**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991**

УДК 531.383

С. А. АГАФОНОВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА НА ЦИРКУЛЯЦИИ

В [1] отмечено существование движения точки подвеса гирогоризонткомпаса по земной сфере, при котором происходит потеря устойчивости. В настоящей работе рассматривается случай циркуляционного движения точки подвеса с постоянной скоростью. Линейные уравнения возмущенного движения представляются в форме уравнений Гамильтона. Построена первая зона динамической неустойчивости, отвечающая основному и комбинационному резонансам.

1. Преобразование уравнений возмущенного движения. Линейные уравнения возмущенного движения гирогоризонткомпаса могут быть записаны в виде [2]

$$\dot{x}_1=\nu x_2+\Omega x_4,\quad \dot{x}_2=-\nu x_1+\Omega x_3$$

$$\dot{x}_3=-\nu x_4-\Omega x_2,\quad \dot{x}_4=-\Omega x_1+\nu(1-\mu)x_3 \tag{1.1}$$

где $\mu=V^2/(gR)$, $\nu^2=g/R$, Ω — проекция абсолютной угловой скорости гироскопической рамы на геоцентрическую вертикаль места, V — величина абсолютной скорости точки подвеса по земной сфере, g — ускорение сил тяготения, R — радиус Земли.

Переменные x_i связаны с исходными переменными α, β, γ, δ с помощью формул

$$x_1=V\alpha/(gR)^{1/2},\ x_2=\beta,\ x_3=\gamma,\ x_4=2B\sin\varepsilon_0\delta/[ml(gR)^{1/2}]$$

Углы β, γ характеризуют отклонение гирорамы от плоскости горизонта; α — отклонение гирорамы в азимуте; $2\varepsilon_0$ — значение угла между кинетическими моментами гироскопов в невозмущенном движении; δ — возмущение угла ε_0; B — кинетический момент гироскопа; l — расстояние от точки подвеса до центра масс системы.

При циркуляционном движении точки подвеса по земной сфере Ω и V являются периодическими функциями времени с периодом T, который равен периоду циркуляции. В системе (1.1) сделаем замену переменных $x_i\to y_i$ по формулам

$$x_1=y_1\cos\theta^*+y_2\sin\theta^*,\ x_2=y_3\cos\theta^*+y_4\sin\theta^*$$

$$x_4=-y_1\sin\theta^*+y_2\cos\theta^*,\ x_3=-y_3\sin\theta^*+y_4\cos\theta^* \tag{1.2}$$

$$\theta^*=\int_0^t(\Omega-\Omega^*)d\tau,\quad \Omega^*=T^{-1}\int_0^T\Omega(\tau)d\tau$$

Введем обозначения

$$y=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4),\ H_1=(h_{ij})$$

$$H_0=\begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 & -\Omega^* \\ 0 & \nu & \Omega^* & 0 \\ 0 & \Omega^* & \nu & 0 \\ -\Omega^* & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix} 0_2 & -E_2 \\ E_2 & 0_2 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

где $h_{33}=-V^2(1-\cos 2\theta^*)/(2V^{*2})$, $h_{44}=-V^2(1+\cos 2\theta^*)/(2V^{*2})$, $h_{34}=h_{43}=$ $=V^2\sin 2\theta^*/(2V^{*2})$, остальные $h_{ij}=0$. Уравнения (1.1) после замены (1.2) с учетом обозначений (1.3) примут вид уравнений Гамильтона

$$Jy^{\cdot}=(H_0+\varepsilon\nu H_1)y,\quad \varepsilon=V^{*2}/(gR),\quad V^{*2}=T^{-1}\int_0^T V_2(\tau)d\tau \tag{1.4}$$

Приводимость исходной системы уравнений (1.1) к уравнениям Гамильтона показана, в частности, в [3].

Пусть циркуляция точки подвеса гирогоризонткомпаса по земной сфере осуществляется таким образом, что северная и восточная составляющие относительной скорости точки подвеса изменяются по закону: $v_N=v\cos\omega t$, $v_E=v\sin\omega t$; v, ω — постоянные. Тогда широта $\varphi=v\sin\omega t/(R\omega)+\varphi_0$, $\Omega=$ $=U\sin\varphi+v_E\operatorname{tg}\varphi/R+\chi^{\cdot}$, где $\chi^{\cdot}$ — производная по времени от скоростной девиации, а $\chi=\operatorname{arctg}[v_N/(RU\cos\varphi+v_E)]$. Пусть скорость движения точки подвеса v такова, что безразмерные параметры $\delta=v/(R\omega)$ и $\varkappa=v/(RU)$ можно считать малыми. Тогда с точностью до величин первого порядка относительно δ и $\varkappa$ имеем

$$\begin{gathered}\Omega/U=\sin\varphi_0+(\delta\cos\varphi_0+\varkappa\operatorname{tg}\varphi_0-\varkappa\omega/(U\cos\varphi_0))\sin\omega t\\ V^2R^{-2}U^{-2}=\cos^2\varphi+(2\varkappa\cos\varphi_0-\delta\sin 2\varphi_0)\sin\omega t\\ \Omega^*=U\sin\varphi_0,\quad V^{*2}=R^2U^2\cos^2\varphi_0\\ \theta^*=\int_0^t(\Omega-\Omega^*)d\tau=U\omega^{-1}(\delta\cos\varphi_0+\varkappa\operatorname{tg}\varphi_0-\varkappa\omega/(U\cos\varphi_0))\cdot\\ \cdot(1-\cos\omega t),\quad \chi^{\cdot}=-\varkappa\omega\sin\omega t/\cos\varphi_0\end{gathered} \tag{1.5}$$

