МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1991

УДК 539.3

Л. В. КУЧЕРОВ, М. И. ЧЕБАКОВ

КОНТАКТНАЯ ОБОБЩЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОЛЬЦА

Предлагается схема решения плоской статической контактной задачи теории упругости для кольца, взаимодействующего с системой периодически расположенных жестких штампов, когда их радиальные перемещения, вообще говоря, не равны друг другу. Предлагаемая схема опирается на работы [1–2]. Решение исходной задачи представляется в виде суперпозиции решений более простых задач для кольца, которые эквивалентны соответствующим задачам для сектора кольца с одним или несколькими штампами с известными условиями на торцах и могут быть сведены к парным (тройным и т. д.) рядам – уравнениям и далее к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей. Последние урезаются специальным образом с учетом асимптотического поведения их решения [1] [3] и решаются любым прямым методом. Приводятся результаты численной реализации решения задачи с четырьмя штампами, когда три штампа неподвижны, а перемещение четвертого задано. Исследована зависимость величин контактных напряжений, сил и моментов для каждого штампа в зависимости от параметров задачи. Периодические контактные задачи для кольца рассматривались в работах [2] [4–6] и др.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело в форме кольца $R_1<r<R_2$ с центром в начале полярных координат (r, ψ). На грань $r=R_2$ действуют n штампов, расположенных так, что ось $\psi=0$ проходит через центр первого из них, а остальные нумеруются в положительном направлении отсчета ψ и расположены друг от друга на угловом расстоянии $2\gamma=2\pi/n$. На грани $r=R_1$ заданы нулевые нормальные перемещения и либо нулевые касательные напряжения (скользящая заделка), либо нулевые касательные перемещения (жесткая заделка). Перемещения под штампом с номером $k+1$ описываются функцией $\delta_k(\psi)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, причем $\delta_k(\psi)=0$ для $k>0$, а $\delta_0(\psi)=\delta\cos\psi$, где $\delta=\mathrm{const}$, т. е. первый штамп движется поступательно в радиальном направлении, тогда как остальные неподвижны. Трение под штампами отсутствует. Угловые размеры штампов совпадают и равны 2θ. Исследуется плоское напряженное состояние.

Схема решения состоит в том, что решение исходной задачи представляется в виде суперпозиции решений задач, которые отличаются от поставленной выше функциями $\delta_k(\psi)$, а именно, $\delta_k(\psi)=\pm\delta\cos\varphi$, $(\varphi=\psi-2k\gamma)$ для любого k. Такие задачи в силу свойств симметрии эквивалентны соответствующим задачам для сектора кольца с одним или несколькими штампами и известными условиями на торцах.

Рассмотрим случай, когда число штампов равно четырем. Для этого, в соответствии с предложенной схемой введем в рассмотрение три задачи (верхний индекс соответствует номеру задачи):

---

[1] Чебаков М. И. Метод решения одного класса бесконечных систем в контактных задачах теории упругости // Современные проблемы теории контактных взаимодействий: Тез. докл. выездного заседания Межвед. науч. совета по трибологии. Ереван: 1988. С. 143–145.

[2] Кучеров Л. В., Цветков А. Н., Чебаков М. И. Контактная задача для кольцевого сектора. Ростов н/Д., 1988. Деп. в ВИНИТИ. № 681-В88 Деп. 6.01.88.

1) $\delta_k^1(\psi)=\delta_0(\psi)$, $k=0, 1, 2, 3$, $|\varphi|<\theta$ — соответствует симметричной задаче для сектора кольца со скользящими боковыми заделками [3];

2) $\delta_k^2(\psi)=\delta_0(\varphi)\cos\pi k$, $k=0, 1, 2, 3$ — соответствует условиям на торцах — $\sigma_\varphi=0$, $u_r=0$ ($|\varphi|=\gamma$);

3) $\delta_k^3(\psi)=\delta_0(\varphi)[\cos\pi k/2-\sin\pi k/2]$, $k=0, 1, 2, 3$ — соответствует задаче для сектора с двумя симметрично расположенными штампами на участках $\gamma-\theta<|\varphi|<\gamma+\theta$, а на боковых гранях условия соответствуют условиям задачи 2.

