

УДК 539.3

© 1991 г.

С. А. КАБРИЦ, Л. В. СЛЕПНЕВА

**ВИБРОЗАЩИТНЫЕ СВОЙСТВА
РЕЗИНОВОГО АМОРТИЗАТОРА**

Решается задача о вынужденных колебаниях абсолютно жесткого массивного тела, установленного на невесомом вязкоупругом амортизаторе. Амортизатор представляет собой резиновую оболочку вращения, к торцам которой прикреплены путем вулканизации металлические пластины. Его нижнее основание совершает малые гармонические колебания постоянной амплитуды. Постановку задачи о колебаниях вязкоупругих тел и многочисленную библиографию по этому вопросу можно найти в [1], [2], а также в [3], где предложено приближенное решение задачи о колебаниях груза, установленного на геометрически нелинейном вязкоупругом цилиндре. Отличительная особенность предлагаемой работы заключается в том, что исследуются малые колебания груза относительно положения статического равновесия системы с учетом существенно нелинейных предварительных деформаций полого амортизатора сложной конфигурации.

Для расчетных примеров выбираются амортизаторы, имеющие нелинейно-упругие статические жесткостные характеристики разного вида. Исследуется зависимость амплитуды установившихся колебаний груза от частоты внешнего вынуждающего воздействия и диссипативных свойств материала амортизатора. Варьирование массой груза позволяет проследить за изменением виброзащитных свойств амортизаторов на различных участках жесткостных характеристик (вплоть до осадок, достигающих 0,3 высоты амортизатора).

В работе используется предложенный в [4] вариант нелинейной теории оболочек. Все соотношения записываются в ортогональных материальных координатах s_0, θ^0 , где s^0 — длина дуги меридиана недеформированной срединной поверхности оболочки ($s_1^0 \leq s^0 \leq s_2^0$), θ^0 — угловая координата на параллели. Упругие свойства резины описываются двухконстантным степенным потенциалом $\Phi = 2\mu n^{-2}(\lambda_s^n + \lambda_\theta^n + \lambda_\xi^n - 3)$. Здесь μ, n — физические константы материала; $\lambda_s, \lambda_\theta, \lambda_\xi$ — кратности удлинений вдоль меридионального, окружного и нормального к срединной поверхности оболочки направлений; $\lambda_\xi = \lambda_s^{-1} \lambda_\theta^{-1}$, т. е. принято условие несжимаемости материала.

Задача решается методом наложения малых вязкоупругих деформаций на «конечную» упругую деформацию рассматриваемой механической системы под действием веса груза. Определение основного (невозмущенного) напряженно-деформированного состояния оболочки сводится к решению нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных и трансцендентных уравнений вида [4]:

$$\begin{aligned} u_r' &= \lambda_s \cos \varphi - \cos \varphi^0, \quad u_z' = -\lambda_s \sin \varphi - \sin \varphi^0 \\ \vartheta_s' &= \lambda_s^2 \lambda_\theta (\kappa_s + \varphi^0) - \varphi^{0'} \\ (M_s r_0)' &= M_0 \cos \varphi + \lambda_s r^0 (T_r \sin \varphi + T_z \cos \varphi) \\ (T_r r^0)' &= T_\theta, \quad (T_z r^0)' = 0 \\ T_r \cos \varphi - T_z \sin \varphi &= (2\mu h^0/n) (\lambda_s^n - \lambda_\xi^n) \lambda_s^{-1} \\ T_\theta &= (2\mu h^0/n) (\lambda_\theta^n - \lambda_\xi^n) \lambda_\theta^{-1} \\ M_s &= 1/3 \mu h^0 \lambda_s^{-(n+2)} \lambda_\theta^{-(n+1)} (\kappa_s + \kappa_\theta/2) \end{aligned} \tag{1}$$

$$M_\theta = 1/3 \mu h^3 \lambda_s^{-(n+1)} \lambda_\theta^{-(n+2)} (\kappa_\theta + \kappa_s/2)$$

$$\kappa_\theta = (\lambda_s^{-1} \lambda_\theta^{-2} \sin \varphi - \sin \varphi^0) / r^0$$

$$\lambda_\theta = (r^0 + u_r) / r^0, \quad \varphi = \varphi^0 + \vartheta_s$$

Штрих означает дифференцирование по s^0 ; ноликом снабжены величины, относящиеся к недеформированной конфигурации; r^0, z^0 — радиальная и осевая координаты точек образующей срединной поверхности оболочки; φ^0 — угол между нормалью к срединной поверхности и осью вращения; h^0 — толщина оболочки; u_r, u_z — радиальная и осевая составляющие вектора перемещений; T_r, T_z, T_θ — радиальная, осевая и окружная составляющие вектора усилий; M_s, M_θ — меридиональный и окружной изгибающие моменты; κ_s, κ_θ — компоненты тензора кривизны срединной поверхности.

