

УДК 539.3

© 1991 г.

Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

**ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА ТРЕЩИНАХ,  
ОТВЕРСТИЯХ, ВКЛЮЧЕНИЯХ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

Предлагается новая процедура решения дифракционных задач, основанная на специальных интегральных представлениях волновых потенциалов и сведения краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям. Дифракция упругих волн на трещинах исследовалась, например [1-4], на отверстиях и включениях в [5-8].

1. Рассмотрим отнесенную к декартовым прямоугольным координатам  $Ox_1x_2x_3$  упругую изотропную среду, ослабленную туннельными вдоль  $x_3$  полостями. Пусть на поверхностях полостей задана гармонически изменяющаяся со временем нагрузка  $X_{3n}=0$   $X_{jn}=\text{Re}(\exp(-i\omega t)X_j(x_1, x_2))$ ,  $j=1, 2$ , а из бесконечности излучается плоская монохроматическая волна расширения или сдвига. Поперечное сечение тела плоскостью  $x_3=\text{const}$  представляет собой многосвязную область  $D$ , ограниченную замкнутыми контурами  $l_j$  и (или) разомкнутыми дугами  $L_j$ . Будем предполагать, что кривизны этих контуров, а также функции  $X_j(x_1, x_2)$  удовлетворяют условию Гельдера. Конечные односвязные области, ограниченные контурами  $l_j$ , обозначим через  $D_j$ . Задача заключается в построении единой в методологическом отношении процедуры, позволяющей эффективно решать дифракционные задачи для тел с концентраторами напряжений (трещины, отверстия, включения).

Согласно методу Лемба поля напряжений и перемещений в линейно-упругой изотропной среде можно выразить через волновые потенциалы  $\Phi_m(x_1, x_2, t)=\text{Re}(\exp(-i\omega t)\Phi_m)$ , где функции  $\Phi_m$  ( $m=1, 2$ ) есть решения соответствующих уравнений Гельмгольца. Пусть напряжения  $\sigma_{mn}=\text{Re}(\exp(-i\omega t)S_{mn})$ , выпишем необходимые нам в дальнейшем комбинации амплитуд напряжений

$$S_{11}+S_{22}=2(\lambda+\mu)\nabla^2\Phi_1, \quad \partial/\partial z=1/2(\partial_1-i\partial_2), \quad \partial_n=\partial/\partial x_n \quad (1.1)$$

$$S_{22}-S_{11}+2iS_{12}=-8\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Phi_1+i\Phi_2), \quad z=x_1+ix_2$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе,  $i$  — мнимая единица. Краевые условия первой основной задачи выражаются через комбинации (1.1) следующим образом

$$T_{11}+T_{22}-e^{\pm 2i\psi}(T_{22}-T_{11}\pm 2iT_{12})=2(N_*\mp iT_*) \quad (1.2)$$

$$T_{mn}=S_{mn}+S_{mn}^0$$

Здесь  $L$  — полная граница области,  $\psi$  — угол между положительной нормалью к  $L$  и осью  $Ox_1$ ,  $S_{mn}^0$  — тензор амплитуд напряжений в падающей волне,  $N_*, T_*$  — амплитуды нормальной и касательной к  $L$  нагрузки соответственно.

Принципиальным моментом является выбор интегральных представлений для потенциалов  $\Phi_m$ . В статьях [4, 8] представления строятся непосредственно для перемещений и производных от них, что дает автоматическое обеспечение условия существования скачка вектора перемещения и непрерывности вектора напряжения при переходе через разрез. Однако представления эти громоздки и приводят к достаточно сложным алгоритмам решения дифракционных задач. С другой стороны, попытки решать задачу дифракции на криволинейном экране (разреze) при помощи интегральных представлений потенциалов  $\Phi_m$  наталкивались на трудности иного рода, связанные с высоким порядком дифференциальных операторов в граничных условиях (1.2), действующих на функции  $\Phi_m$ .

Для преодоления указанных трудностей, ниже реализуем идею согласно которой расходящиеся члены, появляющиеся в потенциальной и вихревой частях решения должны взаимно уничтожаться. Интересно отметить, что полученные на этом пути интегральные представления потенциалов  $\Phi_m$  оказываются справедливыми и для концентраторов других типов (отверстия, включения).

