

УДК 539.6

© 1991 г.

С. В. КРЫСОВ, В. А. ЛАЗАРЕВ

**ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ СУХОГО ТРЕНИЯ
Е. АДИРОВИЧА И Д. БЛОХИНЦЕВА
НА СЛУЧАЙ ТЕРМОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

В [1] рассмотрена модель сухого трения, которая объясняет сопротивление относительно скольжению тел явлением возбуждения и излучения с их поверхностей упругих волн. В результате аналитического решения соответствующей динамической задачи для идеально упругих тел показано, что сила трения обратно пропорциональна относительной скорости скольжения.

Известно, однако, что сухое трение сопровождается значительными флуктуациями температуры тел [2], которые могут оказывать существенное влияние на процессы возбуждения и распространения в телах упругих волн [3]. В связи с этим представляет интерес исследование кинетических зависимостей сил трения согласно рассмотренной в [1] модели в случае связанных термоупругих волновых процессов.

В качестве модели двух скользящих относительно друг друга с постоянной скоростью v твердых тел рассмотрим два упругих полупространства $z < 0$ (I) и $z > 0$ (II). Как и в [1] предположим, что поверхности тел содержат регулярные микровыступы с периодом $2l$, а между контактирующими телами действуют молекулярные силы отталкивания, вызывающие на поверхности тел напряжения (фиг. 1). В случае, когда полупространства неподвижны, вектор напряжения, действующий на поверхностный элемент полупространства I, может быть записан

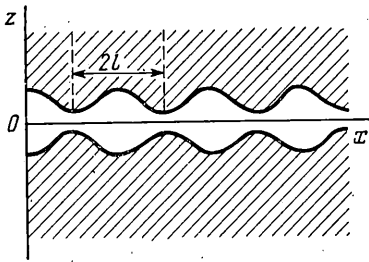
$$S^z(r_1) = F(r_1) \int F(r_2) f(r_1 - r_2) d\Sigma_2 \quad (1)$$

где r_1 и r_2 — радиус-векторы поверхностей полупространств I и II соответственно, $d\Sigma_2$ — поверхностный элемент полупространства II, $F(r_1)$, $F(r_2)$ — периодические функции с периодом $2l$, описывающие удельные силы взаимодействия между полупространствами, $f(r_1 - r_2)$ — функция, определяющая зависимость этих сил от расстояния между поверхностными элементами полупространств. Предположим далее, что полупространство I движется со скоростью v вдоль оси z , а полупространство II покоится. Тогда вектор напряжения (1) в движущейся системе координат, связанной с полупространством I, запишется как

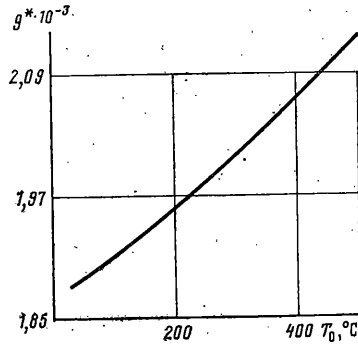
$$S^z(r_1, vt) = F(r_1) \int F(r') f(r_1 - vt - r') d\Sigma_2, \quad r' = r_2 - vt \quad (2)$$

Полагая пространственные деформации поверхностей малыми и пренебрегая их влиянием на силы (2), запишем связанные уравнения термоупругости [2], содержащие в качестве неизвестных вектор перемещений $u(x, y, z, t)$ и отклонения $\theta(x, y, z, t)$ от стационарной температуры сред T_0 :

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u &= \rho u_{,t} + \gamma \nabla \theta \\ k \nabla^2 \theta - c \theta_{,t} - \gamma T_0 \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где x, y, z — пространственные координаты, t — время, λ и μ — постоянные Ламе, ρ — плотность вещества, k — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость при постоянной деформации, $\gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu)$, α — коэффициент теплового расширения.

