

УДК 539.376

© 1991 г.

И. В. СУХОРУКОВ, И. Ю. ЦВЕЛОДУБ

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В [1, 2] исследовался класс релаксационных обратных задач о нахождении начальной формы пластины или объемного тела такой, которая после фиксации в течение заданного промежутка времени и последующего снятия внешних нагрузок обеспечивает получение требуемой остаточной формы. При этом считалось, что полные деформации тела (пластины) складываются из упругих и деформаций ползучести. Для решения некоторых частных задач в [1, 2] использовался метод возмущений.

В данной работе для решения релаксационных обратных задач предложен достаточно универсальный, на наш взгляд, метод последовательных приближений, приводящий на каждой итерации к аналогичным прямым задачам. Доказана сходимость приближений к точному решению. Проведено обобщение указанного класса задач и метода их решения на случай учета пластических деформаций. Рассмотрен конкретный пример.

1. В [2] сформулирована следующая релаксационная задача: какие перемещения u_{k0} нужно мгновенно (упруго) сообщить поверхности S тела в момент времени $t=0$ и затем при $0 \leq t < t_*$ оставлять их фиксированными с тем, чтобы при $t=t_*$ после снятия всех внешних нагрузок и соответствующей упругой разгрузки получить заданные значения остаточных перемещений $u_k = u_{k**}$ ($k=1, 2, 3$) точек поверхности? При $t < 0$ тело находится в естественном недеформированном состоянии. Деформации считаются малыми.

При этом предполагалось, что полные деформации тела складываются из упругих и деформаций ползучести

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn} \sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^c \quad (k, l=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Компоненты скоростей деформаций ползучести $\dot{\eta}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^c$ определяются известной системой уравнений достаточно общего вида [3] и удовлетворяют постулату устойчивости, сформулированному в [3].

При указанных предположениях можно доказать, что если решение данной задачи существует, то для сжимаемого при ползучести тела оно будет единственным (если исключить смещение тела как жесткого целого), а для несжимаемого — два решения по напряжениям могут отличаться только на величину произвольного постоянного во всем объеме v и во времени гидростатического давления [2].

В отличие от классических (прямых) задач теории ползучести, где широко используется метод шагов по времени [4], для решения обратных задач какого-то универсального алгоритма не существует. В [1, 2] рассмотрены некоторые частные релаксационные обратные задачи, для решения которых применялся метод возмущений, при этом выбор малого параметра был обусловлен спецификой конкретной задачи. Ниже предлагается метод последовательных приближений, который для рассматриваемого класса задач обладает достаточной общностью.

Рассмотрим следующий итерационный процесс. В качестве первого приближения положим: $u_{k0}^{(1)} = u_{k**}$ ($k=1, 2, 3$) на S , где u_{k**} — заданные оста-

точные перемещения. Считая эти перемещения фиксированными на S при $0 \leq t < t_*$, решаем прямую релаксационную задачу, например, тем же методом шагов по времени. В результате находим напряженно-деформированное состояние тела в момент $t = t_*$ и соответствующие внешние нагрузки на S . По этим нагрузкам из решения чисто упругой задачи определяем перемещения $u_{k*}^{(1)}$, которые в момент разгрузки при $t = t_*$ вычтутся из исходных значений $u_{k0}^{(1)}$, так что остаточные перемещения $u_{k**}^{(1)} = u_{k0}^{(1)} - u_{k*}^{(1)}$

[1, 2]. Поскольку время t_* конечно, то в общем случае $u_{k**}^{(1)} \neq u_{k**}$ на S .

Обозначим $\Delta u_{k0}^{(1)} = u_{k**}^{(1)} - u_{k**}$. Для второго приближения положим $u_{k0}^{(2)} = u_{k0}^{(1)} + \Delta u_{k0}^{(1)}$ на S . Решая релаксационную (прямую) задачу, находим затем упругие перемещения $u_{k*}^{(2)}$, соответствующие внешним нагрузкам при $t = t_*$, и остаточные перемещения $u_{k**}^{(2)} = u_{k0}^{(2)} - u_{k*}^{(2)}$.

Далее процедура повторяется, т. е. на n -й итерации полагаем:

$$u_{k0}^{(n)} = u_{k0}^{(n-1)} + \Delta u_{k0}^{(n-1)} \quad (1.2)$$

$$\Delta u_{k0}^{(n-1)} = u_{k**}^{(n-1)} - u_{k**}^{(n-1)} \quad (k=1, 2, 3) \quad \text{на } S$$

где $u_{k**}^{(n-1)}$ — остаточные перемещения, полученные на $n-1$ итерации, $u_{k**}^{(n-1)}$ — требуемые остаточные перемещения на S .