2. Рассмотрим сперва неограниченную среду, ослабленную полостями разрезами  $L_j$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) и положим

$$\Phi_m(z) = \int_L \left\{ p_m H_0^{(1)}(\gamma_m r) ds + q_m \frac{\partial}{\partial \xi} H_0^{(1)}(\gamma_m r) d\xi + r_m \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} H_0^{(1)}(\gamma_m r) d\bar{\xi} \right\} \quad (2.1)$$

$$r = |\xi - z|, \quad \gamma_m = \omega/c_m, \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2 \in L_j$$

Здесь  $p_m(\xi)$ ,  $q_m(\xi)$ ,  $r_m(\xi)$  — искомые плотности,  $H_p^{(1)}(x)$  — функция Ханкеля первого рода,  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения волн расширения и сдвига соответственно,  $\omega$  — круговая частота.

Функции (2.1) являются решениями соответствующих уравнений Гельмгольца и обеспечивают выполнение условия излучения. Для уничтожения расходящейся части в перемещениях и напряжениях достаточно потребовать, чтобы  $q_2 = iq_1$  и  $r_2 = -ir_1$ .

Рассмотрим далее вектор перемещения  $u_m$  ( $m=1, 2$ ). Имеем

$$u_m = \text{Re}(\exp(-i\omega t) U_m). \quad (2.2)$$

$$U_1 - iU_2 = 2 \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_1 + i\Phi_2), \quad U_1 + iU_2 = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\Phi_1 - i\Phi_2)$$

Подставляя сюда функции (2.1) и вычисляя скачок амплитуд перемещений на  $L$ , находим

$$[U_1 \pm iU_2] = \mp 4e^{\pm i\psi} (p_2 \pm ip_1) \quad (2.3)$$

где символ  $[\cdot]$  обозначает скачок соответствующей величины на  $L$ .

Таким образом, представления (2.1) с учетом равенств  $4p_1 = -i([U_1] \cos \psi + [U_2] \sin \psi)$ ,  $4p_2 = i([U_1] \sin \psi - [U_2] \cos \psi)$  обеспечивают существование скачка вектора перемещения на контурах разрезов. Функции  $p_1(\xi)$ ,  $p_2(\xi)$  пропорциональны соответственно нормальной и касательной компонентам скачка амплитуды вектора перемещения на  $L$ .

Перейдем теперь к условию непрерывной продолжимости вектора напряжения при переходе через разрез. Для этого необходимо подставить предельные значения функции (2.1) и соответствующих производных от них в краевые условия (1.2) и приравнять нулю внеинтегральные члены.

Находим после преобразований ( $ds$  — элемент дуги контура  $L$ ):

$$2i\gamma_2^2 q_1(\xi) = e^{-i\psi} \frac{d}{ds} [U_1 + iU_2], \quad 2i\gamma_2^2 r_1(\xi) = e^{i\psi} \frac{d}{ds} [U_1 - iU_2] \quad (2.4)$$

Этим завершается обоснование корректности представлений (2.1). В силу соотношений (2.3) и (2.4), краевые условия (1.2) достаточно выполнить лишь на одном из берегов  $L$ . В результате — приходим к следующей системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^2 \int_L \{h_{mn} Q_n'(\xi) + \gamma_1 H_{mn} Q_n(\xi)\} ds = F_m(\xi_0) \quad (m=1, 2) \quad (2.5)$$

$$h_{nn}(\xi, \xi_0) = (-1)^{n-1} \alpha_n [ (4(\pi i r_0)^{-1} - \gamma_1 f_{11}) \tau_n - \gamma_1 b H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) ], \quad \xi_0 \in L_j$$

$$h_{mn}(\xi, \xi_0) = (-1)^n \gamma_1 \alpha_n (b H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) - \tau_m f_{12}) \quad (m \neq n; m, n=1, 2)$$

$$2H_{mn}(\xi, \xi_0) = i\gamma_1 w_n (F_{mn} \tau_m - \sigma H_0^{(1)}(\gamma_1 r_0)), \quad r_0 = |\xi - \xi_0|$$

$$\tau_n = \exp(2i(-1)^{n-1}(\psi_0 - \alpha_0)), \quad \alpha_n = \exp(i(-1)^{n-1}\alpha_0), \quad \alpha_0 = \arg(\xi - \xi_0)$$

$$f_{11} = \gamma^2 H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) + \gamma^{-1} H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0), \quad w_n = \exp(i(-1)^{n-1}\psi), \quad \psi_0 = \psi(\xi_0)$$

$$f_{12} = \gamma^2 H_3(\gamma_1 r_0) - \gamma^{-1} H_3(\gamma_2 r_0), \quad b = (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad Q' = dQ/ds$$

