

УДК 539.374

© 1991 г.

**А. Б. ЕФИМОВ, В. В. ЗУЕВ, В. П. МАЙБОРОДА,
А. В. МАЛАШКИН**

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ЗАЩИТНЫХ ПРЕГРАД

Рассматриваются различные динамические воздействия на однородные и слоистые защитные преграды, материалы которых могут проявлять свойство разупрочнения. Для описания необратимых деформаций используются определяющие соотношения, позволяющие единым образом описывать необратимое деформирование при наличии разупрочнения, упрочнения и постоянства предела текучести. Подробно проанализированы и решены одномерные (продольные и продольно-сдвиговые) и двумерные (плоские и осесимметричные) задачи о динамическом, в частности, ударном, нагружении защитных преград. Установлены ограничения на определяющие функции материалов, нарушение которых приводит к потере гиперболичности системы уравнений. Разработан метод численного решения подобных задач; приведены результаты расчетов по предложенной методике различных вариантов динамического нагружения однородных и слоистых преград. Показано, что учет разупрочнения в динамических задачах приводит к новым механическим эффектам. Рассмотрены также вопросы оптимизации слоистой преграды на базе инженерных формул.

1. Введение. Необходимость углубленного изучения динамических проблем в механике деформируемого твердого тела диктуется все большим внедрением ударных, взрывных и других импульсных высокоэнергетических методов в технологические процессы сварки взрывом, резания, добычи полезных ископаемых, дробления скальных пород, улучшения эксплуатационных свойств и другие. Экспериментальные подходы к решению возникающих при этом проблем, особенно в случае защитных преград, связаны с большими материально-трудовыми затратами, а также не всегда дают возможность получить необходимую информацию о процессах, происходящих во взаимодействующих телах. Все это приводит к необходимости создания современных методов математического моделирования сред, с различными особенностями деформирования в условиях произвольного сложного напряженно-деформированного состояния. При этом для построения адекватных определяющих соотношений приходится привлекать модели сред с усложненными свойствами.

Ниже последовательно используются упругопластические модели с «падающей» диаграммой, позволяющие учесть разупрочнение и начальные этапы разрушения.

Множество экспериментальных результатов, отражающих сложное поведение неупругих сред при динамическом нагружении, способствовало появлению большого числа публикаций с целью теоретического осмысления и описания экспериментов, начиная с основополагающих работ [1–5] и других. В последующих работах эти идеи конкретизировались применительно к описанию динамического поведения материалов, либо обобщались с целью описания новых экспериментальных результатов. Обширный обзор теоретических работ по динамической пластичности приводится в [6–8] и других.

Моделям упругопластических сред с конечными деформациями, проблемам численного моделирования неоднородных динамических про-

цессов в твердых телах посвящены [9, 10] и последующие работы. В [11–15] исследуется распространение волн в стержнях, пластинах, балках, обладающих целым рядом усложненных свойств. В [16, 17] развивается наследственная механика твердых тел применительно к задачам динамики. Необходимо отметить различные кинетические подходы, в частности, основанные на дислокационных представлениях [18–22]. Варианты континуальных моделей сред с повреждениями для расчета кинетики образования, роста и слияния микротрещин в упругоэластических материалах, модели пористых тел изучались в [23–30]. Модели упругоэластической среды с учетом фазовых превращений рассматривались в [31, 32]. Структура ударной волны в вязкоупругом и упруговязкопластическом материалах рассматривалась в [33, 34].

При анализе поведения преград при динамическом нагружении используются, вообще говоря, три подхода: экспериментальный, инженерный и подход, основанный на численном моделировании задач механики неупругих твердых тел. Экспериментальный подход, как отмечалось выше, становится все более дорогостоящим и часто недостаточно информативным из-за сложности измерения определяющих процесс величин. Инженерный подход базируется на упрощенном описании процессов внедрения с учетом экспериментально определенных параметров моделей [35, 36]. В последнее время в связи с появлением новых поколений ЭВМ стали широко применяться методы численного моделирования, позволяющие получать полную картину изменения динамических и кинематических величин при различного рода динамических нагрузках.

Наиболее широко распространенными методами численного решения задач динамического нагружения твердых тел являются конечно-разностные, вариационно-разностные, характеристические методы и методы конечных элементов.

Одной из первых работ, в которой предложен конечно-разностный метод решения одномерных и двумерных задач упругоэластического динамического деформирования была [37]. Предложенная в ней схема является обобщением схемы крест для одномерных уравнений акустики и использует лагранжевы сетки, а для сглаживания разрывов и устранения нефизических осцилляций применяется искусственная вязкость Рихтмайера — Неймана. Благодаря своей простоте и универсальности, метод Уилкинса получил широкое распространение при решении задач динамики упругоэластических тел [38–40], задач разрушения, соударения, проникания, пробивания [41–43].