Отметим, что выражение производной по времени от скоростной девиации $\chi^{\cdot}$ в (1.5) имеет тот же вид, что и в [4]. С учетом (1.5) элементы матрицы H_1 имеют вид

$$h_{33}=0,\ h_{44}=-1-2(\varkappa-\delta\sin\varphi_0)\sin\omega t/\cos\varphi_0$$

$$h_{34}=h_{43}=U(\delta\cos\varphi_0+\varkappa\operatorname{tg}\varphi_0-\varkappa\omega U^{-1}/\cos\varphi_0)(1-\cos\omega t)\omega^{-1}$$

2. Построение областей неустойчивости. Для системы (1.4) может быть построена первая зона неустойчивости, соответствующая основному и комбинационному резонансам. Общий вид областей неустойчивости для линейной гамильтоновой системы с n степенями свободы приведен в [5]. Для построения последних необходимо найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы-матрицы H_0. Собственные значения являются чисто мнимыми и определяются равенствами $\pm i\omega_1=\pm i(\nu+$ $+\Omega^*)$ и $\pm i\omega_2=\pm i(\nu-\Omega^*)$. Собственные векторы, отвечающие $i\omega_1$ и $i\omega_2$, нормированные условиями $i(Jc_k,\ c_j)=0$ $(k\neq j)$ и $i(Jc_k,\ c_j)=1$ $(k=j)$, имеют вид $c_1=(1/2,\ i/2,\ i/2,\ -1/2)$, $c_2=(1/2,\ -i/2,\ i/2,\ 1/2)$. В рассматриваемом случае для построения первой зоны неустойчивости используются приведенные выше выражения для собственных значений и собственных векторов матрицы H_0, а также выражения для элементов матрицы H_1. Для первых двух основных резонансов $\omega=2\omega_1$ и $\omega=2\omega_2$ области неустойчивости в первом приближении по ε задаются соответственно неравенствами

$$2(\nu+\Omega^*)+\varepsilon\nu(-{}^1/_2-|\sigma_1|)<\omega<2(\nu+\Omega^*)+\varepsilon\nu(-{}^1/_2+|\sigma_1|)$$
$$\sigma_1=\varkappa/\cos\varphi_0-{}^1/_2\delta\operatorname{tg}\varphi_0-{}^1/_4U(\nu+\Omega^*)^{-1}(\delta\cos\varphi_0+\varkappa\operatorname{tg}\varphi_0) \tag{2.1}$$

$$2(\nu-\Omega^*)+\varepsilon\nu(-{}^1/_2-|\sigma_2|)<\omega<2(\nu-\Omega^*)+\varepsilon\nu(-{}^1/_2+|\sigma_2|)$$
$$\sigma_2={}^1/_4U(\nu-\Omega^*)^{-1}(\delta\cos\varphi_0+\varkappa\operatorname{tg}\varphi_0)-{}^1/_2\delta\operatorname{tg}\varphi_0 \tag{2.2}$$

Для комбинационного резонанса $\omega=\omega_1+\omega_2=2\nu$ область неустойчивости в первом приближении по ε имеет вид

$$2\nu+\varepsilon\nu(-{}^1/_2-|\sigma_3|)<\omega<2\nu+\varepsilon\nu(-{}^1/_2+|\sigma_3|)$$
$$\sigma_3={}^1/_2\cos^{-1}\varphi_0(\varkappa-\delta\sin\varphi_0) \tag{2.3}$$

Так как в общем случае $\sigma_k\neq0$ ($k=1, 2, 3$), то области неустойчивости (2.1)–(2.3) являются широкими [5].

В качестве примера рассмотрим циркуляцию точки подвеса гирогоризонткомпаса со скоростью $v=15$ м·сек$^{-1}$ на начальной широте $\varphi_0=60°$. Расчеты по формулам (2.1)–(2.3) с точностью до четвертого знака показали, что область неустойчивости (2.2) не улавливается этим приближением, а резонансные частоты циркуляции, отвечающие основному и комбинационному резонансам $\omega=2\omega_1$, $\omega=\omega_1+\omega_2$ заключены соответственно в интервалах $2{,}1005\nu<\omega<2{,}1007\nu$ и $1{,}9995\nu<\omega<1{,}9996\nu$.

В заключение отметим, что линейную систему (1.1) можно получить, как показано в [6, 7], и при конечном угле отклонения гирогоризонткомпаса от меридиана при малых углах отклонений от вертикали.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жбанов Ю. К., Ишлинский А. Ю.* Динамика пространственного компаса // Современные проблемы теоретической и прикладной механики: Тр. IV Всес. съезда по теор. и прикл. механике. Киев: Наук. Думка, 1978. С. 53–74.
2. *Ишлинский А. Ю.* К теории гирогоризонткомпаса // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 487–499.
3. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 288 с.
4. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
5. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
6. *Жбанов Ю. К.* Решение уравнений движения гирогоризонткомпаса при конечных углах отклонений от меридиана // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 102–104.
7. *Василенко В. П., Онищенко С. М.* К теории корректируемого двухроторного гирокомпаса // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 30–37.

Москва

Поступила в редакцию
7.VII.1989