Аналогично [4], запишем уравнения (3) в безразмерной форме

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \mu_1' \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_{,tt} + b_1 \nabla \theta \quad (4)$$

$$\nabla^2 \theta = \theta_t + g \operatorname{div} \mathbf{u}_t$$

$$\mu_1' = (\lambda + \mu) / \mu, \quad a_1 = \mu_1' + 1, \quad b_1 = \gamma T_0 / \mu, \quad g = \gamma / \rho c$$

используя в качестве эталонов измерения для пространственных координат величину $h = (\lambda + 2\mu)^{1/2} / \rho^{1/2} \omega_*$, для времени — $\tau = 1 / \omega_*$, для напряжений — μ , для отклонений температуры — T_0 , где $\omega_* = c(\lambda + 2\mu) / k$.

Следуя [4], к первому уравнению (4) применим операцию div , обозначая $v = \operatorname{div} \mathbf{u}$. Тогда эта система будет иметь вид

$$\nabla^2 v = v_{,tt} + b_2 \nabla^2 \theta, \quad \nabla^2 \theta = \theta_t + gv_t \quad (5)$$

где $b_2 = \gamma T_0 / (\lambda + 2\mu)$, а перемещения $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ определяются уравнениями

$$\nabla^2 \mathbf{u} - a_1 \mathbf{u}_{,tt} = \mu_1' \nabla v + b_1 \nabla \theta \quad (6)$$

Поскольку рельеф поверхностей полупространств считается периодическим, представим (1) через периодические функции координат x, y, vt с периодом $2l$ рядом Фурье (m_x, m_y, n — целые числа):

$$S^{zz}(x, y, z, vt) = \sum_{m_x m_y n} S_{m_x m_y n}^{zz} \exp[i(k_x x + k_y y - \omega_n t)] \quad (7)$$

$$S^{yz}(x, y, z, vt) = 0, \quad S^{zz}(x, y, z, vt) = \sum_{m_x m_y n} S_{m_x m_y n}^{zz} \exp[i(k_x x + k_y y - \omega_n t)]$$

$$k_x = \pi m_x / l, \quad k_y = \pi m_y / l, \quad \omega_n = \pi n v / l$$

Компонента S^z вдоль y равна нулю, так как движение происходит вдоль x и относительно плоскости xz модель симметрична. Соответственно, полагая T_0 одинаковой для обоих тел, а процесс возбуждения волн установившимся и, принимая во внимание симметрию задачи от-

носительно плоскости xy , ее решения будем искать в виде

$$u_1 = \sum_{m_x m_y n} \alpha_{m_x m_y n}(z) E(x, y, t), \quad u_2 = \sum_{m_x m_y n} \beta_{m_x m_y n}(z) E(x, y, t)$$

$$u_3 = \sum_{m_x m_y n} \xi_{m_x m_y n}(z) E(x, y, t), \quad v = \sum_{m_x m_y n} v_{m_x m_y n}(z) E(x, y, t)$$

$$\theta = \sum_{m_x m_y n} \theta_{m_x m_y n}(z) E(x, y, t), \quad E(x, y, t) = \exp[i(k_x x + k_y y - \omega_n t)]$$

Подставляя этот вид решения в (5,6), получим ($k^2 = k_x^2 + k_y^2$):