Определенными преимуществами обладают и вариационно-разностные подходы, сочетающие простоту конечно-разностных схем и алгоритмичность конечно-элементных методов.

В развитие характеристических численных методов большой вклад внесли работы [40, 41, 44]. В указанных работах имеются необходимые ссылки на литературу и приводятся решения практически важных задач. Анализ различных конечно-элементарных формулировок с необходимыми ссылками применительно к задачам динамики сплошной среды приведены в [44, 45]. Наиболее широко используется дискретизация, сводящая матрицу масс к диагональной [46, 47]. В [48] с использованием идей метода конечных элементов предложена эффективная полностью консервативная разностная схема.

Отметим, что используемые в упомянутых работах подходы к математическому моделированию процессов разрушения требуют дополнительных, отличных от чисто механических, экспериментальных исследований. В настоящей работе изложено новое описание процесса деформирования и разрушения упругоэластических сред и защитных преград, позволяющее пользоваться чисто механическими испытаниями. Этот

подход основывается на общих соображениях термодинамического характера и позволяет учесть и описать широкий диапазон усложненных свойств, проявляющихся при механическом нагружении разнообразных материалов.

2. Определяющие соотношения. Будем считать, что компоненты тензора полных деформаций среды ε_{ij} , являются суммами компонент тензоров упругих деформаций ε_{ij}^l и пластических ε_{ij}^p . Упругие деформации связаны с напряжениями σ_{ij} законом Гука, а для пластических деформаций предполагается справедливость инкрементальных определяющих соотношений, предложенных в [49]:

$$d\varepsilon_{kl}^p = h_e F_{klj} \partial\psi / \partial\varepsilon_{ij} d'\psi \quad (2.1)$$

$$h_e = - (F_{klj} \partial\psi / \partial\varepsilon_{ij} \cdot \partial\psi / \partial\varepsilon_{kl}^p)^{-1}$$

$$d'\psi = \partial\psi / \partial\varepsilon_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} + \partial\psi / \partial T \cdot dT \quad (2.2)$$

T — температура, функция $\psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, T)$ определяет в пространстве деформаций упругую область $\psi < 0$.

Соотношения (2.1) справедливы при $\psi = 0$ и $d'\psi > 0$; при $\psi < 0$, а также при $\psi = 0$, $d'\psi \leq 0$ изменений пластических деформаций не происходит.

Соотношения (2.1) получены из общих термодинамических соображений. В качестве дополнительного постулата применено обобщение принципа Онзагера на нелинейные связи [51]. В рамках (2.1) возможно описание убывания, роста и постоянства предела текучести с изменением деформаций [50]. Величины F_{klj} в предположении, что среда обладает упругой изотропией, а ее упругие свойства не зависят от пластических деформаций имеют вид

$$F_{ijkl} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} / G - (3K - 2G) / (18KG) \delta_{ij} \delta_{kl}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, K и G соответственно модуль объемного сжатия и сдвига.

Динамические процессы рассматриваются обычно как адиабатические, сопровождающиеся изменением температуры. Однако, основываясь на экспериментальных данных и теоретических оценках, в дальнейшем будем считать в рассматриваемом диапазоне скоростей эти изменения температуры несущественными или мало влияющими на физико-механические свойства материала, так что ими можно пренебречь.

Вид функции ψ от своих аргументов определяется характером рассматриваемых материалов, диапазоном изменения параметров процесса. Для сред, обладающих необратимыми объемными деформациями, можно в качестве функции ψ выбирать обобщенные модели Мизеса — Шлейхера

$$\psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 2G(e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p)^{1/2} - F(K(\theta - \theta^p), \varepsilon_{ij}^p)$$

$$\theta = \varepsilon_{ij} \delta^{ij}, \quad \theta^p = \varepsilon_{ij}^p \delta_{ij}$$

где θ , θ^p соответственно полная и пластическая объемная деформация, e_{ij} и e_{ij}^p компоненты деватора соответственно тензора полных и пластических деформаций. Функция F определяется из экспериментальных исследований; для этого необходимы дополнительные предположения и соответствующие методики. Из (2.2) имеем

$$H_e = h_e^{-1} = 2G + K(F) - \frac{F' \delta_{kl}}{3} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}^p} + \frac{2G(e_{kl} - e_{kl}^p)}{F} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}^p}$$

$$F' = \partial F / \partial p, \quad p = K(\theta - \theta^p)$$

так что в случае идеальной пластичности $H_e = 2G + K(F')^2$.