В качестве граничных условий используются условие скользящего шарнира на верхнем основании амортизатора и заделки на нижнем

$$s^0 = s_1^0: u_r = M_s = 0, \quad u_z = -\Delta^*$$

$$s^0 = s_2^0: \dot{u}_r = u_z = \vartheta_s = 0$$
(2)

Здесь Δ^* — осадка амортизатора под действием веса груза $P = mg$. В дальнейшем все величины, отвечающие этому напряженно-деформированному состоянию, будут отмечаться звездочкой.

Численное решение осуществляется методом прямого сведения краевой задачи к задаче Коши в сочетании с методом Ньютона. Для построения начального приближения применяется метод продолжения по параметру [5].

В случае упругого материала к линейризованной краевой задаче для возмущений приходим путем возмущения соответствующих соотношений нелинейной краевой задачи (1)–(2). Окончательно задача определения упругих возмущений сводится к решению краевой задачи для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка [6]:

$$dY/ds^0 = D(s^0)Y$$
(3)

$$s^0 = s_1^0: u_r^- = M_s^- = 0, \quad u_z^- = -\Delta^-$$

$$s^0 = s_2^0: u_r^- = u_z^- = \vartheta_s^- = 0$$

$$D(s^0) = \|d_{ij}(s^0)\| \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

$$Y = (u_r^-, u_z^-, \vartheta_s^-, T_r^-, T_z^-, M_s^-)^T$$

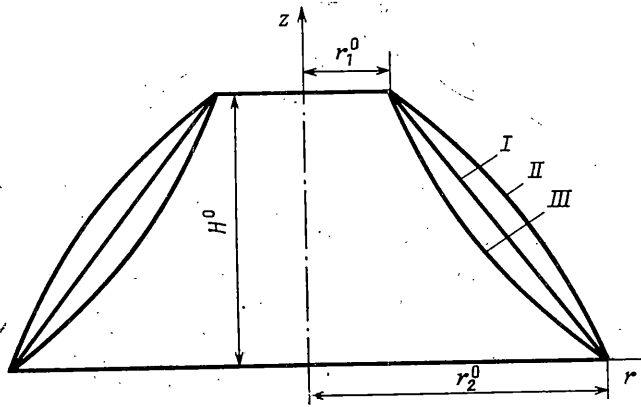
Упругие возмущения в формулах снабжаются значком минус.

В случае малых вязкоупругих деформаций, наложенных на большие упругие, следует использовать те же линейризованные соотношения, но в линейризованном законе упругости константу μ заменить на интегральный оператор вида [1]:

$$\mu[f(t)] = \mu \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau \right]$$

где $R(t)$ — ядро релаксации. Вязкоупругие возмущения при обозначении отмечаются значком плюс.

Задача определения вынужденных колебаний массы m , установленной на невесомом вязкоупругом амортизаторе, сводится к решению линейризованной системы уравнений вида (3) при следующих граничных усло-



Фиг. 1

ВИАХ

$$s^0 = s_1^0: m \partial^2 u_z^+ / \partial t^2 = -2\pi r^0 T_z^+, u_r^+ = M_s^+ = 0$$

$$s^0 = s_2^0: u_r^+ = \vartheta_s^+ = 0, u_z^+ = a \sin pt$$

Приближенное решение вязкоупругой задачи ищется в виде:

$$u_r^+(s^0, t) = y(t) u_r^-(s^0), u_z^+(s^0, t) = a \sin pt + y(t) u_z^-(s^0)$$

Здесь слагаемое $a \sin pt$ описывает движение конструкции как жесткого тела; u_r^- ; u_z^- — определенные ранее малые упругие возмущения перемещений.