$$F_{11} = F_{22} = H_2(\gamma_1 r_0) + \gamma^{-2} H_2(\gamma_2 r_0), \quad F_{12} = F_{21} = H_2(\gamma_1 r_0) - \gamma^{-2} H_2(\gamma_2 r_0)$$

$$\mu F_n(\xi) = 4 \left\{ N_* + i(-1)^n T_* + \gamma_1^2 (\lambda + \mu) \Phi_1^0(\xi) + \right.$$

$$\left. + \mu \sum_{m=1}^2 (i(-1)^{n-1})^{m-1} \gamma_m^2 \Phi_m^0(\xi) \exp(2i(-1)^n(\beta - \psi)) \right\}, \quad \gamma^2 = \gamma_1 \gamma_2^{-1}$$

$$\Phi_m^0(\xi) = d_m \exp(-i\gamma_m(\xi_1 \cos \beta + \xi_2 \sin \beta)), \quad Q_1 = [U_1 - iU_2], \quad Q_2 = [U_1 + iU_2].$$

$$H_2(x) = 4i(\pi x^2)^{-1} + H_2^{(1)}(x), \quad H_3(x) = 16i(\pi x^3)^{-1} + H_3^{(1)}(x),$$

$$\sigma = (\lambda + \mu) \mu^{-1} = (1 - 2\nu)^{-1}$$

Здесь  $\beta$  — угол между нормалью к фронту падающей волны и осью  $Ox_1$ ,  $d_m$  — соответствующие амплитуды падающих волн,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Ядра  $h_{nn}$  — сингулярные, остальные ядра могут иметь не более чем слабую особенность.

Дополнительные условия, фиксирующие решения  $Q'(\xi)$  в классе функций неограниченных на концах  $L_j$ , имеют вид

$$\int_{L_j} dQ_{nj}(\xi) = 0, \quad Q_n(\xi) = (Q_n^j(\xi), \xi \in L_j) \quad (n=1, 2; j=1, 2, \dots, k) \quad (2.6)$$

Из системы (2.5) можно получить «статику», для этого достаточно осуществить в ядрах и правой части предельный переход при  $\omega \rightarrow 0$ . Имеем полагая, что на берегах разрезов действует нагрузка  $N - iT$ :

$$h_{11}^0 = \frac{4b}{\pi i} \frac{d}{d\bar{\xi}_0} \{ \ln |\xi - \xi_0| \}, \quad h_{12}^0 = -\frac{2b}{\pi i} \frac{d}{d\bar{\xi}_0} \left( \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{\xi - \xi_0} \right)$$

$$h_{22}^0 = \bar{h}_{11}^0, \quad h_{21}^0 = \bar{h}_{12}^0, \quad h_{mn}^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} h_{mn}$$

Отсюда непосредственно видно, что два уравнения (2.5) равносильны. Получаем простое интегральное уравнение, соответствующее статическому случаю

$$\sum_{n=1}^2 \int_L h_{1n}^0(\xi, \xi_0) dQ_n = F_1^0(\xi_0), \quad Q_2 = \bar{Q}_1 = [u_1 + iu_2], \quad F_1^0 = 4(N - iT) \mu^{-1}$$

Для определения напряжений непосредственно переходить к пределу в формулах (1.1) нельзя. Сперва необходимо проделать предписанные там операции, а затем учитывая структуру функций Ханкеля и соотношения (2.3) и (2.4) выполнить предельный переход  $\omega \rightarrow 0$ . Действуя по этой схеме, находим

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \quad (2.7)$$

$$\Phi(z) = \frac{\mu b}{2\pi i} \int_L \frac{dQ_2}{\xi - z}, \quad \Psi(z) = -\frac{\mu b}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{\bar{\xi} dQ_2}{(\xi - z)^2} + \frac{d\bar{Q}_2}{\xi - z} \right\}$$

Эти представления, по существу, равносильны формулам (3.3) из работы [9], полученным автором совершенно иным путем.

3. Рассмотрим теперь неограниченную изотропную среду, ослабленную туннельными полостями — отверстиями. Интегральные представления потенциалов возьмем в виде

$$\Phi_m(z) = \int_c \left\{ q_m \frac{\partial}{\partial \xi} H_0^{(1)}(\gamma_m r) d\xi + r_m \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} H_0^{(1)}(\gamma_m r) d\bar{\xi} \right\} \quad \xi \in C = Ul_j \quad (3.1)$$

Здесь  $l_j$  ( $j=1, 2, \dots, r$ ) — контуры отверстий в сечении  $x_3 = \text{const}$ , направление интегрирования — против часовой стрелки. Также как и ранее потребуем, чтобы  $q_2 = iq_1$ ,  $r_2 = -ir_1$ .