Зависимость F от давления p характерна для пористых материалов и высоких уровней напряжений. Для умеренных давлений при отсутствии необратимого объемного сжатия положим

$$\psi = 2G((e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p))^{1/2} - C(I_2^p)$$

$$I_2^p = 1/2 e_{ij}^p \cdot e_{ij}^p$$

Функция $C = C(I_2^p)$ определяется опытным путем, в частности, по результатам одноосных экспериментов, и характеризует зависимость предела текучести от уровня достигнутых пластических деформаций; для упрочняющегося материала $C' > 0$ $C' \equiv dC/dI_2^p$, для разупрочняющегося $C' < 0$ и $C' = 0$ в случае идеальной пластичности.

Под разупрочняющимся материалом понимается материал с «падающей» деформационной диаграммой в условиях жесткого деформирования.

3. Одномерные нестационарные движения. Рассмотрим задачу о продольно-сдвиговом динамическом нагружении пластины, ортогональной оси x ; оси y и z декартовой системы координат направлены вдоль поверхности пластины. Отличными от нуля в рассматриваемой задаче являются две компоненты вектора скорости продольная u и поперечная v , компоненты тензора полных деформаций ϵ_x и ϵ_{xy} , тензора напряжений σ_x , $\sigma_y = \sigma_z$, σ_{xy} , тензора пластических деформаций $\epsilon_x^p = -2\epsilon_y^p = -2\epsilon_z^p$, ϵ_{xy}^p .

Для функции ψ в рассматриваемом случае имеем так: $\psi = 2\sigma(2/3(\epsilon_x - 3/2\epsilon_x^p)^2 + (\epsilon_{xy} - \epsilon_{xy}^p))^2 - C$ а условие пластичности нагружения определяются соотношениями

$$\psi = 0, \quad \psi' \equiv \frac{d\psi}{dt} = \frac{2G}{C} \left[\frac{2}{3}(\sigma_x - \sigma_y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right] > 0$$

Принимая в качестве неизвестных функций переменных x, t функции $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \epsilon_x^p, \epsilon_{xy}^p$, получим из уравнений движения, ассоциированного закона, сформулированного в пространстве деформаций (2.1), и соотношений закона Гука, следующую замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \partial \sigma_x / \partial t - [K + 2G(A + 2/3)] \partial u / \partial x - 2GB \partial v / \partial x &= 0 \\ \partial \sigma_y / \partial t + [(A + 2/3)G - K] \partial u / \partial x + B \sigma \partial v / \partial x &= 0 \\ \partial \sigma_{xy} / \partial t - 2BG \partial u / \partial x - \sigma(1 + 2D) \partial v / \partial x &= 0 \\ \partial \epsilon_x^p / \partial t + A \partial u / \partial x + B \partial v / \partial x &= 0 \\ \partial \epsilon_{xy}^p / \partial t + B \partial u / \partial x + D \partial v / \partial x &= 0 \\ A &= -(8G(\sigma_x - \sigma_y)^2 H) (9C^2 H_\epsilon)^{-1} \\ B &= -(4G(\sigma_x - \sigma_y) \sigma_{xy} H) (3C^2 H_\epsilon)^{-1} \\ D &= -(2G \sigma_{xy}^2 H) (C^2 H_\epsilon)^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$H = H_1 H_2, \quad H_1 = H_1(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi > 0 \\ 0, & \psi < 0 \end{cases}, \quad H_2 = H_2(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi' > 0 \\ 0, & \psi' \leq 0 \end{cases}$$

H_ϵ — функция упрочнения в пространстве деформаций

$$H_\epsilon = 2G + [(\sigma_x - \sigma_y) \epsilon_x^p + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy}^p] C' / C$$

$$C' = dC/dI_2^p, \quad I_2^p = 3/4(\epsilon_x^p)^2 + (\epsilon_{xy}^p)^2$$

Для характеристического определителя Q системы (3.1) имеем

$$Q = -a^3 \{ a' - (K+G [2(A+D) + \frac{7}{3}]) a^2 \rho^{-1} + \\ + (G(1+2D) [K+2G(A+\frac{2}{3})] - 4B^2 G^2) \rho^{-2} \}$$

Ненулевые корни уравнения $Q=0$ определяются соотношением

$$B_{1,2} = 1/(2\rho) \{ K+G [2(A+D) + \frac{7}{3}] \pm ([K+Q/3 + \\ + 2G(A-D)]^2 + 16B^2 G^2)^{1/2} \} \quad (3.2)$$

где $B_{1,2} = a^2$. Условие гиперболичности системы (3.1) свелось к положительности величины $B_{1,2}$, определяемых в (3.2).