Окончательно, для определения искомой функции $y(t)$ получим интегро-дифференциальные уравнения вида [6]:

$$d^2 y / dt^2 + \omega^2 y - \lambda \int_{-\infty}^t R(t-\tau) y(\tau) d\tau = b \sin pt \quad (4)$$

$$b = ap^2 / \Delta^-, \omega^2 = (2\pi r_1^0 / m \Delta^-) T_z^-(s_1^0)$$

$$\lambda \approx \frac{2\pi r_1^0}{m \Delta^-} [T_z^- + \vartheta_s^- T_r^*]_{s^0 = s_1^0}, r_1^0 = r^0(s_1^0)$$

В выражении для λ , в отличие от [6], отброшены малые члены с принятой в теории оболочек точностью.

Вводя безразмерные величины по формулам:

$$\Delta_\delta = \Delta / H^0, \omega_\delta^2 = \omega^2 H^0 / g, \lambda_\delta = \lambda H^0 / g$$

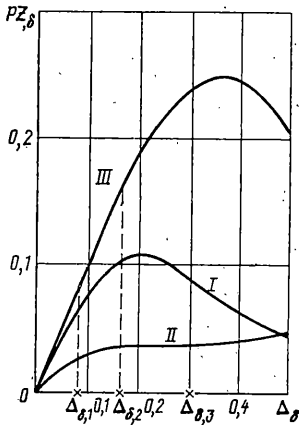
$$Z_\delta = 2\pi r_1^0 T_z(s_1^0) / \mu H^{02}, R_\delta = 2\pi r_1^0 T_r(s_1^0) / \mu H^{02}$$

(H^0 — высота недеформированного амортизатора), получим

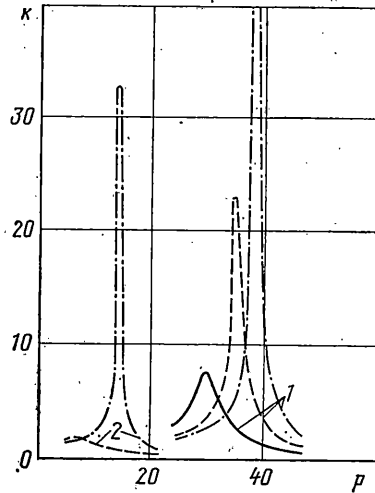
$$\omega_\delta^2 = (\partial Z_\delta / \partial \Delta_\delta) / Z_\delta |_{\Delta_\delta = \Delta_\delta^*} \quad (5)$$

$$\lambda_\delta \approx \left[\omega_\delta^2 + \frac{\partial \vartheta_s(s_1^0)}{\partial \Delta_\delta} \frac{R_\delta}{Z_\delta} \right]_{\Delta_\delta = \Delta_\delta^*}$$

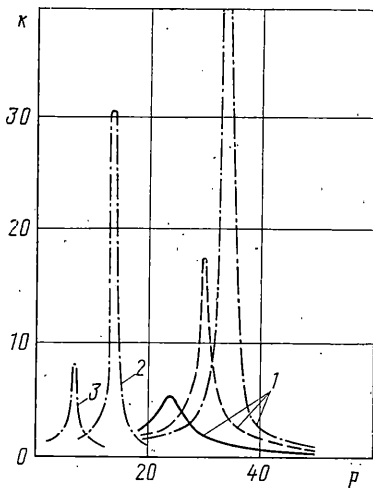
Отсюда видно, что безразмерная собственная частота колебаний ω_δ полностью определяется нелинейной жесткостной характеристикой амортизаторов (осадка Δ_δ^* соответствует на графике осевой силе $Z_\delta^* = mg / \mu H^{02}$). Диссипативные свойства системы характеризуются величиной λ_δ , зависящей от нескольких параметров. Все они находятся непосредственно из ре-



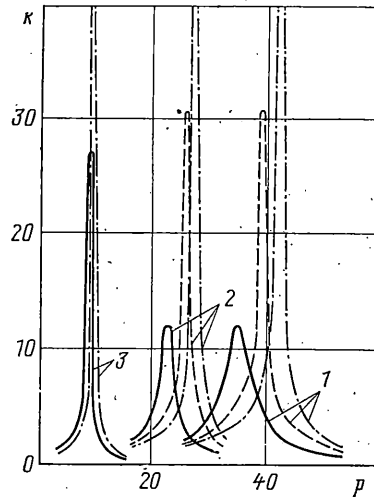
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

шения нелинейной краевой задачи (1)–(2). Из (5) следует, что в случае жесткой заделки края $s^0 = s_1^0$ ($\vartheta_s = 0$) значение λ_0 совпадает с ω_0 .