Докажем, что этот процесс сходится, т. е. $u_{k**}^{(n)} \rightarrow u_{k**}$ на S при $n \rightarrow \infty$. При доказательстве будет использоваться соотношение, которое вытекает из (1.2):

$$u_{k0}^{(n+1)} - u_{k0}^{(n)} = u_{k*}^{(n)} - u_{k*}^{(n-1)} \quad (k=1, 2, 3) \quad \text{на } S \quad (1.3)$$

где $u_{k*}^{(n)}$ — упругие перемещения, $u_{k*}^{(n)} = u_{k0}^{(n)} - u_{k**}^{(n)}$. Действительно, из (1.2)

имеем $u_{k0}^{(n)} = u_{k0}^{(n-1)} - u_{k**}^{(n-1)} + u_{k*}^{(n-1)} = u_{k*}^{(n-1)} + u_{k**}^{(n-1)}$. Заменяя n на $n+1$, получим

$$u_{k0}^{(n+1)} = u_{k*}^{(n)} + u_{k**}^{(n)}. \quad \text{Разность двух последних равенств и дает (1.3).}$$

Сходимость итерационного процесса (1.2) будем исследовать в энергетической норме, связанной с упругой потенциальной энергией рассматриваемого тела, соответствующей перемещениям u_k на поверхности S . Другими словами, значениям u_k на S ставим в соответствие поле упругих напряжений σ_{kl}^e внутри объема v . И наоборот, поле σ_{kl}^e однозначно определяет поле u_k (смещение тела как жесткого целого исключается), а следовательно, и u_k на S . В силу непрерывной зависимости решения упругих задач от граничных условий [5] малость перемещений u_k на S можно отождествить с малостью величины потенциальной упругой энергии, определяемой интегралом $\int_v \frac{1}{2} a_{klmn} \sigma_{mn}^e \sigma_{kl}^e dv$. Учитывая вышесказанное, в качестве нормы для u_k на S выберем величину $\|u\|_S = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn} \sigma_{mn}^e \sigma_{kl}^e dv \right)^{1/2}$,

которая, как известно, обладает всеми необходимыми свойствами.

Рассмотрим два возможных состояния, при которых $u_k^{(1)} = u_{k0}^{(1)}$ и $u_k^{(2)} = u_{k0}^{(2)}$ на S при $0 \leq t < t_*$. Поскольку перемещения точек поверхности фикс-

сированы в течение времени t_* , то для разности соответствующих полей в силу уравнения виртуальных работ будем иметь

$$\int_v \Delta \varepsilon_{kl} \Delta \sigma_{kl} dv = \int_S \Delta u_k \Delta p_k dS = 0 \quad (1.4)$$

где Δp_k — разность поверхностных нагрузок. Подставляя (1.4) в (1.4), получим

$$\int_v (a_{klmn} \Delta \sigma_{mn} + \Delta \eta_{kl}) \Delta \sigma_{kl} dv = 0 \quad (1.5)$$

Интегрируя (1.5) по времени от нуля до t_* , найдем

$$\int_v \left(\frac{1}{2} a_{klmn} \Delta \sigma_{mn}^* \Delta \sigma_{kl}^* - \frac{1}{2} a_{klmn} \Delta \sigma_{mn0} \Delta \sigma_{kl0} + \int_0^{t_*} \Delta \eta_{kl} \Delta \sigma_{kl} dt \right) dv = 0 \quad (1.6)$$

где $\Delta \sigma_{kl}^*$ и $\Delta \sigma_{kl0}$ — разности напряжений при $t=t_*$ (до разгрузки) и $t=0$.

Поле напряжений при $t=t_*$ представим в виде [1]: $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^e + \rho_{kl}^*$, где σ_{kl}^e — напряжения, соответствующие решению упругой задачи с теми же нагрузками на S в момент $t=t_*$, ρ_{kl}^* — остаточные напряжения, возникающие в теле после снятия указанных нагрузок. Заметим, что полю σ_{kl}^e соответствуют упругие перемещения u_k^* на S .