Нетрудно убедиться в том, что в силу симметрии, контактные напряжения под штампом для каждой задачи можно представить в следующем виде:

$$q_k^3(\psi)=q_k^3(\varphi+\pi k/2)=q^3(\varphi(-1)^k)\,[\cos\pi k/2-\sin\pi k/2]$$

$$q_k^2(\psi)=q_k^2(\varphi+\pi k/2)=q^2(\varphi)\cos\pi k$$

$$q_k^1(\psi)=q_k^1(\varphi+\pi k/2)=q^1(\varphi),\quad |\varphi|\leqslant\theta\quad (k=0,\ldots,3)$$

где функции $q^i(\varphi)=q_0^i(\varphi)$ ($i=1, 2, 3$) — контактные напряжения под первыми штампами соответствующих задач.

Также нетрудно убедиться и в том, что если взять суперпозицию решений этих трех задач и задачи, которая получается поворотом задачи 3 на угол равный $\pi/2$, что соответствует замене k на $k+1$, то для получения искомых величин исходной задачи нам остается взять среднее арифметическое соответствующих величин решений, входящих в эту суперпозицию. Таким образом искомое контактное давление $q(\psi)$ будет вычисляться по следующей формуле:

$$q(\psi)={}^1/_2E\delta k_2^{-1}\theta^{-1}q^*(\varphi+\pi k/2),\quad \psi=\varphi+\pi k/2,\quad |\varphi|\leqslant\theta$$

$$q^*(\varphi+\pi k/2)=1/4[q_k^{*1}(\varphi)+q_k^{*2}(\varphi)+q_k^{*3}(\varphi)+q_{k-1}^{*3}(\varphi)]$$

или, с учетом симметрии в задаче 3:

$$q^*(\varphi+\pi k/2)={}^1/_4[q^{*1}(\varphi)+q^{*2}(\varphi)\cos\pi k+(q^{*3}(-\varphi)+q^{*3}(\varphi))\cos\pi k/2+$$
$$+(q^{*3}(\varphi)-q^{*3}(-\varphi))\sin\pi k/2]\qquad(1.1)$$

Соответствующие интегральные характеристики контактных напряжений под штампом выражаются следующим образом:

$$P^*={}^1/_4[P_1^*+P_2^*\cos\pi k+2P_3^*\cos\pi k/2],\quad M_k^*={}^1/_2M_3^*\sin\pi k/2\qquad(1.2)$$

где сила P_k, действующая на штамп с номером $k+1$, связана с величиной P_k^* соотношением $P_k={}^1/_2E\delta P_k^*$, а момент M_k от напряжений связан с величиной M_k^* формулой $M_k={}^1/_2M_k^*E\delta k_2\theta$. Величины $q^{*i}(\varphi)$ найдем из решения соответствующих задач.

2. Решение задачи. В задаче 3 граничные условия соответствующей краевой задачи для уравнений Ламе имеют вид:

$$\sigma_\varphi=0,\ u_r=0\ (|\psi|=2\gamma);\ \tau_{r\varphi}=0\ (r=k_2)\qquad(2.1)$$

$$u_r=\delta\cos(|\psi|-\gamma),\quad (r=k_2,\ \gamma-\theta<|\psi|<\gamma+\theta)$$

$$\tau_{r\varphi}=0,\quad u_r=0\quad (r=k_1)\quad \text{(скользящая заделка)}$$

$$u_r=0,\quad u_\varphi=0\quad (r=k_1)\quad \text{(жесткая заделка)},$$

где $\psi=\varphi+\gamma$, $\tau_{r\varphi}=\tau_{r\psi}$, σ_φ — компоненты тензора напряжений, u, $u_\varphi=u_\psi$ — перемещения.

[3] *Кучеров Л. В., Цветков А. Н., Чебаков М. И.* Контактная задача для кольцевого сектора. Ростов н/Д., 1988. Деп. в ВИНИТИ 6.01.88. № 681-В88.