$$\begin{aligned} \partial^2 v_{m_x m_y n} / \partial z^2 - (k^2 - \omega_n^2) v_{m_x m_y n} &= b_2 \partial^2 \theta / \partial z^2 - k^2 b_2 \theta_{m_x m_y n} \\ \partial^2 \theta_{m_x m_y n} / \partial z^2 - (k^2 - i\omega_n) \theta_{m_x m_y n} &= -ig\omega_n v_{m_x m_y n} \\ \partial^2 \alpha_{m_x m_y n} / \partial z^2 - (k^2 - a_1 \omega_n^2) \alpha_{m_x m_y n} &= -i\mu_1' k_x v_{m_x m_y n} + \\ &+ ib_1 k_x \theta_{m_x m_y n} \\ \partial^2 \beta_{m_x m_y n} / \partial z^2 - (k^2 - a_1 \omega_n^2) \beta_{m_x m_y n} &= -i\mu_1' k_y v_{m_x m_y n} + \\ &+ ib_1 k_y \theta_{m_x m_y n} \\ \partial^2 \xi_{m_x m_y n} / \partial z^2 - (k^2 - a_1 \omega_n^2) \xi_{m_x m_y n} &= -\mu_1' \partial v_{m_x m_y n} / \partial z + \\ &+ b_1 \partial \theta_{m_x m_y n} / \partial z \end{aligned} \quad (8)$$

Из этих уравнений видно, что случай $k^2 > \omega_n^2$, $k^2 > a_1 \omega_n^2$ соответствует поверхностным волнам Рэлея, а случай $k^2 < \omega_n^2$, $k^2 < a_1 \omega_n^2$ — гармоническим волнам, распространяющимся в глубь пространства. Поскольку на практике реализуется, как правило, случай $v \ll c_s$, c_p , где $c_s = (\mu/\rho)^{1/2}$, $c_p = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ — скорости сдвиговых и продольных волн соответственно, то в системе (8) по аналогии с [1] ограничимся случаем отсутствия касательных составляющих волновых векторов $m_x = m_y = 0$. При этом предположении (8) приобретает вид

$$\begin{aligned} \partial^2 v_{0n} / \partial z^2 + \omega_n^2 v_{0n} &= b_2 \partial^2 \theta / \partial z^2, \quad \partial^2 \theta_{0n} / \partial z^2 + i\omega_n \theta_{0n} = -ig\omega_n v_{0n} \\ \partial^2 \alpha_{0n} / \partial z^2 + a_1 \omega_n^2 \alpha_{0n} &= 0, \quad \partial^2 \beta_{0n} / \partial z^2 + a_1 \omega_n^2 \beta_{0n} = 0 \\ \partial^2 \xi_{0n} / \partial z^2 + a_1 \omega_n^2 \xi_{0n} &= -\mu_1' \partial v_{0n} / \partial z + b_1 \partial \theta_{0n} / \partial z \end{aligned} \quad (9)$$

Откуда $v_{0n} = v_n^0 \exp(-iq_n z)$, $\theta_{0n} = \theta_n^0 \exp(-iq_n z)$ а амплитуды v_n^0, θ_n^0 связаны соотношениями $\theta_n^0 / v_n^0 = (q_n^2 - \omega_n^2) / b_2 q_n^2$, $\theta_n^0 / v_n^0 = ig\omega_n / (q_n^2 - i\omega_n)$, из которых следует алгебраическое уравнение для определения q_n :

$$(q_n^2 - \omega_n^2)(q_n^2 - i\omega_n) - i\omega b_2 g q_n^2 = 0 \quad (10)$$

При решении (10) воспользуемся [4] тем, что величина $\varepsilon = b_2 g = \gamma^2 T_0 / (\lambda + 2\mu) \rho c$ для реальных тел оказывается малой (для металлов $\varepsilon \sim 10^{-2} - 10^{-3}$, для полимеров $\varepsilon \sim 10^{-1}$) и запишем приближенные значения корней при условии $\varepsilon \ll 1$:

$$\begin{aligned} q_{1n} &= \pm [\omega_n - \varepsilon \omega_n (1 - \omega_n i) / 2(\omega_n^2 + 1)] \\ q_{2n} &= \pm [\omega_n^{1/2} (1 + i) + \varepsilon \omega_n^{1/2} (1 + i) (1 + \omega_n i) / \\ &2(\omega_n^2 + 1)] / 2^{1/2} \end{aligned}$$