С учетом равенств $\int_v a_{klmn} \Delta \sigma_{mn}^* \Delta \rho_{kl}^* dv = \int_v a_{klmn} \Delta \rho_{mn}^* \Delta \sigma_{kl}^* dv = 0$ [1] из (1.6) получим

$$\|\Delta u_*\|_s^2 = \|\Delta u_0\|_s^2 - I, \quad \|\Delta u_*\|_s = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn} \Delta \sigma_{mn}^e \Delta \sigma_{kl}^e dv \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

$$\|\Delta u_0\|_s = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn} \Delta \sigma_{mn0} \Delta \sigma_{kl0} dv \right)^{1/2},$$

$$I = \int_v \left(\frac{1}{2} a_{klmn} \Delta \rho_{mn}^* \Delta \rho_{kl}^* + \int_0^{t_*} \Delta \eta_{kl} \Delta \sigma_{kl} dt \right) dv$$

Из (1.7) следует неравенство

$$\|\Delta u_*\|_s \leq \|\Delta u_0\|_s \quad (1.8)$$

где знак равенства возможен только при $I=0$, что, в свою очередь, возможно только при $\Delta \rho_{kl}^* = 0$ и $\Delta \sigma_{kl} = 0$ при любом $0 \leq t < t_*$ во всем объеме v (для сжимаемой при ползучести среды, когда $\eta_{kk} \neq 0$) либо $\Delta \sigma_{kl} = \Delta p \delta_{kl}$ (для несжимаемой при ползучести среды, когда $\eta_{kk} = 0$), где δ_{kl} — компоненты единичного тензора [3], причем из уравнений равновесия и граничных условий следует, что $\Delta p = \text{const}$.

В первом случае ($\eta_{kk} \neq 0$) имеем $\Delta \sigma_{kl0} = 0$, следовательно $\Delta \varepsilon_{kl0} = 0$, откуда $\Delta u_0 = 0$ на S , тогда $\|\Delta u_*\|_s = \|\Delta u_0\|_s = 0$. Во втором случае ($\eta_{kk} = 0$) $\Delta \varepsilon_{kl}^e = 0$, поскольку $\Delta \sigma_{kl} = \Delta p \delta_{kl}$ и гидростатическое давление не влияет на процесс ползучести, следовательно, разности остаточных деформаций $\Delta \varepsilon_{kl}^{**} = -a_{klmn} \Delta \rho_{mn}^* + \Delta \varepsilon_{kl}^c = 0$, поэтому $\Delta \varepsilon_{kl0} = \Delta \varepsilon_{kl}^c$, откуда, если исключить жесткое смещение тела, и $\Delta u_{k0} = \Delta u_k^*$ в объеме v , следовательно, $\Delta u_{k**} = 0$ на S .

Рассмотрим $(n+1)$ -ю и n -ю итерации из указанного выше процесса. Применяя к разности соответствующих перемещений соотношения (1.3) и неравенство (1.8), получим $\|u_0^{(n+1)} - u_0^{(n)}\|_S = \|u_*^{(n)} - u_*^{(n-1)}\|_S \leq \|u_0^{(n)} - u_0^{(n-1)}\|_S$.

Отсюда видно, что последовательность $\{a_n\} = \|u_0^{(n+1)} - u_0^{(n)}\|_S$ монотонно убывает и ограничена снизу ($\{a_n\} \geq 0$), следовательно, она имеет предел при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и в силу (1.3) будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0^{(n)} - u_0^{(n-1)}\|_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0^{(n+1)} - u_0^{(n)}\|_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_*^{(n)} - u_*^{(n-1)}\|_S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta u_0^{(n-1)}\|_S = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta u_*^{(n-1)}\|_S \quad (1.9)$$

Повторяя приведенные выше рассуждения и осуществляя предельный переход, убеждаемся в том, что равенство (1.9) возможно для сжимаемого при ползучести тела только при $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta u_0^{(n-1)}\|_S = 0$, что согласно (1.2)

эквивалентно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{k**}^{(n-1)} - u_{k**}^{(n)}\|_S = 0$. Таким образом, последовательность $u_{k**}^{(n)}$ на S будет сходиться к заданным остаточным перемещениям на S по норме $\|\dots\|_S$, а последовательность $u_{k0}^{(n)}$ из (1.2) — к искомому полю начальных перемещений.

Для несжимаемого при ползучести тела из равенств (1.9), (1.2) следует, что при $n \rightarrow \infty$ остаточные перемещения точек поверхности S будут отличаться от заданных на величины, соответствующие постоянному гидростатическому давлению.