Решение уравнений Ламе представляем в виде рядов (Σ, если не оговорено специально, от 0 до ∞):

$$u_r=\Sigma W_k \cos\alpha_k\psi,\quad u_\varphi=\Sigma V_k \sin\alpha_k\psi,\quad \alpha_k=\pi\gamma^{-1}(k+{}^1/_2)$$

Тогда, после удовлетворения граничным условиям (2.1), искомые контактные напряжения под штампами выражаются следующим образом:

$$q(\psi)=\sigma_r(k_2,\ \psi)=\Sigma Q_k\cos\alpha_k\psi,\quad |\psi|\leqslant\theta$$

где Q_k — решение тройного ряда-уравнения:

$$\Sigma Q_k K(\alpha_k)\cos\alpha_k\psi=f(\psi)\quad (\gamma-\theta<\psi<\gamma+\theta) \tag{2.2}$$

$$\Sigma Q_k\cos\alpha_k\psi=0\quad (0<\psi<\gamma-\theta,\ \gamma+\theta<\psi<2\gamma)$$

$$f(\psi)={}^1/_2 E\delta k_2^{-1}\cos(\psi-\gamma)$$

Здесь E — модуль Юнга, $K(u)$ для случая скользящей заделки на нижней грани приводится в [4], а для случая ее жесткого защемления имеет вид

$$K(u)={}^1/_2(1+\nu)(u^2-1)^{-1}[(\nu-3)(\varkappa^{2u}(2u-1+\nu)-\varkappa^{-2u}(2u+1-\nu)]/$$
$$/[(\varkappa^{2u}+\varkappa^{-2u})(\nu-3)(1+\nu)-\varkappa^2u^2(1+\nu)^2-\varkappa^{-2}(u^2(1+\nu)^2+8(1-\nu))+$$
$$+2(u^2-1)(1+\nu)^2]$$

Решение ряда-уравнения (2.2) будем разыскивать изложенным, например в [7] методом сведения его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с сингулярной матрицей. Система в этом случае имеет вид (Σ по $n=1,\ldots,\infty$):

$$\Sigma(x_n a_{mn}^{11}-y_n a_{mn}^{12})=d_m^1,\quad \Sigma(x_n a_{mn}^{21}+y_n a_{mn}^{22})=d_m^2 \tag{2.3}$$

$$a_{mn}^{ij}=\frac{\gamma_m+\delta_n+(-1)^j(\delta_n-\gamma_m)\exp(-2\delta_n\theta)}{(\delta_n^2-\gamma_m^2)(1-(-1)^j\exp(-2\delta_n\theta))}+\frac{\exp(-2\xi\gamma_m\gamma)}{1-\exp(-2\xi\gamma_m\gamma)}\times$$
$$\times\left[\frac{(-1)^i+\exp(-2\xi\gamma_m\theta)}{\delta_n^2-\gamma_m^2}\gamma_m-\frac{(-1)^i-\exp(-2\xi\gamma_m\theta)}{\delta_n^2-\xi_m^2}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1+(-1)^j\exp(-2\delta_n\theta)}{1-(-1)^j\exp(-2\delta_n\theta)}\right]$$

$$d_m^i=\frac{\gamma_m\cos\theta-\sin\theta}{(1+\gamma_m^2)K(1)}+\frac{\exp(-2\xi\gamma_m\gamma)}{1-\exp(-2\xi\gamma_m\gamma)}\times$$
$$\times\frac{\gamma_m\cos\theta((-1)^i+\exp(-2\xi\gamma_m\theta)+\sin\theta((-1)^i-\exp(-2\xi\gamma_m\theta))}{K(1)(1-\gamma_m^2)}$$

Здесь $\xi=2$, $i\delta_n$ и $i\gamma_m$ — соответственно нули и полюса функции $K(u)$, лежащие в правой полуплоскости. Функция $q^{*3}(\varphi)$ находится из формулы

$$q^{*3}(\varphi)=\frac{\cos\varphi}{K(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k\frac{\operatorname{ch}\delta_k\varphi}{\operatorname{ch}\delta\theta}+y_k\frac{\operatorname{sh}\delta_k\varphi}{\operatorname{sh}\delta_k\theta}\right] \tag{2.4}$$

3. Метод специального урезания. Исходя из того, что при ν, близком к θ, ряды выражения (2.4) должны содержать особенности вида $(\theta-\varphi)^{-1/2}$, можно показать, что при больших n:

$$x_n=O(g(n)),\quad y_n=O(g(n)),\quad g(n)=(2n-1)!!/(2n)!! \tag{3.1}$$

---

[4] *Кучеров Л. В., Цветков А. Н., Чебаков М. И.* Контактная задача для кольцевого сектора. Ростов н/Д., 1988. Деп. в ВИНИТИ 6.01.88, № 681-В88 Деп.