Учитывая отсутствие второй границы по z у полупространств и используя условие излучения Мандельштама [5], исключим из рассмотрения отраженные волны. Тогда

$$q_{1n} = \omega_n - \varepsilon \omega_n (1 - \omega_n i) / 2(\omega_n^2 + 1)$$

$$q_{2n} = [\omega_n^{1/2} (1 + i) + \varepsilon \omega_n^{1/2} (1 + i) (1 + \omega_n i)] / [2(\omega_n^2 + 1)]^{1/2}$$

Таким образом, решения первых двух уравнений (9) будут:

$$v_{0n} = v_n^0 \exp(-iq_{1n}z) + \varepsilon q_{2n}^2 \theta_n^0 \exp(-iq_{2n}z) / [g(q_{2n}^2 - \omega_n^2)]$$

$$\theta_{0n} = \theta_n^0 \exp(-iq_{2n}z) + ig \omega_n v_n^0 \exp(-iq_{1n}z) / (q_{1n}^2 - i\omega_n)$$
(11)

Решения последней группы трех уравнений в (9) имеют вид

$$\alpha_{0n} = \alpha_n' \exp(-ik_n z), \quad \beta_{0n} = \beta_n' \exp(-ik_n z)$$

$$\xi_{0n} = \xi_n' \exp(-ik_n z) + A \exp(-iq_{1n}z) + B \exp(-iq_{2n}z)$$

где $k_n = a_1^{1/2} \omega_n$, в котором с учетом определения $\text{div } u$ из (11) легко показать, что $\xi_n' = 0$, $A = iv_n^0 / q_{1n}$, $B = i\varepsilon q_{2n} \theta_n^0 / g(q_{2n}^2 - \omega_n^2)$.

Используя граничные условия при $z=0$: $S_{0n}^{zz} = \partial \alpha_{0n}(0) / \partial z$, $S_{0n}^{vz} = 0$, $S_{0n}^{zz} = (2 + \mu_1) v_{0n}(0) - b_1 \theta_{0n}(0)$, $\partial \theta_{0n}(0) / \partial z = 0$, найдем коэффициенты: $\alpha_n' = i S_{0n}^{xz} / k_n$, $\beta_n' = 0$,

$$v_n^0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} S_{0n}^{zz} \left\{ 1 - i\varepsilon \left[\frac{\omega_n}{q_{1n} - i\omega_n} + \frac{\omega_n^3 q_{1n}}{(q_{1n}^2 - i\omega_n)(q_{2n}^2 - \omega_n^2) q_{2n}} \right] \right\}^{-1}$$

$$\theta_n^0 = \frac{g\varepsilon}{\varepsilon'} S_{0n}^{zz} \left[\frac{\varepsilon \omega_n^2}{q_{2n}^2 - \omega_n^2} + \frac{i q_{2n} (q_{1n}^2 - i\omega_n - i\varepsilon \omega_n)}{\omega_n q_{1n}} \right]^{-1}$$

где $\varepsilon' = b_1 g$. Таким образом, задача имеет следующие решения:

$$u_1 = i \sum_n \frac{S_{0n}^{xz}}{k_n} \exp[-i(k_n z + \omega_n t)], \quad u_2 = 0$$

$$u_3 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \sum_n S_{0n}^{zz} \left\{ \left[\frac{i}{\omega_n} - \varepsilon \left[\frac{1}{2(\omega_n^2 + 1)} - \frac{\omega_n^{1/2} (\omega_n^2 + 2\omega_n - 1)}{2^{1/2} (\omega_n^2 + 1)^2} + i \left(\frac{1}{2\omega_n (\omega_n^2 + 1)} + \frac{\omega_n^{1/2} (\omega_n^2 - 2\omega_n - 1)}{2^{1/2} (\omega_n^2 + 1)^2} \right) \right] \right] \exp[-i(q_{1n}z + \omega_n t)] - \varepsilon \frac{2\omega_n + i(1 - \omega_n^2)}{(\omega_n^2 + 1)^2} \exp[-i(q_{2n}z + \omega_n t)] \right\}$$
(12)

