Each Other with Dry Friction // *Trans. ASME. Ser. E.* 1970. V. 33. P. 155–162.
9. *Спектор А. А.* Вариационные методы в пространственных задачах о нестационарном взаимодействии упругих тел с трением // *ПММ.* 1987. Т. 50. Вып. 1. С. 76–83.
10. *Спектор А. А.* Стабилизация сил трения в области контакта упругого движущегося тела и основания // *Трение и износ.* 1990. Т. 11. Вып. 1. С. 49–56.
11. *Дрво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989. 493 с.
13. *Talashidis D., Panagiotopoulos P.* Linear Finite Element Approach to Unilateral Contact Problem in Structural Dynamics // *Int. J. Num. Meth. in Engr.* 1982. Т. 18. No. 3. P. 1505–1520.
14. *Oden J. T., Pires E.* Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity // *J. Appl. Mech.* 1983. Т. 50. No. 1. P. 67–76.
15. *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact Problems in Elasticity/A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia; SIAM, 1988. 495 p.
16. *Спектор А. А.* Вариационные методы решения пространственных контактных задач о нестационарном взаимодействии упругих тел с трением // *ДАН СССР,* 1985. Т. 285. Вып. 4. С. 865–870.
17. *Гольдштейн Р. В., Заковский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П.* Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением // *Успехи механики.* 1982. Вып. 3/4. С. 61–102.
18. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 22. М.: Физматгиз, 1960. 380 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.I.1990