Положим поэтому для всех n, больших некоторого числа N, $x_n=x_N g(n)$, $y_n=y_N g(n)$. В этом случае система (2.3) примет вид ($m=1,\ldots,N$):

$$\sum_{n=1}^{N-1}[x_n a_{mn}^{11}-y_n a_{mn}^{12}]+x_N\sum_{n=N}^{\infty}g(n)a_{mn}^{11}-y_N\sum_{n=N}^{\infty}g(n)a_{mn}^{12}=d_m^1 \quad (3.2)$$

$$\sum_{n=1}^{N-1}[x_n a_{mn}^{21}-y_n a_{mn}^{22}]+x_N\sum_{n=N}^{\infty}g(n)a_{mn}^{21}-y_N\sum_{n=N}^{\infty}g(n)a_{mn}^{22}=d_m^2$$

Для удобства численной реализации аппроксимируем [7] функцию $K(u)$ функцией

$$L(u)=\frac{\operatorname{th}Au}{u}\prod_{k=1}^{S}\frac{P_k^2+u^2}{q_k^2+u^2},\qquad A=\lim_{u\to0}K(u)$$

где P_k, q_k — действительные постоянные, S — известное натуральное число, и используем в качестве δ_n и γ_m нули и полюса функции $L(u)$; хотя метод позволяет использовать непосредственно нули и полюса функции $K(u)$. Для ускорения сходимости рядов системы (3.2) представим коэффициенты a_{mn}^{ij} для $n>N$ в виде

$$a_{mn}^{ij}=b_m^i\delta_n^{-1}+b_{m1}^i\delta_n^{-2}+b_{mn}^{ij},\qquad \delta_n=\pi(n-S)/A \quad (3.3)$$

Тогда систему (3.2) можно записать следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n c_{mn}^{11}-y_n c_{mn}^{12})=d_{1m},\qquad \sum_{n=1}^{N}(x_n c_{mn}^{21}+y_n c_{mn}^{22})=d_{2m} \quad (3.4)$$

$$c_{mn}^{ij}=a_{mn}^{ij}\ (n<N)$$

$$c_{mn}^{ij}=b_m^i\frac{A}{\pi}[\Sigma_1+S\Sigma_2]+b_{m1}^i\frac{A^2}{\pi^2}\Sigma_2+\sum_{k=N}^{\infty}g(k)\Bigg[b_{mk}^{ij}+$$

$$+\frac{S^2}{k^2(k-S)^2}+\frac{S}{k^2(k+1)}+\frac{b_{m1}^i}{k^2}\frac{A^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{2kS+S^2}{(k-S)^2}\right)\Bigg],\qquad n=N$$

$$\Sigma_1=\ln4-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{g(k)}{k},\qquad \Sigma_2=\ln4-1-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{g(k)}{k(k+1)}$$

Коэффициенты, входящие в правую часть формулы (3.3) имеют вид ($\xi=2$):

$$b_m^i=(1-(-1)^i\exp(-2\xi\gamma_m(\gamma-\theta)))(1-\exp(-2\xi\gamma_m\gamma))^{-1}$$

$$b_{m1}^i=\gamma_m(1+(-1)^{-1}\exp(-2\xi\gamma_m(\gamma-\theta)))(1-\exp(-2\xi\gamma_m\gamma))^{-1} \quad (3.5)$$

$$b_{mn}^{ij}=\frac{\gamma_m^2}{\delta_n^2(\delta_n-\gamma_m)}+\frac{(-1)^j2\delta_n\exp(-2\delta_n\theta)}{(\delta_n^2-\gamma_m^2)(1-(-1)^j\exp(-2\delta_n\theta))}+$$

$$+\frac{(-1)^i\exp(-2\xi\gamma_m(\gamma-\theta))}{1-\exp(-2\xi\gamma_m\gamma)}\,\frac{2\delta_n\exp(-2\delta_n\theta)(1-(-1)^i\exp(-2\xi\gamma_m\theta)}{(\delta_n^2-\gamma_m^2)(1-(-1)^j\exp(-2\delta_n\theta))}\times$$

$$\times(-1)^{j-1}+\frac{\gamma_m^2(\gamma_m-\delta_n)+(-1)^i(\delta_n+\gamma_m)\exp(-2\xi\gamma_m\theta)}{\delta_n^2(\delta_n^2-\gamma_m^2)}$$