Подставляя предельные значения амплитуд напряжений (1.1) в граничные условия (1.2), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода

$$y_m(\xi_0) - \frac{\gamma^2}{\pi} \int_c y_m(\xi) \frac{\bar{\alpha}_m w_m}{r_0} ds + \frac{i}{4} \sum_{n=1}^2 \int_c y_n(\xi) g_{mn}^* ds = W_m(\xi_0) \quad (3.2)$$

$$y_1 = r_1(\xi), \quad y_2 = q_1(\xi), \quad \xi_0 \in l_j \quad (m=1, 2; j=1, 2, \dots, r)$$

$$g_{nn}^* = g_{nn}(\xi, \xi_0), \quad g_{12}^* = G_{12}(\xi, \xi_0), \quad g_{21}^* = G_{21}(\xi, \xi_0)$$

$$G_{mn}(\xi, \xi_0) = \gamma_1 (bH_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) (-1)^{m+n-1} - \tau_m f_{mn}) \alpha_n \bar{w}_n$$

$$g_{nn}(\xi, \xi_0) = G_{nn}(\xi, \xi_0) - 4i\gamma^2 w_n \bar{\alpha}_n (\pi r_0)^{-1}$$

$$8\gamma^2 W_m(\xi) = (-1)^{m-1} F_m(\xi), \quad f_{22} = f_{11}, \quad f_{21} = f_{12}$$

Здесь функции  $f_{mn}$ ,  $F_m$  заданы в (2.5), ядра  $g_{mm}$ ,  $G_{12}$  и  $G_{21}$  — регулярны.

Система (3.2) принадлежит к нормальному типу, суммарный индекс ее равен нулю и, следовательно, здесь справедливы теоремы Фредгольма [10]. Отсюда вытекает ее однозначная разрешимость для любой частоты  $\omega$ , не совпадающей с собственной (если таковые существуют).

Рассмотрим предельный случай нашей задачи при  $\omega \rightarrow 0$ . Предположим, что на краях отверстий  $l_j$  задан вектор напряжения  $N - iT$ , на бесконечности напряжения отсутствуют. Имеем, используя выражения для ядер в (3.2):

$$G_{11}^0 = \frac{2b}{i\pi} e^{-i\psi} \frac{d}{d\bar{\xi}_0} \left\{ \ln \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{(\xi - \xi_0)^*} \right\}, \quad G_{22}^0 = -\bar{G}_{11}^0, \quad G_{21}^0 = -\bar{G}_{12}^0$$

$$G_{12}^0 = \frac{2b}{i\pi} e^{i\psi} \frac{d}{d\bar{\xi}_0} \left( \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0}{\xi_0 - \xi} \right), \quad G_{mn}^0 = \lim G_{mn}(\omega \rightarrow 0)$$

$$\kappa = (1 + \gamma^2)(1 - \gamma^2)^{-1} = (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1}$$

Подстановка этих предельных значений в уравнения (3.2) дает  $r_1 + \bar{q}_1 = 0$ , откуда заключаем, что они равносильны. Полагая  $\omega(\zeta) = -2\mu\gamma_2^2 q_1(\zeta)$ , получаем сингулярное интегральное уравнение, соответствующее статическому случаю

$$\overline{\omega(\zeta_0)} + {}^{1/4}i \int_c \{G_{11}^0(\zeta, \zeta_0) \overline{\omega(\zeta)} - G_{12}^0(\zeta, \zeta_0) \omega(\zeta)\} ds = iT - N \quad (3.3)$$

Напряжения определяются формулами (2.7), причем комплексные потенциалы в этом случае имеют вид

$$\Phi(z) = \frac{b}{2\pi i} \int_c \frac{\omega(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \Psi(z) = \frac{\kappa b}{2\pi i} \int_c \frac{\overline{\omega(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} - \frac{b}{2\pi i} \int_c \frac{\bar{\zeta} \omega(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad z \in D \quad (3.4)$$

Любопытно, что ядра интегрального уравнения (3.3) и функции (3.4) зависят от коэффициента Пуассона. Однако напряжения в среде (при условии, что главные векторы усилий заданных на контуре каждого отверстия  $l_j$ , равны нулю) не зависят от упругих постоянных. Это следует из того, что перемещения, определяемые потенциалами (3.4), однозначные функции и всякое непрерывное решение уравнения (3.3) в совокупности с (3.4), обеспечивает равенство нулю главного вектора усилий на  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ).