$$\theta = \frac{g\varepsilon}{\varepsilon'} \sum_n S_{0n}^{zz} \left\{ \frac{\omega_n^{1/2} [(1 - \omega_n) - i(\omega_n + 1)]}{2^{1/2} (\omega_n^2 + 1)} + \varepsilon \frac{\omega_n^{1/2}}{2^{1/2} (\omega_n^2 + 1)^3} \times \right.$$

$$\times [(\omega_n^4 - 2^{1/2} 3\omega_n^{7/2} + \omega_n^3 + 3\omega_n^2 + 2^{1/2} \omega_n^{5/2} + 5\omega_n - 2) + i(2^{1/2} \omega_n^{9/2} -$$

$$- \omega_n^4 + \omega_n^3 + 2^{1/2} 3\omega_n^{5/2} - 3\omega_n^2 + 5\omega_n + 2)] \exp[-i(q_{2n}z + \omega_n t)] -$$

$$\left. - \left[\frac{1 - \omega_n i}{1 + \omega_n^2} - \varepsilon \frac{1}{2^{1/2} (\omega_n^2 + 1)^3} [(\omega_n^{9/2} - \omega_n^{7/2} + 3\omega_n^{5/2} - 2^{1/2} 3\omega_n^{3/2} - 2^{1/2}) - \right. \right.$$

$$-i(\omega_n^{9/2} - 3\omega_n^{7/2} - \omega_n^{5/2} + 2^{1/2}\omega_n^3 - \omega_n^{3/2} + 2^{1/2}3\omega_n)] \exp[-i(q_{1n}z + \omega_n t)] \}$$

Решение (12) с точностью до ϵ , определяющей изменение температуры при упругих деформациях, совпадает с решением, полученным в [1].

Определение сил сухого трения проведем согласно [1], записывая поток энергии через поверхность, прилегающую к границе нижнего полупространства при отсутствии теплообмена на границе:

$$Q = \int_{z=0} q \, dx \, dy, \quad q = \frac{\partial u_1}{\partial t} \sigma^{xz} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \sigma^{yz} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \sigma^{zz}$$

$$\sigma^{xz} = \partial u_3 / \partial x + \partial u_1 / \partial z, \quad \sigma^{yz} = \partial u_2 / \partial z + \partial u_3 / \partial y \quad (13)$$

$$\sigma^{zz} = 2\partial u_3 / \partial z + \mu_1 \operatorname{div} \mathbf{u} - \epsilon' \theta / g$$

Поскольку характерное время взаимодействия отдельных шероховатостей поверхности $2l/v$ мало, то физически естественно рассмотреть усредненную величину (для скорости $v=1$ м/с оно имеет порядок 10^{-5} – 10^{-6} с):

$$q^* = \frac{v}{2l} \int_0^{2l/n} q \, dt \quad (14)$$

которая определяет мощность сил, необходимых для реализации данного режима трения с заданной скоростью v . Поэтому удельная сила трения может быть выражена, как

$$f_T = q^* / v \quad (15)$$

Проводя вычисление q , используя (12), (13) и усредняя ее согласно (14) при переходе к размерным величинам получим для $z=0$:

$$q^* = (\rho\mu)^{-1/2} \sum_n S_{0n}^{xz} S_{0-n}^{xz} + [(\lambda+2\mu)\rho]^{-1/2} \sum_n S_{0n}^{zz} S_{0-n}^{zz} \left\{ 1 - \epsilon \left[2^{1/2} - \left(\frac{\pi n}{l\omega_*} \right)^{1/2} v^{3/2} + 2^{1/2} 3 \left(\frac{\pi n}{l\omega_*} \right)^2 v^2 - 2 \left(\frac{\pi n}{l\omega_*} \right)^{5/2} v^{5/2} + \left(\frac{\pi n}{l\omega_*} \right)^{7/2} v^{7/2} \right] 2^{1/2} \left[\left(\frac{\pi n}{l\omega_*} \right)^2 v^2 + 1 \right]^{-2} \right\} \quad (16)$$