В соотношение (2.4) для контактных напряжений входят медленно сходящиеся ряды. Совершив подстановку x_n, y_n для $n>N$, аналогичную той, которую мы произвели в бесконечной системе, и выделив ряды, суммирующиеся в явном виде, выпишем соотношение для $q^{*3}(\varphi)$, где останутся только ряды, быстросходящиеся для значений φ, близких к θ:

$$q^{*3}(\varphi)=\theta\Biggl\{\frac{\cos\varphi}{K(1)}+\sum_{n=1}^{N-1}\left(x_n\frac{\operatorname{ch}\delta_n\varphi}{\operatorname{ch}\delta_n\theta}+y_n\frac{\operatorname{sh}\delta_n\varphi}{\operatorname{sh}\delta_n\theta}\right)- \tag{3.6}$$

$$-\exp\left(\left(\theta-|\varphi|\frac{\pi}{A}\right)\right)(x_N+y_N\operatorname{sgn}\varphi)\left[\sum_{n=1}^{N-1}g(n)\exp\left((|\varphi|-\theta)\frac{\pi}{A}n\right)-\right.$$

$$\left.-\left[1-\exp\left((|\varphi|-\theta)\frac{\pi}{A}\right)\right]^{-1/2}+1\right]+\sum_{n=N}^{\infty}g(n)\times$$

$$\times\left[x_N\frac{\exp(-\delta_n(|\varphi|+\theta))-\exp(-\delta_n(3\theta-|\varphi|))}{1+\exp(-2\delta_n\theta)}-\right.$$

$$\left.-y_N\frac{\exp(-\delta_n(|\varphi|+\theta))-\exp(-\delta_n(3\theta-|\varphi|)}{1-\exp(-2\delta_n\theta)}\right]\Biggr\}$$

Проделав аналогичные операции по ускорению сходимости, получим соотношения для величин P_3^*, M_3^*:

$$P_3^*=\frac{2\theta+\sin 2\theta}{2K(1)}+2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{x_n}{1+\delta_n^2}[\sin\theta+\delta_n\cos\theta\operatorname{th}\delta_n\theta]+ \tag{3.7}$$

$$+2x_N\left[\frac{A}{\pi}\cos\theta\Sigma_1+\sum_{n=N}^{\infty}g(n)\left(\frac{\sin\theta}{1+\delta_n^2}+\cos\theta\left(\frac{A}{\pi}\frac{S}{n(n-S)}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\exp(-\delta_n\theta)(2\delta_n^2+1)+1}{\delta_n(1+\delta_n^2)(1+\exp(-2\delta_n\theta))}\right)\right)\right]$$

$$M_3^*=\frac{1}{\theta}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{y_n}{4+\delta_n}[\delta_n\sin 2\theta\operatorname{cth}\delta_n\theta-2\cos 2\theta]+y_N\frac{A}{\pi}\sin 2\theta\Sigma_1+$$

$$+y_N\sum_{n=N}^{\infty}\left[\sin 2\theta\left(\frac{As}{n(n-s)\pi}+\frac{2\exp(-2\delta_n\theta)(2+\delta_n^2)-4}{\delta_n(4+\delta_n^2)(1-\exp(-\delta_n\theta))}\right)-\frac{2\cos 2\theta}{4+\delta_n^2}\right]g(n)$$

4. Решение задачи 2 и 3. Опуская аналогичные выкладки, приведем парный ряд — уравнение задачи 2 (Σ по $k=0,\ldots,\infty$):

$$\Sigma Q_k K(\alpha_k)\cos\alpha_k\varphi=f(\varphi),\quad 0<|\varphi|<\theta,\quad f(\varphi)=(E\delta/2R_2)\cos\varphi$$

$$\Sigma Q_k\cos\alpha_k\varphi=0,\quad \theta<|\varphi|<\gamma,\quad \alpha_k={}^1/_2\pi(k+{}^1/_2)$$

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений будет иметь вид $\Sigma x_n a_{mn}{}^{21}=d_m{}^2$ (Σ по $n=1,\ldots,\infty$), а соответствующая редуцированная система —

$$\Sigma_{n=1}^{N}x_n c_{mn}{}^{21}=d_m{}^2 \tag{4.1}$$

где коэффициенты c_{mn}^{21} вычисляются по формуле (3.4) с использованием соотношений (3.5). Величину $q^{*2}(\varphi)$, можно получить из соотношений (3.6), где коэффициенты y_n следует положить равными нулю, а x_n — являются решением системы (4.1).