В самом деле, определим регулярные в  $D_j$  функции следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi_j(z) &= \frac{b}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\omega(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, & \Psi_j(z) &= \frac{\kappa b}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\overline{\omega(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} \\ & & & - \frac{b}{2\pi i} \int_{l_j} \frac{\bar{\zeta} \omega(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad z \in D_j \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда, граничные условия первой основной задачи в области  $D_j$  можно представить так  $\Phi_j(\zeta) + \bar{\Phi}_j(\bar{\zeta}) - e^{2i\psi}(\bar{\zeta} \Phi_j'(\zeta) + \Psi_j(\zeta)) - b(1 + \kappa) \overline{\omega(\zeta)} = N - iT$ . Интегрируя это равенство, находим

$$[\overline{\Phi_j(\zeta)} + \bar{\zeta} \bar{\Phi}_j(\bar{\zeta}) + \Psi_j(\zeta)]_{l_j} - b(1 + \kappa) \int_{l_j} \overline{\omega(\zeta)} d\bar{\zeta} = \int_{l_j} (N - iT) d\bar{\zeta}$$

Поскольку выражение в квадратных скобках — функция однозначная, заключаем, что всякое решение уравнения (3.3) подчиняется условиям

$$\int_{l_j} \omega(\zeta) d\zeta = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (3.6)$$

Нетрудно видеть, что представления (3.4) в совокупности с (3.6) обеспечивают равенство нулю главного вектора усилий на каждом отверстии.

Покажем теперь, что интегральное уравнение (3.3) однозначно разрешимо. Для этого достаточно доказать, что соответствующее ему однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. На основании теоремы единственности имеем  $\Phi_0(z) = i\varepsilon$ ,  $\Psi_0(z) = 0$ ,  $\text{Im } \varepsilon = 0$ . Здесь и ниже пополюскам помечаем функции, относящиеся к однородной задаче ( $N = T = 0$ ). Введем в рассмотрение регулярные в  $D_j$  функции (3.5)  $\Phi_j^*(z) = \Phi_j(z) - i\varepsilon$ ,  $\Psi_j(z)$ . Имеют место соотношения

$$\Phi_j^*(\zeta) = b\omega_0(\zeta), \quad \Psi_j(z) = (b\omega_0(\zeta) - \kappa b \overline{\omega_0(\zeta)}) e^{-2i\psi} - b \bar{\zeta} \omega_0'(\zeta), \quad \zeta \in l_j \quad (3.7)$$

Исключая отсюда функцию  $\omega_0(\xi)$  и интегрируя затем полученное равенство, приходим к следующей второй краевой задаче для односвязной области  $D_j$ :

$$\overline{\kappa\varphi_j^*(\xi)} - \bar{\xi}\Phi_j^*(\xi) - \psi_j(\xi) = n_j = \text{const} \quad (j=1, 2, \dots, r)$$

В силу теоремы единственности получаем  $\varphi_j^*(z) = m_j$ ,  $\psi_j(z) = \kappa\bar{m}_j - n_j$  ( $m_j = \text{const}$ ). Отсюда и из первого равенства (3.7) заключаем, что  $\omega_0(\xi) = 0$ .

4. Пусть теперь области  $D_j$  заполнены упругими инородными включениями, непрерывно скрепленными с матрицей вдоль контуров  $l_j$  ( $j=1, 2, \dots, r$ ). Условия сопряжения, заключающиеся в непрерывности векторов перемещения и напряжения при переходе через  $l_j$ , приводят обычно к смешанной системе сингулярных и фредгольмовых уравнений. Чтобы избежать этого целесообразно условия сопряжения по перемещениям продифференцировать по дуговой координате  $s$ . Тогда, в силу соотношений (1.1), (1.2) и (2.2) получаем следующую систему граничных условий на  $l_j$ :

$$\sum_{n=1}^2 (A_{mn}\Phi_n - A_{mn}^j\Phi_{nj}) = 0 \quad (m=1, 2, 3, 4) \quad (4.1)$$

$$A_{11} = -\gamma_1^2(\lambda + \mu) + 4\mu e^{2i\psi} d^2, \quad A_{2n} = \bar{A}_{1n}$$

$$A_{12} = 4i\mu e^{2i\psi} d^2, \quad d = \partial/\partial z, \quad A_{4n} = \bar{A}_{3n}$$

$$A_{31} = \gamma_1^2 + 4e^{2i\psi} d^2, \quad A_{32} = i(\gamma_2^2 + 4e^{2i\psi} d^2)$$