Рассмотрим возможную в указанном итерационном процессе ситуацию, когда (1.8) превращается в строгое равенство, т. е. предположим, что при каком-то n будем иметь

$$\|u_*^{(n+1)} - u_*^{(n)}\|_S = \|u_0^{(n+1)} - u_0^{(n)}\|_S \quad (1.10)$$

Как отмечалось выше, для сжимаемой при ползучести среды отсюда следует $\|u_0^{(n+1)} - u_0^{(n)}\|_S = 0$, или, согласно (1.2), $\|\Delta u_0^{(n)}\|_S = \|u_{k**}^{(n)} - u_{k**}^{(n)}\|_S = 0$, что эквивалентно равенствам $u_{k**}^{(n)} = u_{k**}^{(n)}$ на S , т. е. итерационный процесс сойдется за конечное число итераций n .

Для несжимаемой среды равенство (1.10) возможно при $\Delta \sigma_{kl}^{(n)} = \sigma_{kl}^{(n+1)} - \sigma_{kl}^{(n)} = \Delta p \delta_{kl}$ ($k, l=1, 2, 3$), ($\Delta p = \text{const}$) на любой момент $0 \leq t < t_*$ во всем объеме v . Поскольку гидростатическое давление в этом случае не влияет на процесс ползучести, то $\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)} = 0$ и $\Delta \varepsilon_{k10}^{(n)} = \Delta \varepsilon_{k1*}^{(n)} = a_{klij} \Delta \sigma_{ij}^{(n)} = a_{k1i} \Delta p$, $\Delta \varepsilon_{k1**}^{(n)} = 0$, т. е. вектор перемещений $\Delta u_{k0}^{(n)} = u_{k**}^{(n+1)} - u_{k**}^{(n)}$ на S отвечает постоянному гидростатическому давлению Δp , а $\Delta u_{**}^{(n)} = u_{k**}^{(n+1)} - u_{k**}^{(n)} = 0$ на S . Для последующих итераций из (1.2) будем иметь на S : $u_{k0}^{(n+1)} = u_{k0}^{(n)} + \Delta u_{k0}^{(n)}$, $u_{k0}^{(n+2)} = u_{k0}^{(n+1)} + (u_{k**} - u_{k**}^{(n+1)}) = u_{k0}^{(n+1)} + (u_{k**} - u_{k**}^{(n)}) = u_{k0}^{(n+1)} + \Delta u_{k0}^{(n)}$. Вектор $2\Delta u_{k0}^{(n)}$ на S также

соответствует гидростатическому давлению $2\Delta p$, которое при разгрузке вычитается из напряженного состояния, поэтому $u_{k**}^{(n+2)} = u_{k**}^{(n)} + 2\Delta u_{k0}^{(n)}$ и $u_{k**}^{(n+2)} = u_{k**}^{(n)}$ на S . Аналогично можно показать, что для любого $m > 0$ $u_{k0}^{(n+m)} = u_{k0}^{(n)} + m\Delta u_{k0}^{(n)}$, т. е. если $\Delta u_{k0}^{(n)} \neq 0$ на S , то при $m \rightarrow \infty$ процесс будет расходиться.

Таким образом, если для несжимаемой при ползучести среды при каком-то n выполнится условие (1.10), то остаточные перемещения $u_{k**}^{(n)}$ на S будут отличаться от заданных на величины, соответствующие постоянному гидростатическому давлению. В этом случае указанный выше итерационный процесс следует остановить, так как в дальнейшем он будет расходиться относительно начальных перемещений $u_{k0}^{(n)}$.

Заметим, что при плоском напряженном состоянии равенство (1.10) для несжимаемой среды возможно только при $\Delta\sigma_{kl}^{(n)} = 0$. Действительно, в этом случае, как показано выше, $\Delta\sigma_{kl}^{(n)} = \Delta p \delta_{kl}$, но поскольку $\sigma_{33} = 0$, то и $\Delta\sigma_{33}^{(n)} = \Delta p = 0$.