В случае чисто сдвигового динамического нагружения, когда ненулевыми являются только три функции v , σ_{xy} , ε_{xy}^p переменных x , t , имеем следующую систему разрешающих уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \partial \sigma_{xy} / \partial t - G(1+2D) \partial v / \partial x = 0 \quad \partial \varepsilon_{xy}^p / \partial t + D \partial v / \partial x = 0 \quad (3.3)$$

Ненулевые корни характеристического уравнения системы (3.3) будут $a_{1,2} = \pm (G(1+2D)\rho^{-1})^{1/2}$.

При пластическом деформировании ($H=1$) с учетом условий пластического нагружения $\sigma_{xy}^2 = C^2/2$ для D получим $D = -G/H_e$, так что условие гиперболичности системы (3.3) будет

$$2G < H_e \quad (3.4)$$

Так как, согласно [50], функции упрочнения в пространствах напряжений H_σ и деформаций H_ε связаны соотношением $H_\varepsilon = 2G + H_\sigma$, то условие (3.4) равносильно условию $H_\sigma > 0$, т. е. для гиперболичности системы (3.3) среда должна быть упрочняющейся.

В случае продольного нагружения система (3.1) сводится к следующей системе четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций u , σ_x , σ_y , ε_x^p :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} - \left[K + 2G \left(M + \frac{2}{3} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + \left[\left(M + \frac{2}{3} \right) G - K \right] \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_x^p}{\partial t} + M \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$M = -(4GH) (3H_e)^{-1}$$

Ненулевые корни соответствующего системе (3.5) характеристического уравнения будут

$$a_{1,2} = \pm (L/\rho)^{1/2}, \quad L = K + \frac{4}{3}G - (8G^2H)/(3H_e) \quad (3.6)$$

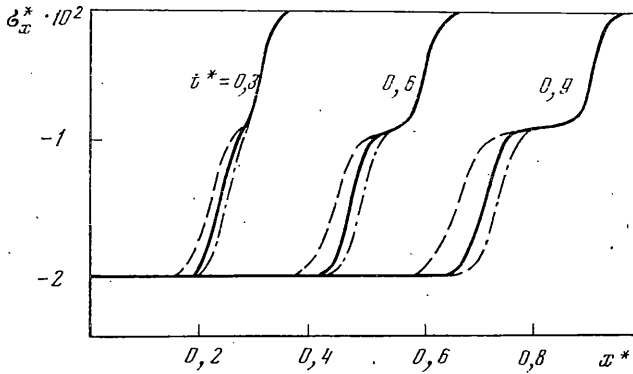
Так что условие гиперболичности системы (3.5) будет

$$3K + 4G > 8G^2H/H_e \quad (3.7)$$

Для функции упрочнения в пространстве деформаций H_ε в случае зависимости $C = C((I_2^p)^{1/2})$:

$$H_\varepsilon = 2G + (\sqrt{I_2^p})^{-1} \kappa \kappa_1 C', \quad \kappa = \text{sign}(\sigma_x - \sigma_y)$$

$$\kappa_1 = \text{sign}(\varepsilon_x^p), \quad C' = dC/d(I_2^p)^{1/2}$$



Фиг. 1

так что при $\kappa_1=1$ условие (3.7) дает

$$C' > C_*, \quad C_* = -(6\sqrt{2}KG)(3K+4G)^{-1} = -\sqrt{2E}(3(1-\mu))^{-1} \quad (3.8)$$

где E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

Таким образом для гиперболичности системы (3.5) достаточно, чтобы интенсивность разупрочнения C' и упругие характеристики материала $K, G(E, \mu)$ удовлетворяли условию (3.8). Отметим, что $C_* > C_{**} = -2\sqrt{2}G$, где C_{**} — значение C' , при котором функция упрочнения в пространстве деформаций $H_\varepsilon = 0$.

Скорость волны пластической нагрузки, согласно (3.6), для идеально-пластических сред больше, чем для сред с разупрочнением, и меньше, чем для сред с упрочнением.