Здесь потенциалы  $\Phi_n$  и  $\Phi_{nj}$  относятся к матрице и  $j$ -у включению соответственно, для определения операторов  $A_{mn}^j$  необходимо в формулах для  $A_{mn}$  константам  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  приписать снизу индекс  $j$ . Функции  $\Phi_m$  и  $\Phi_{mj}$  представим в виде

$$\Phi_m(z) = \Phi_m^0 + \int_c \left\{ q_m(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} H_0^{(1)}(\gamma_m r) d\xi + r_m(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} H_0^{(1)}(\gamma_m r) d\bar{\xi} \right\}, \quad z \in D \quad (4.2)$$

$$\Phi_{mj}(z) = \int_c \left\{ \alpha_{mj}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} H_0^{(1)}(\gamma_{mj} r) d\xi + \beta_{mj}(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} H_0^{(1)}(\gamma_{mj} r) d\bar{\xi} \right\}, \quad z \in D_j$$

$$q_2 = iq_1, \quad r_2 = -ir_1, \quad \alpha_{2j} = i\alpha_{1j}, \quad \beta_{2j} = -i\beta_{1j}$$

Величины  $c_{1j}$  и  $c_{2j}$  — соответственно, скорости распространения продольной и поперечной волны в  $j$ -м включении; плотности  $q_1$ ,  $r_1$ ,  $\alpha_{1j}$ ,  $\beta_{1j}$  подлежат определению.

Подставляя предельные значения функций (4.2) в условия сопряжения (4.1), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода

$$\sum_{n=1}^2 \left\{ \delta_{mn}(y_n(\xi_0) + \varepsilon_j y_{nj}(\xi)) + \frac{i}{4} \int_c (G_{mn} y_n(\xi) + R_{mn}^j y_{nj}(\xi)) ds \right\} = W_m(\xi_0) \quad (4.3)$$

$$(m=1, 2, 3, 4)$$

$$y_1(\xi) = r_1(\xi), \quad y_2(\xi) = q_1(\xi), \quad y_{1j}(\xi) = \beta_{1j}(\xi), \quad y_{2j}(\xi) = \alpha_{1j}(\xi)$$

$$R_{mn}^j = -\varepsilon_j G_{mn}^j(\xi, \xi_0), \quad \delta_{nn} = 1, \quad \delta_{mn} = 0 \quad (m \neq n; m=1, 2)$$

$$\gamma_2^2 R_{3n}^j = (-1)^n K_{1n}^j(\xi, \xi_0) \gamma_{2j}^2, \quad \gamma_2^2 R_{4n}^j = (-1)^n K_{2n}^j(\xi, \xi_0) \gamma_{2j}^2$$

$$G_{31}(\xi, \xi_0) = K_{11} = \gamma_1 \alpha_{11} \bar{w}_1 (f_{12} \bar{v}_1 + g_{11}), \quad \varepsilon_j = \mu_j \gamma_{2j}^2 (\mu \gamma_2^2)^{-1}$$

$$G_{32}(\xi, \xi_0) = -K_{12} = \gamma_1 \bar{\alpha}_1 w_1 f_{11}(\bar{\tau}_1 - 1), \quad \xi_0 \in l_j \quad (j=1, 2, \dots, r)$$

$$G_{41}(\xi, \xi_0) = K_{21} = \gamma_1 \alpha_1 \bar{w}_1 f_{11}(1 - \tau_1)$$

$$G_{42}(\xi, \xi_0) = -K_{22} = -\gamma_1 \bar{\alpha}_1 w_1 (\tau_1 f_{12} + g_{11})$$

$$2W_1(\xi) = b\Phi_1^0(\xi) + e^{2i(\psi-\beta)}\Lambda_1(\xi), \quad g_{11} = \gamma^2 H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) - \gamma^{-1} H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0)$$

$$2W_2(\xi) = -(b\Phi_1^0(\xi) + e^{2i(\beta-\psi)}\Lambda_2(\xi))$$

$$2W_3(\xi) = (e^{2i(\beta-\psi)} - 1)\Lambda_2(\xi), \quad 2W_4(\xi) = (e^{2i(\psi-\beta)} - 1)\Lambda_1(\xi)$$

$$\Lambda_1(\xi) = \sum_{n=1}^2 i^{n-1} \Phi_n^0(\xi) \gamma_n^2 \gamma_2^{-2}, \quad \Lambda_2(\xi) = \sum_{n=1}^2 (-i)^{n-1} \Phi_n^0(\xi) \gamma_n^2 \gamma_2^{-2}$$

Функции  $f_{mn}$ ,  $G_{mn}$ ,  $\Phi_m^0(\xi)$  ( $m, n=1, 2$ ) заданы в (2.5) и (3.2). Функции  $G_{mn}^j$  и  $K_{mn}^j$  определяются из выражений для  $G_{mn}$  и  $K_{mn}$  если подставить в них вместо констант материала матрицы  $b$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  константы  $j$ -го включения  $b_j$ ,  $\gamma_{1j}$ ,  $\gamma_{2j}$ .