2. Рассмотрим ту же релаксационную задачу, когда возможно появление пластических деформаций. Предположим, что перемещения u_{k**} на поверхности S достаточно велики, так что соответствующая интенсивность напряжений (или другая величина, характеризующая начало пластического течения), полученная из решения упругой задачи с этими граничными условиями, во всем теле или в некоторой его области превосходит предел текучести. Тогда, очевидно, в момент $t=0$, когда поверхности S мгновенно сообщаются перемещения u_{k0} , в теле будут возникать пластические деформации ε_{kl}^p . Следовательно, вместо (1.1) будем иметь

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn} \sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^e \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Предположим, что при $t=0$ нагружение осуществляется внешними силами, возрастающими пропорционально одному параметру, поэтому приближенно можно считать, что в теле реализуется нагружение, близкое к простому. Это позволяет использовать деформационную теорию пластичности.

Поскольку при $0 \leq t < t_*$ перемещения точек поверхности S фиксированы, из физических соображений ясно, что будет происходить процесс релаксации внешних нагрузок. Значит и напряжения внутри объема v увеличиваться не могут, следовательно, и приращения пластических деформаций будут отсутствовать. Поэтому будем считать, что всюду в теле $\varepsilon_{kl}^p = 0$ при $0 \leq t < t_*$. Кроме того, предположим, что при снятии внешних сил в момент $t=t_*$ разгрузка происходит по упругому закону без возникновения вторичных пластических деформаций.

При указанных предположениях можно доказать теорему единственности решения обратных релаксационных задач. Действительно, поскольку $u_k = 0$ на S при $0 \leq t < t_*$, то для разности двух возможных решений будем иметь равенство, аналогичное (1.4) $\int_v \Delta \varepsilon_{kl} \cdot \Delta \sigma_{kl} dv = 0$, подставляя в которое (2.1) и учитывая, что $\Delta \varepsilon_{kl}^p = 0$, получим соотношение (1.5), которое после интегрирования по времени от нуля до t_* превращается в (1.6). Представляя далее поле напряжений σ_{kl} в виде суммы «чисто упругих» σ_{kl}^e и остаточных ρ_{kl} напряжений, как и выше, из (1.6) получим (1.7). Используя известное неравенство [1] $1/2 a_{klmn} \Delta \sigma_{mn} \Delta \sigma_{kl} - 1/2 a_{klmn} \cdot \Delta \sigma_{mn}^e \Delta \sigma_{kl}^e \leq a_{klmn} (\Delta \sigma_{mn} - \Delta \sigma_{mn}^e) \Delta \sigma_{kl}$, причем знак равенства возмо-

жен только при $\Delta\sigma_{klo} = \Delta\sigma_{klt}^e$ ($k, l=1, 2, 3$), из (1.7) найдем

$$I \leq \int_v a_{klmn} (\Delta\sigma_{mno} - \Delta\sigma_{mno}^e) \Delta\sigma_{klo} dv = \int_v (\Delta\varepsilon_{klo} - \Delta\varepsilon_{klo}^p - \Delta\varepsilon_{klt}^e) \Delta\sigma_{klo} dv \leq \\ \leq \int_v (\Delta\varepsilon_{klo} - \Delta\varepsilon_{klt}^e) \Delta\sigma_{klo} dv = \int_s \Delta u_{k**} \Delta p_{ko} dS = 0 \quad (2.2)$$

В (2.2) введено обозначение: $\Delta\varepsilon_{klt}^e = a_{klmn} \Delta\varepsilon_{mno}^e$, а также использовались равенства $\Delta\varepsilon_{klo} = a_{klmn} \Delta\sigma_{mno} + \Delta\varepsilon_{klo}^p$ ($k, l=1, 2, 3$), вытекающие из (2.1) при $t=0$, и неравенство $\Delta\varepsilon_{klo}^p \Delta\sigma_{klo} \geq 0$, аналогичное постулату Друккера и выражающее условие устойчивости пластического деформирования.

Таким образом, согласно (2.2) $I \leq 0$, что возможно только при $I=0$, откуда $\Delta\rho_{klt} = 0$ и $\Delta\sigma_{klt} = 0$ (для сжимаемой при ползучести среды), либо $\Delta\sigma_{klt} = \Delta\rho \delta_{klt}$, $\Delta\rho = \text{const}$ (для несжимаемой при ползучести среды) при $0 \leq t < t_*$ в объеме v , что в обоих случаях согласуется с упомянутым выше условием $\Delta\sigma_{klo} = \Delta\sigma_{klt}^e$, при котором первое неравенство (2.2) превращается в равенство. Если исключить жесткое смещение всего тела, то в первом случае начальные перемещения u_{k0} на S определяются однозначно, а во втором — два решения могут отличаться друг от друга только на величину, соответствующую постоянному гидростатическому давлению $\Delta\rho$. Следовательно, единственность решения данной задачи понимается в таком же смысле, что и исходной задачи п. 1, в которой пластические деформации не учитываются [2].