На фиг. 1 приведены результаты расчета в различные моменты времени безразмерных напряжений в случае, если на левой поверхности пластины задана ступенька напряжений: $\sigma_x = 0$ при $t < 0$, $\sigma_x = 0,02$ при $t \geq 0$. Использовано обычное безразмеривание переменных $\bar{x}^* = x/l$, $\bar{t}^* = tc_L/l$, $\bar{\sigma}^* = \sigma/\rho c_L^2$, $c_L = ((k+4/3G)/\rho)^{1/2}$, где l — толщина пластины, c_L — скорость продольной упругой волны. Расчеты проводились для модельного материала с $K=64$ ГПа, $G=26,2$ ГПа, $\rho=2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, а характер зависимости предела текучести от интенсивности пластических деформаций сдвига задавался в виде

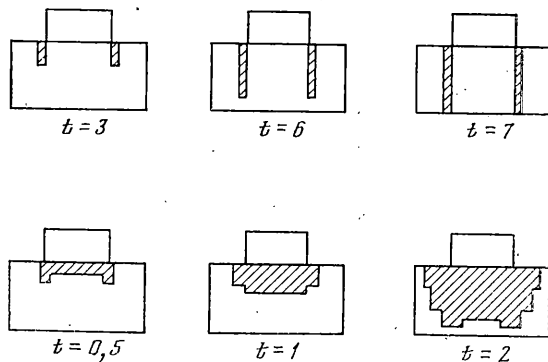
$$C = C_0 - \alpha I_2^p \quad (3.9)$$

Величина α характеризует интенсивность изменения (падения или роста) предела текучести, C_0 — начальный предел прочности; после достижения предельной остаточной прочности предполагалось, согласно экспериментам, что $\alpha=0$, $C=C_p$ где C_p — остаточная прочность. Как показывают результаты обработки ряда экспериментальных данных, зависимость вида (3.9) довольно хорошо описывает «падающую» деформационную диаграмму. Для рассматриваемого материала $C_0=0,37$ ГПа, $C_p=0,07$ ГПа безразмерный параметр α^* принимался $\alpha^*=10$ (разупрочнение, графики — пунктирные линии), $\alpha^*=0$ (идеальная пластичность, графики — сплошные линии), $\alpha^*=-10$ (упрочнение, графики — штрих-пунктирные линии). При численном решении поставленной задачи с разрывными начальными условиями, применялась конечно-разностная схема с использованием псевдовязкости [52].

4. Осесимметричный и плоский удар. Рассмотрим теперь в осесимметричной и плоской постановке задачу о нормальном ударе по, вообще говоря, слоистой преграде. Материалы соударяющихся тел представляют собой деформируемые упругопластические среды, проявляющие свойства упрочнения, разупрочнения или постоянства предела текучести при изменении пластических деформаций.

Разрешающая система уравнений имеет вид:

$$A_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial t} + B_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial r} + C_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial z} = F_\alpha$$



Фиг. 2, 3

где вектор $\bar{u} = \{u_r, u_z, s_r, s_z, s_{rz}, p, \epsilon_r^p, \epsilon_z^p, \epsilon_{rz}^p\}$ составлен из неизвестных функций. Полагается, что ось z направлена вертикально вверх против направления скорости удара, начало отсчета z от тыльной поверхности преграды, ось r ей ортогональна (в плоском случае $r=x, z=y$).

Матрицы $A_\alpha^\beta, B_\alpha^\beta, C_\alpha^\beta$ имеют ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}
 A_1^1 &= A_2^2 = \rho_i, & A_3^3 &= A_4^4 = \dots = A_9^9 = 1 \\
 B_1^3 &= B_1^6 = B_2^5 = C_1^5 = C_4^5 = C_2^6 = -1, & B_3^1 &= 4G(D-1/3) \\
 B_3^2 &= B_5^1 = C_3^1 = 2AG, & B_4^1 &= C_4^2 = 2G(M+1/3) \\
 B_4^2 &= C_4^1 = C_5^2 = 2BG, & B_5^2 &= C_5^1 = G(2F-1) \\
 B_6^1 &= C_6^2 = -3K, & B_7^1 &= -2D, & B_7^2 &= B_9^1 = C_7^1 = -A, & B_8^1 &= C_7^2 = -M \\
 B_8^2 &= C_8^1 = C_9^2 = -B, & B_9^2 &= C_9^1 = -F, & C_4^2 &= 4G(E+1/3), & C_8^2 &= -2E \\
 A &= 2Gh_e s_r s_{rz} C^{-2}, & B &= 2Gh_e s_z s_{rz} C^{-2}, & D &= Gh_e s_r^2 C^{-2} \\
 E &= Gh_e s_z^2 C^{-2}, & F &= 2Gh_e s_{rz}^2 C^{-2}, & M &= 2Gh_e s_z s_z C^{-2}
 \end{aligned}$$