В системе (4.3) ядра  $G_{11}$ ,  $G_{22}$ ,  $G_{32}$ ,  $G_{41}$ ,  $R_{11}^j$ ,  $R_{22}^j$ ,  $R_{32}^j$  и  $R_{41}^j$  — сингулярны (ядро Коши), остальные ядра регулярны. Она принадлежит к нормальному типу с нулевым суммарным индексом.

5. В качестве первого примера рассмотрим неограниченную упругую среду, ослабленную двумя прямолинейными разрезами, один из которых занимает отрезок  $[-1, 1]$  оси  $Ox_1$ , а второй наклонен к нему под углом  $\varphi$  (фиг. 1). Длина второго разреза  $2l=2$ , расстояние между находящимися на оси  $x_2$  центрами разрезов  $\delta=3l$ . Из бесконечности вдоль оси  $x_1$  падает  $SV$ -волна  $\Phi_2^0 = d_2 \exp(-i\gamma_2 x_1)$ .

Система уравнений (2.5), (2.6) сводилась к линейным алгебраическим уравнениям в соответствии с процедурой работы [11]. Коэффициент интенсивности напряжений определяется формулой  $K_{II} = S\sqrt{\pi l}|T|\cos(\omega t - \alpha)$ ,  $S = -\mu d_2 \gamma_2^2$ ,  $\alpha = \arg T$ .

Графики величины  $|T|$  в функции от угла  $\varphi$  при  $\gamma_1 l = 0,5$  и коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,37$  представлены на фиг. 1. Кривые 1, 2 построены для вершин  $a_1$  и  $b_1$  соответственно. Изменение величины  $|T|$  на концах горизонтальной трещины невелико ( $1,08 \leq |T_{a_2}| \leq 1,18$ ;  $0,87 \leq |T_{b_2}| \leq 0,95$ ).

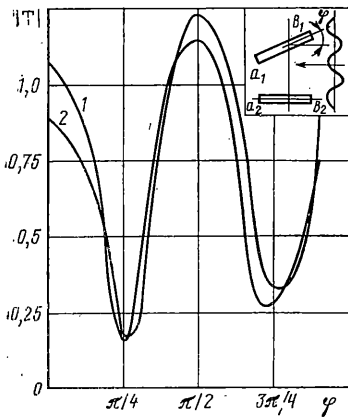
В качестве второго примера рассмотрим стационарную динамическую задачу для упругой пластинки с эллиптическим отверстием  $\xi_1 = R_1 \cos \theta$ ,  $\xi_2 = R_2 \sin \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ). Приведем результаты расчетов по алгоритму п. 3 для двух случаев нагружения: на контуре отверстия действует нормальное давление  $N = \operatorname{Re}(\exp(-i\omega t)N_*)$ ; отверстие свободно от сил, а из бесконечности излучается  $PV$ -волна  $\Phi_1^0 = d_1 \exp(-i\gamma_1 x_2)$ .

Напряжение на контуре отверстия для этих случаев определяется по следующей формуле

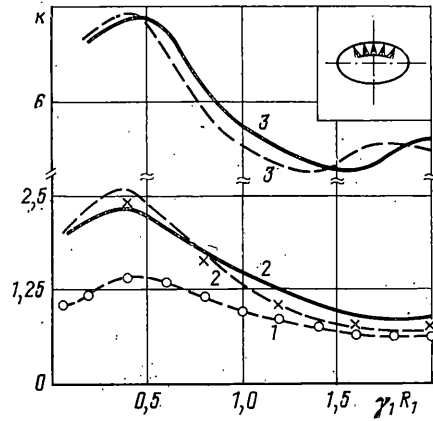
$$\sigma_\theta = |S_\theta| \cos(\omega t - \alpha), \quad \alpha = \arg S_\theta$$