Для решения релаксационной обратной задачи с учетом пластических деформаций предлагается тот же итерационный процесс (1.2), где в первом приближении полагается $u_{k0}^{(1)} = u_{k**}$ ($k=1, 2, 3$) на S . Докажем сходимость этого процесса. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, для двух возможных состояний получим равенство (1.7), из которого следует

$$\|\Delta u_{k**}\|_s \leq I_1, \quad I_1 = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn} \Delta\sigma_{mno} \Delta\sigma_{klo} dv \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

В отличие от п. 1 величина I_1 из (2.3) не может, вообще говоря, служить нормой для разности Δu_{k0} на S , поскольку при $t=0$ кроме упругих есть еще и пластические деформации, т. е. $\Delta\varepsilon_{klo}^p \neq 0$. Поэтому как и прежде положим $\|\Delta u_0\|_s = \left(\int_v \frac{1}{2} a_{klmn} \Delta\sigma_{mno}^e \Delta\sigma_{klo}^e dv \right)^{1/2}$, где $\Delta\sigma_{klo}^e$ — напряжения, соответствующие чисто упругому решению для перемещений Δu_{k0} на S . Так как $\Delta\varepsilon_{klo}^p \neq 0$, то $\Delta\sigma_{klo} \neq \Delta\sigma_{klo}^e$.

Оценим величину I_1 из (2.3) через $\|\Delta u_0\|_s$. Возьмем разности истинных деформаций $\Delta\varepsilon_{klo}$ при $t=0$ и упругие деформации $\Delta\varepsilon_{klo}^e$, соответствующие напряжениям $\Delta\sigma_{klo}^e$; а также разности истинных напряжений $\Delta\sigma_{klo}$ при $t=0$. Тогда из уравнения виртуальных работ следует, что $\int_v \Delta\varepsilon_{klo}^e \Delta\sigma_{klo} dv =$
 $= \int_v \Delta\varepsilon_{klo} \Delta\sigma_{klo} dv$, т. е.

$$\int_v a_{klmn} \Delta\sigma_{mno}^e \Delta\sigma_{klo} dv = \int_v (a_{klmn} \Delta\sigma_{mno} \Delta\sigma_{klo} + \Delta\varepsilon_{klo}^p \Delta\sigma_{klo}) dv \quad (2.4)$$

С учетом неравенства $^{1/2}a_{hlmn} \Delta \sigma_{mn0} \Delta \sigma_{h10} - ^{1/2}a_{hlmn} \Delta \sigma_{mn0} \Delta \sigma_{h10} \geq$

$\geq a_{hlmn} (\Delta \sigma_{mn0}^e - \Delta \sigma_{mn0}) \Delta \sigma_{h10}$ из (2.4) получим $\|\Delta u_0\|_s^2 - I_1^2 \geq \int_v \Delta \epsilon_{h10}^p \Delta \sigma_{h10} dv \geq$
 ≥ 0 , т. е. $I_1 \leq \|\Delta u_0\|_s$. Последнее неравенство совместно с (2.3) дают $\|\Delta u_*\|_s \leq \|\Delta u_0\|_s$, причем равенство, как нетрудно видеть, возможно только при $\Delta \epsilon_{h10}^p = 0$ и $I = 0$, где величина I определена в (1.7).

Следовательно, и для рассматриваемого случая, когда в теле могут возникать мгновенные пластические деформации, имеет место неравенство (1.8). Как показано выше, оно обеспечивает сходимость итерационного процесса (1.2) в том же смысле, что и в п. 1.

3. В качестве примера применения предложенного выше метода последовательных приближений рассмотрим обратную релаксационную задачу формообразования арки. Пусть дана балка длины l , имеющая две перпендикулярные плоскости симметрии, проходящие через ее образующую. Будем считать, что любые два поперечных сечения балки одинаковы и что изгиб осуществляется только в одной из плоскостей симметрии. Направим ось Ox декартовой системы координат по образующей, ось Oy — перпендикулярно плоскости изгиба, ось Oz — в плоскости изгиба. Начальную точку системы координат поместим на одном из торцов балки. Необходимо определить начальные прогибы $w_0(x)$ и соответствующие им внешние усилия (перерезывающие силы $Q_0(x)$ и распределенные нагрузки $q_0(x)$) такие, чтобы в результате мгновенного упругопластического деформирования и последующей выдержки в фиксированном состоянии в течение заданного времени t_* после упругой разгрузки получить требуемый остаточный прогиб $w_{**}(x)$ образующей балки.