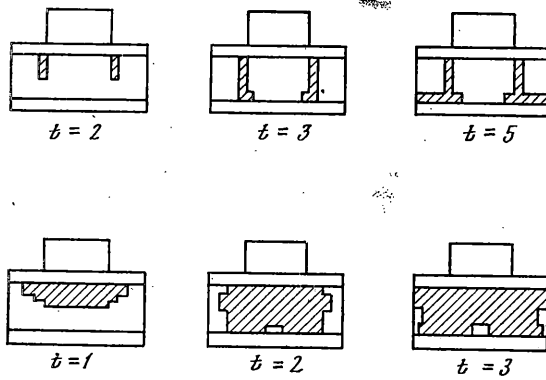
Компоненты F_α в осесимметричном случае будут:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (2s_r + s_z)r^{-1}, & F_2 &= s_{rz}r^{-1}, & F_3 &= 2G[(M+2D)^{-1/3}]u_r r^{-1} \\
 F_4 &= 2G[(M+2E)^{-1/3}]u_z r^{-1}, & F_5 &= 2G(A+B)u_z r^{-1} \\
 F_6 &= 3Ku_2 r^{-1}, & F_7 &= -(M+2D)u_z r^{-1} \\
 F_8 &= -(M+2E)u_r r^{-1}, & F_9 &= -(A+B)u_r r^{-1}
 \end{aligned}$$

в плоском случае $F_\alpha = 0$.

В качестве начальных условий принимается, что все искомые функции в системе ударник-преграда равны нулю, кроме $u_z = v_0$ — скорость ударника. Граничные условия сводятся к отсутствию напряжений на свободных поверхностях; на контактной поверхности ставится условие прилипания.

Для определения компонент скорости и тензора скоростей деформаций при численном решении поставленной задачи использовалась разностная схема, основанная на линейной аппроксимации вектора скорости по треугольному элементу линейной функцией [48]. Далее, согласно [53], вычисляются значения полных деформаций и их приращений, величины $d'\psi$, изменения пластических деформаций, компоненты тензора пластических деформаций, дивергента напряжений и давление. Были



Фиг. 4, 5

проведены расчеты для различных значений скоростей удара, интенсивности разупрочнения, пределов прочности и т. д.

В качестве примера решения поставленной задачи рассмотрим случай удара со скоростью $v_0=250$ м/с стального цилиндра радиусом $r=0,5$ см и высотой $h=r$ по однородной и слоистой преграде, причем материал однородной и среднего слоя трехслойной конструкции обладает разупрочнением; для него упругие свойства, пределы прочности указаны выше. Диаметр мишени $d=4r$, толщина $l=2r$. Лицевой и тыльный слой трехслойной преграды — стальные, имеют толщины $l_1=l_2=l/6$. Для стали принималось $\alpha=0$ (идеальная пластичность), $C=C_0=1,7$ ГПа $G=81$ ГПа, $K=175$ ГПа. Рассматривался широкий диапазон изменения величины α . На фиг. 2 и фиг. 3 соответственно для $\alpha=5$ ГПа и $\alpha=1000$ ГПа показаны в различные моменты времени (в мкс) области однородной преграды, где материал перешел в разрушенное состояние ($C=C_r$ — штриховка). Очевиден принципиально различный характер разрушения преграды в зависимости от интенсивности разупрочнения материала, характеризуемой величиной α . При небольших α реализуется разрушение по типу «выбивания пробки», т. е. разрушение локализуется в области под краями ударника. При этом, как показывают расчеты, чем больше α , тем быстрее выходит зона разрушения на тыльную поверхность преграды. В случае плоского удара наблюдается более быстрый выход зоны разрушения на тыльную поверхность преграды, чем в осесимметричном случае.

При больших α разрушается вся область под ударником, причем область разрушения тем больше, чем больше α . При очень интенсивном разупрочнении можно говорить о фронте волны разрушения (фиг. 3). Аналогичное поведение наблюдается и для разупрочняющейся средней части слоистой мишени. На фиг. 4 и фиг. 5 приведены в различные моменты времени зоны разрушения соответственно для $\alpha=50$ ГПа и $\alpha=1000$ ГПа.

5. Оптимизация по инженерным формулам. В рамках инженерных подходов предлагаются формулы либо для силы сопротивления среды, либо связывающие предельную скорость пробития или глубину проникания со свойствами и формой снаряда и мишени, а также начальной скоростью и углом полета [54–56]. В [57] предлагается принять следующую модель сопротивления среды

$$\bar{p}_a = \begin{cases} -[c + b(\bar{v}_a, \bar{n}_a) + a(\bar{v}_a, \bar{n}_a)^2] \bar{n}_a, & (\bar{v}_a, \bar{n}_a) > 0 \\ 0, & (\bar{v}_a, \bar{n}_a) \leq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