Задача 1 была подробно рассмотрена [5], поэтому здесь мы приведем формулу для $q^{*1}(\varphi)$ через решение редуцированных систем

$$\Sigma_{n=1}^{N} x_n^j c_{mn} = d_m^j \quad (j=0,1) \tag{4.2}$$

где c_{mn} совпадает с c_{mn}^{11}, если в формулах (3.5) принять $\xi=1$. Выражение для $q^{*1}(\varphi)$ имеет вид

$$q^{*1}(\varphi)=\theta\Bigg\{\frac{Q^{*0}n^0}{K(0)}+\frac{\cos\varphi}{K(1)}+\sum_{n=1}^{N-1}(x_n^1+Q^{*0}nx_N^0)\frac{\operatorname{ch}\delta_n\varphi}{\operatorname{ch}\delta_n\theta}+$$

$$+(x_N^1+Q^{*0}n^0x_n^0)\left[\exp\left(s(\theta-|\varphi|)\frac{\pi}{A}\right)\left(\left(1-\exp\left(-(\theta-|\varphi|)\right)\frac{\pi}{A}\right)\right)^{-1/2}-\right.$$

$$-1-\sum_{n=1}^{N-1}g(n)\exp\left(n(|\varphi|-\theta)\frac{\pi}{A}\right)+$$

$$\left.+\sum_{n=N}^{\infty}g(n)\frac{\exp(-\delta_n(|\varphi|+\theta)-\exp(-\delta_n(3\theta-|\varphi|)}{1+\exp(-2\delta_n\theta)}\right]\Bigg\}$$

Выражение для P_1^* можно получить, подставив в формулу (3.7) для P_3^* вместо переменной x_n^3 выражение $x_n^1+Q^{*0}n^0x_n^0$ $(n=1, 2, \ldots, N)$, где величину Q^{*0} следует вычислять по формуле

$$Q^{*0}=\left(\frac{\sin\theta}{K(1)}+Q_1\right)\left(\frac{\gamma}{2}-n_0\left(\frac{\theta}{A}+Q_2\right)\right)^{-1}$$

$$Q_i=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{x_n^i}{\delta_n}\operatorname{th}\delta_n\theta+x_N^i\frac{A}{\pi}\Sigma_1+x_N^i\sum_{n=N}^{\infty}g(n)\times$$

$$\times\left(\frac{A}{\pi}\frac{S}{n(n-S)}-\frac{2\exp(-2\delta_n\theta)}{\delta_n(1+\exp(-2\delta_n\theta))}\right)$$

Величина n^0, равная разности между пределом функции $K(u)$ при $u\to0$ и значением $K(0)$, отлична от нуля в случае скользящей заделки на нижней грани и равна нулю в случае ее жесткого защемления.

Теперь с помощью формул (1.1), (1.2) можно определить значение основных характеристик задачи.

В таблицах приводятся функции $q^*(\varphi)$ и величины M^{*i}, P^{*i} для каждого штампа исходной задачи. Вычисления проводились для различных значений параметров $h=R_1-R_2$, $\varkappa=R_2/R_1$ и ядер интегральных уравнений соответствующих скользящей и жесткой заделкам по внутренней окружности кольца. Во всех случаях число уравнений редуцированных систем (3.4), (4.1), (4.2) было равно 15. Числовые результаты, приведенные в табл. 1 и табл. 2 соответственно при жестком защемлении и отсутствии трения, получены для случая плоской деформации при $\nu=0{,}3$, т. е. в расчетах ν заменялось на $\nu_1=\nu/(1-\nu)$, E на $E_1=E/(1-\nu^2)$, и далее полагалось $\nu=0{,}3$.

---

[5] *Кучеров Л. В., Цветков А. Н., Чебаков М. И.* Контактная задача для кольцевого сектора. Ростов н/Д., 1988. Деп. в ВИНИТИ 6.01.88. № 681-В88 Деп.