$$k(\theta) = S_\theta / S = b \left\{ r_1^*(\xi_0) - q_1^*(\xi_0) + \frac{1}{2} i \gamma_1 \int_c H_1^{(1)}(\gamma_1 r_0) [q_1^*(\xi) e^{i(\psi - \alpha_0)} - \right. \\ \left. - r_1^*(\xi) e^{i(\alpha_0 - \psi)}] ds + 2e^{-i\gamma_1 \xi_2^0} \right\} - 1, \quad \xi_2^0 = \operatorname{Im} \xi_0 \\ q_1(\xi) = S q_1^*(\xi) (2\mu \gamma_2^2)^{-1}, \quad r_1(\xi) = S r_1^*(\xi) (2\mu \gamma_2^2)^{-1}$$

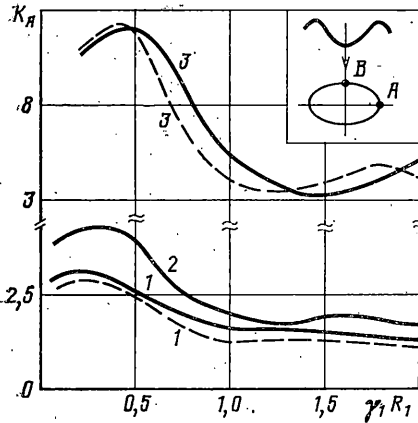
причем в первом случае нагружения необходимо положить  $S = N_*$  и опустить последний член в фигурных скобках, во втором случае надо положить  $S = -\mu d_1 \gamma_2^2$  и опустить при этом последнее слагаемое  $(-1)$ . Для плоского напряженного состояния  $b = (1 + \nu)/2$ .



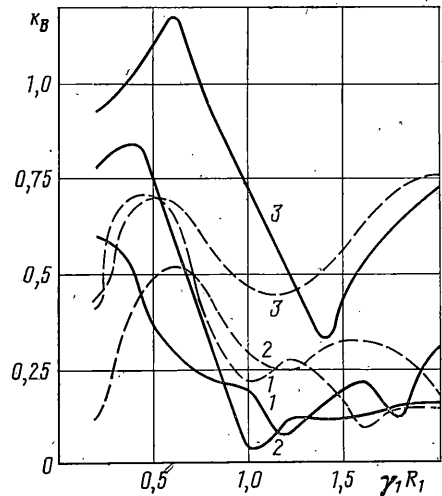
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2 приведены результаты, отвечающие первому случаю нагружения. Сплошные линии соответствуют значению  $\nu=0,15$ , штриховые —  $\nu=0,45$ . Кривые 1, 2, 3 построены для значений параметра  $R_2/R_1=1; 0,67$  и  $0,2$  соответственно. Точками обозначено точное решение для кругового отверстия, крестиками — результаты из книги [7] для эллиптического отверстия при  $R_2/R_1=0,67$ .

На фиг. 3 и 4 в том же соответствии, что и ранее представлены результаты расчетов величины  $|k|$  для второго случая нагружения.

В заключение отметим, что при рассмотрении дифракционных задач на отверстиях можно пользоваться процедурой п. 2. При этом решение системы (2.5) на замкнутых контурах  $l_i$  ограничено и дополнительные условия (2.6) необходимо отбросить. При исследовании дифракции упругих волн на совокупности разнородных концентраторов интегральные представления решений представляют собой сумму выражений типа (2.1), (3.1) и (4.2). Соответствующие интегральные уравнения записываются естественным образом, в силу громоздкости они здесь не приводятся.

Автор благодарит Н. В. Тыркусову за помощь в численной реализации алгоритмов.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паргон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
2. *Elastodynamic crack problems*/(ed.) Sih S. C. Leyden: Noordhoff, 1977. 352 p.
3. *Фильштинский Л. А.* Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (деформация продольного сдвига) // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 6. С. 1327–1330.
4. *Фильштинский Л. А., Волкова Л. В.* Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (плоская деформация) // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 831–834.
5. *Pao Y. H., Mow C. C.* Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. New York: Publ. Weekly. 1973. 694 p.
6. *Shibahara M., Taniguchi Y.* Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems // Bull. JSME. 1983. V. 26. No. 222. P. 2054–2059.
7. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Череско М. А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 307 с.
8. *Назаренко А. М., Фильштинский Л. А.* Взаимодействие волн напряжений с жесткими вставками в полупространстве (плоская деформация) // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 95–102.
9. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами: Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 91–97.
10. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 252 с.
11. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Сумы

Поступила в редакцию  
14.VIII.1989