где a — точка на поверхности ударника, \bar{v}_a — скорость этой точки, \bar{n}_a — внешняя нормаль к поверхности ударника, \bar{p}_a — давление в этой точке; a, b, c — эмпирические параметры материала преграды. Там же рассмотрено плоскопараллельное движение осесимметричного тела. Построенный алгоритм позволил решить ряд практически важных задач о пробивании однородных и слоистых преград под любыми углами ударниками в форме произвольного тела вращения. Для частного случая нормального удара цилиндрическим ударником, уравнения движения, записанные с использо-

ванием (5.1) можно проинтегрировать, получив явную аналитическую зависимость предельной глубины проникания от начальных условий и характеристик ударника и мишени.

$$H = \frac{1}{2a^*} \ln \left(1 + \frac{b^*}{c^*} v + \frac{a^*}{c^*} v^2 \right) + \begin{cases} -\frac{b^*}{a^* \sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{v \sqrt{\Delta}}{2c^* + b^* v}, & \Delta > 0 \\ +\frac{b^*}{2a^* \sqrt{-\Delta}} \ln \left(\frac{2c^* + v(b^* - \sqrt{-\Delta})}{2c^* + v(b^* + \sqrt{-\Delta})} \right), & \Delta < 0 \\ -\frac{b^* v}{a^* (2c^* + b^* v)}, & \Delta = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

где v — начальная скорость, H — глубина проникания, $\Delta = 4a^*c^* - b^{*2}$, $a^* = \pi D^2 a / (4M)$, $b^* = \pi D^2 b / (4M)$, $c^* = \pi D^2 c / (4M)$, D — диаметр цилиндра, M — масса ударника.

Параметры a , b , c — определяются по результатам экспериментов, с использованием формулы (5.2). Так, если имеется n измеренных в экспериментах глубин: $h(v_i)$, $i=1, n$, то параметры a , b , c — ищутся из условий минимума функции

$$\sum_{i=1}^n (H(v_i, a, b, c) - h(v_i))^2 \Rightarrow \min$$

В [58] приводится обзор работ по оптимизации преград при нормальном внедрении жесткого удлиненного тела [59–61] с использованием различных моделей пробивания [59, 62].

Используя формулу (5.2), полученную из закона сопротивления (5.1), можно поставить задачу минимизации веса преграды при заданных ограничениях на толщины и порядок слоев, общую толщину преграды, стоимость и максимальную запреградную скорость.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho_i h_i \rightarrow \min; \quad V_e \leq V_{e_0}, \quad \sum_{i=1}^n h_i \leq H_0 \\ \sum_{i=1}^n c_i \rho_i h_i \leq c_0, \quad h_i \geq \bar{h}_{i_0} \quad (i=1, n) \end{aligned} \quad (5.3)$$

где V_{e_0} — максимально допустимая запреградная скорость, H_0 — предельная допустимая толщина пластины, c_0 — предельная допустимая стоимость, \bar{h}_{i_0} — ограничение на толщину i -го слоя снизу (по технологическим причинам), n — число слоев. Всего имеется $n+3$ ограничения типа неравенств.

Алгоритм решения системы (5.3) с использованием метода скользящего допуска реализован в виде программы на ЭВМ. С его помощью был решен ряд важных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* Об испытании металлов при больших скоростях // Инж. сб. 1944. Т. 1. № 1. С. 13–26.
2. *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 79–92.
3. *Рахматулин Х. А.* О распространении волн разгрузки // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 1. С. 91–100.
4. *Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
5. *Соколовский В. В.* Распространение упруговязко-пластических волн в стержнях // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 261–280.