Таблица 1

№	$q^*(-0,95)$	$q^*(-0,6)$	$q^*(0,0)$	$q^*(0,6)$	$q^*(0,95)$	$M^*\,10^2$	P^*
	$\varkappa=1,6$	$\theta=0,75$	$R_2=1,33$	$h=0,5$	$\gamma/\theta=1,05$		
1	4,586	4,031	4,518	4,031	4,586	0,0	7,913
2	−0,172	0,325	0,128	0,050	−0,090	−5,61	0,207
3	−0,099	0,016	0,012	0,016	−0,099	0,0	−0,010
4	−0,090	0,050	0,128	0,325	−0,172	5,61	0,107
	$\varkappa=2,0$	$\theta=0,5$	$R_2=2,0$	$h=1,0$	$\gamma/\theta=1,75$		
1	3,412	1,988	2,001	1,988	3,412	0,0	4,376
2	0,271	0,116	0,083	0,071	0,104	−0,388	0,208
3	0,079	0,049	0,046	0,049	0,079	0,0	0,104
4	0,104	0,071	0,083	0,116	0,271	0,388	0,208
	$\varkappa=1,6$	$\theta=0,375$	$R_2=2,67$	$h=1,0$	$\gamma/\theta=2,09$		
1	3,727	2,108	2,100	2,108	3,727	0,0	4,773
2	0,049	0,018	0,013	0,015	0,038	−0,245	0,040
3	0,038	0,014	0,011	0,014	0,038	0,0	0,035
4	0,038	0,015	0,013	0,018	0,049	0,245	0,040

Таблицы 2

№	$q^*(-0,95)$	$q^*(-0,6)$	$q^*(0,0)$	$q^*(0,6)$	$q^*(0,95)$	$M^*\ 20^2$	P^*
	$\varkappa=1,6$	$\theta=0,75$	$R_2=1,33$	$h=0,5$	$\gamma/\theta=1,05$		
1	4,155	3,318	3,616	3,318	4,155	0,0	6,553
2	−0,570	0,382	0,404	0,404	0,370	13,0	0,581
3	0,374	0,404	0,405	0,404	0,374	0,0	0,733
4	0,370	0,404	0,404	0,382	−0,570	−13,0	0,581
	$\varkappa=2,0$	$\theta=0,5$	$R_2=2,0$	$h=1,0$	$\gamma/\theta=1,75$		
1	2,995	1,655	1,624	1,655	2,995	0,0	3,671
2	0,389	0,207	0,191	0,200	0,366	−0,594	0,448
3	0,424	0,197	0,086	0,197	0,424	0,0	0,435
4	0,366	0,200	0,191	0,207	0,389	0,594	0,448
	$\varkappa=1,6$	$\theta=0,375$	$R_2=2,67$	$h=1,0$	$\gamma/\theta=2,09$		
1	3,267	1,788	1,728	1,788	3,267	0,0	4,052
2	0,227	0,018	0,110	0,117	0,226	−0,030	0,040
3	0,260	0,116	0,109	0,116	0,260	0,0	0,035
4	0,226	0,117	0,110	0,118	0,227	0,030	0,040

Результаты численных экспериментов показали, что жесткость системы штампы — кольцо вообще говоря возрастает с уменьшением кривизны, но для некоторых параметров задачи может существовать локальный максимум этой зависимости. В табл. 1 зафиксирован также случай, когда напряжения на краях всех ненагруженных штампов отрицательны. Это связано с тем, что область контакта фиксирована, в противном случае здесь наблюдался бы отрыв краев штампа от упругого кольца.

В случае n штампов, если n кратно двум, придется рассматривать сектор кольца максимум с $n/2$ штампами, что в силу свойств симметрии приведет нас к ряду-уравнению на $n/2+1$ участках. В случае нечетного n придется рассматривать соответствующие ряды на $n+1$ участках, а угловой размер сектора 2γ будет равен 2π.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурышкин М. Л.* Обобщенная периодическая задача теории упругости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 521–531.
2. *Бурышкин М. Л.* О построении приближенных аналитических решений несимметричных плоских задач для симметричных сред с полостями, ядрами, прямолинейными трещинами и жесткими включениями // Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1985. С. 103–108.
3. *Цветков А. Н., Чебаков М. И.* Эффективный способ решения одного класса бесконечных систем в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 344–348.
4. *Ворович И. И., Сафроненко Ю. В., Устинов Ю. А.* Прочность колес сложной конструкции. М.: Машиностроение. 1967. 195 с.
5. *Теплый М. И.* Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Вища шк., 1983. 176 с.
6. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1967. Т. 20. № 5. С. 3–20.
7. *Александров В. М.* Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов – уравнений к бесконечным алгебраическим системам // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 324–332.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
24.X.1989