Определение установившихся колебаний груза сводится к нахождению периодического решения уравнения (4) вида

$$y(t) = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad (6)$$

Подстановка (6) в (4) дает

$$C_1 = -\frac{\lambda b \Gamma_s}{[\omega^2 - p^2 - \lambda \Gamma_c]^2 + \lambda^2 \Gamma_s^2}, \quad C_2 = \frac{b[\omega^2 - p^2 - \lambda \Gamma_c]}{[\omega^2 - p^2 - \lambda \Gamma_c]^2 + \lambda^2 \Gamma_s^2}$$

$$\Gamma_s = \int_0^\infty R(\tau) \sin p\tau \, d\tau, \quad \Gamma_c = \int_0^\infty R(\tau) \cos p\tau \, d\tau$$

Амплитуда установившихся колебаний A_m находится по формуле $A_m = \sqrt{(a + \Delta - C_2)^2 + (\Delta - C_1)^2}$.

Для расчетных примеров были выбраны амортизаторы трех типов (фиг. 1) — конический (I), «выпуклый» (II) и «вогнутый» (III), имеющие существенно различные нелинейно-упругие статические характеристики (фиг. 2). Для амортизаторов II и III типов образующая срединной поверхности — дуга окружности радиусом R . Геометрия амортизаторов задана следующими значениями безразмерных параметров: $h^0/H^0=0,24$; $r_1^0/H^0=0,3$; $r_2^0/H^0=1,14$; $R/H^0=1,8$.

На фиг. 3, 4, 5 (соответственно для амортизаторов I, II и III типов) представлены амплитудно — частотные характеристики в резонансных зонах. По оси абсцисс отложено значение частоты внешнего вынуждающего воздействия p , по оси ординат — значение коэффициента динамичности $k=A_m/a$ (относительной амплитуды установившихся колебаний груза). Высота амортизатора H^0 принята равной 0,06 м. В качестве ядра релаксации использовалось ядро Колтунова — Ржаницына [7]: $R(t)=At^{\alpha-1}e^{-\beta t}$. Для всех кривых $\alpha=0,1$; $\beta=0,05$ величина A варьировалась. Штрихпунктирные линии на графиках соответствуют значению $A=0,005$, пунктирные $A=0,025$, сплошные $A=0,05$. Масса груза выбиралась так, чтобы обеспечить амортизатору заданную осадку: цифрой 1 отмечены кривые, соответствующие предварительной осадке $\Delta_0=0,08$; цифрой 2 — $\Delta_0=0,016$; цифрой 3 — $\Delta_0=0,3$ (см. фиг. 2).

Как показали расчеты, увеличение массы груза приводит к снижению коэффициентов динамичности для конического и выпуклого амортизаторов (фиг. 3 и 4). Резонансные пики при этом снижаются, а при увеличении вязкого сопротивления (параметра A) отсутствуют. В случае же «вогнутого» амортизатора значительное увеличение массы груза приводит к существенному возрастанию коэффициента динамичности (фиг. 5), что вызвано более быстрым по сравнению с ω^2 уменьшением значения параметра λ . Во всех случаях при слабом вязком сопротивлении резонансные частоты близки к ω . С увеличением вязкого сопротивления резонансные пики сдвигаются влево, а соответствующие значения относительных амплитуд падают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. Карнаухов В. Г., Сенченко И. К., Гуменюк В. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. Киев.: Наук. думка, 1985. 288 с.
3. Колтунов М. А., Трояновский И. Е. Геометрически нелинейная задача теории вязкоупругости // Механика эластомеров. Краснодар.: Кубанск. ун-т, 1977. № 1. С. 36—46.
4. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
5. Валливили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
6. Слепнева Л. В. Установившиеся колебания вязкоупругого амортизатора вращения, несущего массивное тело. // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин.: Калининск. политехн. ин-т, 1989. С. 127—132.
7. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976. 277 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
13.XI.1989