Далее будем учитывать только изгибные деформации в направлении оси Ox , так что зависимость (2.1) примет вид (E — модуль Юнга):

$$\epsilon = E^{-1}\sigma + \epsilon^p + \epsilon^c \quad (3.1)$$

Считаем, что $\epsilon^c = 0$ при $t = 0$. Пластические деформации и скорости деформаций ползучести связаны с напряжениями соотношениями

$$\epsilon^p = \begin{cases} G|\sigma|^{g-1}\sigma - E^{-1}\sigma, & |\sigma| \geq \sigma_T \\ 0, & |\sigma| < \sigma_T \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\eta = \epsilon^c = A \operatorname{sh}(\alpha\sigma)$$

Здесь G, g, A, α — постоянные, σ_T — предел текучести. Полагаем, что для полных деформаций справедлива гипотеза плоских сечений

$$\epsilon(x, z, t) = \kappa(x, t)z \quad (3.3)$$

где $\kappa(x, t) = -\partial^2 w(x, t) / \partial x^2$ — кривизна образующей балки.

Так как при $0 \leq t < t_*$ прогибы остаются фиксированными и $\dot{\epsilon}^p = 0$, то из (3.1) — (3.3) получим уравнение $\sigma' / E + A \operatorname{sh}(\alpha\sigma) = 0$, решение которого, как нетрудно показать, есть

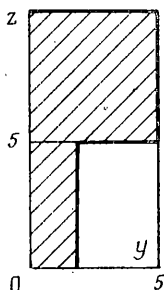
$$\sigma = 2\alpha^{-1} \operatorname{arth}[\operatorname{th}(\alpha\sigma_0/2) e^{-\alpha EA t}] \quad (3.4)$$

где σ_0 — напряжения при $t = 0$, которые связаны с начальными прогибами w_0 соотношениями (3.1) — (3.3). Уравнениями равновесия в любой момент $0 \leq t < t_*$ будут [6]:

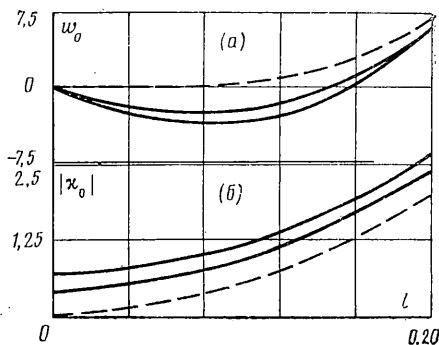
$$\partial M(x, t) / \partial x = Q(x, t), \quad \partial Q(x, t) / \partial x = -q(x, t)$$

$$M(x, t) = \int_S \sigma(x, z, t) z dS \quad (3.5)$$

где S — поперечное сечение балки.



Фиг. 1



Фиг. 2

В момент $t=t_*$ после снятия внешних нагрузок происходит упругая разгрузка, и в силу уравнений равновесия (3.5) должны выполняться равенства

$$\partial M / \partial x = dM_*/dx, \quad dQ/dx = dQ_*/dx \quad (3.6)$$

Здесь $M_*(x) = D[\kappa_0(x) - \kappa_{**}(x)]$ — изгибающие моменты, вызывающие упругое «распружинивание» балки, D — жесткость сечения балки, $\kappa_{**}(x)$ — заданная остаточная кривизна.

Если при $t=t_*$ осуществлялась полная разгрузка, т. е. и на торцах балки $M=M_*$, $Q=Q_*$, то после интегрирования (3.6) получаем

$$\kappa_{**}(x) = \kappa_0(x) - \frac{1}{D} \int_S \sigma[\sigma_0(\kappa_0(x)z), t_*] z dS \quad (3.7)$$

где функция $\sigma = \sigma(\sigma_0, t)$ определена в (3.4).