Выражение (16) показывает, что средняя сила трения (15) обратно пропорциональна скорости скольжения v . Слагаемые в фигурных скобках рядов (16) убывают с возрастанием n медленно (тысячный член ряда имеет порядок $\{1 - \epsilon \cdot 0,99\}$). Выражения же для коэффициентов S_{0n} и S_{0-n} разложения поверхностных тел. Поэтому для достаточно гладких поверхностей они будут убывать с ростом n значительно быстрее. В этом случае слагаемые в фигурных скобках можно вынести за знак суммы и приближенно записать

$$f_T = \frac{1}{v} \left\{ (\rho\mu)^{-1/2} \sum_n S_{0n}^{xz} S_{0-n}^{xz} \frac{1 - \epsilon}{[(\lambda+2\mu)\rho]^{1/2}} \sum_n S_{0n}^{zz} S_{0-n}^{zz} \right\} \quad (17)$$

При $\epsilon=0$, т. е. без учета температурных изменений, (17) становится формулой, полученной в работе [1]. Коэффициент ϵ для большинства металлов имеет порядок 0,01–0,04, для полимеров типа ПТФЭ он примерно равен 0,3 в диапазоне температур до 200° С и до 60° С соответственно. Поэтому можно утверждать, что согласно принятой модели учет термоуп-

ругих деформаций приводит к падению кинетической зависимости силы трения. Объяснением этого факта может служить то, что поскольку тепловые процессы приводят к диссипации энергии упругих волн, что создает некоторый эквивалент вязкости тел, то их влияние на кинетику трения может быть аналогично влиянию вязких свойств деформаций. Последние же, как правило, и определяют падающую характеристику зависимости деформационной составляющей трения от скорости, например, в задачах качения [6].

Заметим, также, что сила трения обратно пропорциональна величинам волновых сопротивлений для продольных $[(\lambda+2\mu)\rho]^{1/2}$ и сдвиговых $(\rho\mu)^{1/2}$ волн. Влияние же флуктуаций температуры сказывается лишь на продольных деформациях.

Представляет интерес исследование полученных выражений от T_0 — стационарной температуры сред. Вообще говоря, T_0 в процессе трения меняется со временем. Однако, эти изменения происходят значительно медленней, чем периодические флуктуации $\theta(r, t)$, поскольку последние согласно (7) имеют временной масштаб 10^{-5} – 10^{-6} с, а масштаб времени теплопереноса на длинах, порядка длин волн 10^{-2} м, не меньше 10^{-1} с. Поэтому процесс изменения температуры можно считать квазистационарным и производить анализ зависимости силы трения от него при постоянной T_0 , которая входит лишь в выражения коэффициентов μ , λ , c , k , α , ϵ . Зависимость силы трения от T_0 описывает сомножитель, заключенный в фигурные скобки в выражении (17). В качестве примера (фиг. 2) приведена зависимость этого сомножителя от температуры для алюминия. В расчетах принимались данные зависимости λ , μ , α , k , c от температуры, взятые в [7, 8].

Авторы благодарны А. Л. Орлову за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adirovich E., Blokhinzev D.* On the force of dry friction // Journal of Physic. 1943. V. 7. № 1. P. 29–36.
2. *Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Sneddon I. N.* The propagation of thermal stresses in thin metallic rods // Proc. Roy. Soc. Edin., Sec. A. 1959. V. 65. № 2. P. 121–142.
5. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 439 с.
6. *Горячева И. Г.* Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 925–933.
7. *Фридель Ж.* Дислокации. М.: Мир, 1967. 643 с.
8. Таблицы физических величин. М.: Атомиздат, 1976. 1005 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
21.VI.1989