Для решения уравнения (3.7) будем применять описанный выше метод последовательных приближений. На первой итерации полагаем $\kappa_0^{(1)}(x) = \kappa_{**}(x)$, на n -й — $\kappa_0^{(n)}(x) = \kappa_0^{(n-1)}(x) + [\kappa_{**}(x) - \kappa_{**}^{(n-1)}(x)]$, где $\kappa_{**}^{(n-1)}$ определяется по известным $\kappa_0^{(n-1)}$ из (3.7). Тогда

$$\kappa_0^{(n)}(x) = \kappa_{**}(x) + \frac{1}{D} \int_S \sigma[\sigma_0(\kappa_0^{(n-1)}(x)z), t_*] z dS \quad (3.8)$$

Можно показать равномерную сходимость итерационного процесса (3.8). Действительно, рассмотрим (3.8) как отображение $u(x) \rightarrow V(x)$:

$$V(x) = \kappa_{**}(x) + \frac{1}{D} \int_S \sigma[\sigma_0(u(x)z), t_*] z dS \quad (3.9)$$

Дифференцируя (3.9) по u и используя представление (3.4), можно доказать справедливость следующего неравенства $dV/du \leq e^{-\alpha EA t} < 1$, откуда $\max_x |V(u_2) - V(u_1)| \leq e^{-\alpha EA t} \max_x |u_2 - u_1|$. В силу принципа сжимающих отображений [7] отображение (3.9) имеет единственную неподвижную точку. Отсюда следует, что итерационный процесс (3.8) сходится по норме $C[0, l]$: $\max_x |\kappa_0^{(n)}(x) - \kappa_0(x)| \rightarrow 0$, где $\kappa_0(x)$ — искомая начальная кривизна. По известной кривизне и соответствующим краевым условиям находятся начальные прогибы.

Можно показать, что функция $\kappa_0 = \kappa_0(\kappa_{**})$, являющаяся обратной к (3.7), имеет ограниченные и непрерывные производные $d\kappa_0/d\kappa_{**} \neq 0$, поэтому из непрерывности производной $d^2\kappa_{**}/dx^2$ следует непрерывность функций

$$Q_0(x) = D \frac{d\kappa_0}{d\kappa_{**}} \frac{d\kappa_{**}}{dx}, \quad q_0(x) = -D \left[\frac{d^2\kappa_0}{d\kappa_{**}^2} \left(\frac{d\kappa_{**}}{dx} \right)^2 + \frac{d\kappa_0}{d\kappa_{**}} \frac{d^2\kappa_{**}}{dx^2} \right]$$

В качестве примера была рассчитана упреждающая форма для балки двутаврового сечения, изображенного на фиг. 1 ($1/4$ часть сечения, размеры в мм), характеристики материала которой: $E=66\,700$ МПа, $G=5\,389 \cdot 10^{-65}$ (МПа) $^{-g}$, $g=21,8$; $A=2\,008 \cdot 10^{-9}$ с $^{-1}$, $\alpha=0,13$ (МПа) $^{-1}$. Требуемый остаточный прогиб задавался в виде $w_{**}=x^4/6l^2+x^2/100$, $l=0,2$ м, т. е. остаточная кривизна $\kappa_{**}=2x^2/l^2+0,02$.

Итерационный процесс прекращался, когда $\max|(w_{**}(x)-w_{**}^{(n)}(x))/w_{**}(x)| \leq 10^{-5}$ ($x \neq 0$). Например, при $t_*=1$ час и $t_*=10$ час число необходимых для этого итераций $n \leq 4$.

Результаты расчета приведены на фиг. 2, где штриховыми линиями изображены остаточные прогибы $w_{**}(x)$ (мм), фиг. 2, а и кривизны $\kappa_{**}(x)$ (1/мм), фиг. 2, б; тонкими сплошными линиями — начальные прогибы $w_0(x)$ и кривизны $\kappa_0(x)$ в случае $t_*=1$ час, жирными сплошными — $w_0(x)$ и $\kappa_0(x)$ в случае $t_*=10$ час.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цвелодуб И. Ю. Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 126—134.
2. Цвелодуб И. Ю. Об одной обратной задаче теории ползучести // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. Т. 40. № 3. С. 33—40.
3. Цвелодуб И. Ю. Об одном классе обратных задач теории ползучести // ПИМТФ. 1989. № 2. С. 163—173.
4. Цвелодуб И. Ю., Шваб А. А. О решении плоских задач теории ползучести в полярной системе координат // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 92—98.
5. Купрадзе В. Д. К теории граничных задач для неоднородных упругих тел // Сообщ. АН ГССР. 1959. Т. 22. № 4. С. 401—408.
6. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 742 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
19.VII.1989