6. Зволинский Н. В., Рейтман Н. Н., Шапиро Г. С. Динамика деформируемых твердых тел // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 291–323.
7. Васин Р. А., Ленский В. С., Ленский Э. В. Динамические зависимости между напряжениями и деформациями // Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. С. 7–38.
8. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
9. Кукуджанов В. Н., Кондауров В. И. Численное решение неоднородных задач динамики твердого деформируемого тела // Проблемы динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975. С. 39–84.
10. Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластических сред с конечными деформациями // Сборник по численным методам в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1978. С. 84–124.
11. Кукуджанов В. Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
12. Кукуджанов В. Н., Никитин Л. В. Распространение волн в стержнях из неоднородного упруговязко-пластического материала // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 4. С. 53–59.
13. Никитин Л. В. Распространение упруговязко-пластических волн в толстостенной трубе // Изв. вузов. Машиностроение. 1958. № 3/4. С. 14–23.
14. Никитин Л. В. Распространение поперечных упруговязко-пластических волн в балках и пластинах // Инж. сб. 1960. № 30. С. 31–46.
15. Симонов И. В. Удар пластинки по упругопластическому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 105–112.
16. Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В. Запаздывание текучести в динамике жесткопластических сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 20–30.
17. Суворова Ю. В. Распространение импульса нагрузки в нелинейно-наследственном материале с запаздывающей текучестью // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 3. С. 87–91.
18. Гилман Дж. Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии // Механика: Сб. перев. иностр. статей. 1970. № 2. С. 96–123.
19. Нигматулин Р. И., Холм Н. Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 4. С. 131–146.
20. Нигматулин Р. И., Холм Н. Н. Запаздывание текучести и упрочение при скоростном деформировании металлов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 1. С. 58–61.
21. Майборода В. П., Кравчук А. С., Холм Н. Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1986. 261 с.
22. Майборода В. П., Холм Н. Н. Скоростное деформирование металлов с учетом объемной сжимаемости и температуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 103–110.
23. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности // Инж. журн. МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
24. Бологин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
25. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
26. Рузанов А. Н. Численное исследование относительной прочности с учетом микроразрушений // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 109–115.
27. Глушко А. И. Об одном подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 130–135.
28. Глушко А. И. Исследование откола как процесса образования микропор // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 132–140.
29. Johnson J. N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids // J. Appl. Phys. 1981. V. 52. № 4. P. 2812–2825.
30. Белов Н. Н., Корнеев А. И., Николаев А. П. Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок // ПМТФ. 1985. № 3. С. 132–136.
31. Григорян С. С., Козорезов К. И., Нигматулин Р. И., Скугорова Н. Ф., Холм Н. Н. Теоретические и экспериментальные исследования, связанные с распространением ударных волн, вызывающих фазовые переходы // Теория и практика высокоскоростной деформации металлических материалов. М.: Моск. ин-т стали и сплавов, 1971. С. 35–36.
32. Ахмадеев Н. Х., Нигматулин Р. И. Ударные волны и фазовые превращения в железе // ПМТФ. 1976. № 5. С. 128–135.
33. Годунов С. К., Козин Н. С. Структура ударных волн в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров вещества // ПМТФ. 1974. № 5. С. 101–108.
34. Фомин В. М. Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия тел. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1982. 92 с.
35. Гольдсмит В. Удар. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.

36. Сагомонян А. Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
37. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
38. Баженов В. Г., Белевич С. М., Коротких Ю. Г., Санков Е. И., Угодников А. Г. Методы численного анализа волновых процессов в сплошных средах и тонкостенных конструкциях с учетом сопутствующих явлений // Тр. симпози. «Нелинейные и тепловые эффекты при переходных и волновых процессах». Горький – Таллинн. 1973. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1973. Вып. 1. С. 135–164.
39. Коротких Ю. Г., Рузанов А. И. Исследование динамического разрушения упругопластических тел при силовых и тепловых воздействиях // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 7. С. 3–9.
40. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ. 1980. № 3. С. 126–136.
41. Jonas G. H., Zukas J. A. Mechanics of penetrations: Analysis and Experiment // Intern. J. Eng. Sci. 1978. V. 16. № 12. P. 879–903.
42. Гулидов А. И., Фомин В. М., Шабалин И. И. Исследование влияния геометрических размеров ударника и преграды на область разрушения // Материалы 8-й Всесоюз. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск: СО АН СССР, 1984. С. 121–129.
43. Wilkins M. L. Mechanics of penetration and perforation // Intern. J. Eng. Sci. 1978. V. 16. № 11. P. 793–807.
44. Кукуджанов В. Н. Численные методы решения неоднородных задач динамики упругопластических сред // Материалы 6-й Всесоюз. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск: СО АН СССР, 1980. Ч. 1. С. 105–120.
45. Коротких Ю. Г., Рузанов А. И., Садырин А. И. Анализ методом конечного элемента задач динамики сплошных сред // Материалы 11-й школы-семинара по методу конечных элементов в механике сплошных сред. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1975. С. 96–107.
46. Hartzman M., Hutchinson J. R. Nonlinear dynamics of solids by the finite element methods // Comput. and Struct. 1972. V. 2. № 1/2. P. 47–77.
47. Корнеев А. И., Николаев А. П., Шиповский И. Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел // Материалы 7-й Всесоюз. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск: СО АН СССР, 1982. С. 122–129.
48. Буланцев Г. М., Корнеев А. И., Николаев А. П. О рикошетировании при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 138–143.
49. Зуев В. В. Определяющие соотношения теории пластичности в пространствах деформаций и напряжений // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 4. С. 792–795.
50. Зуев В. В. Об определяющих соотношениях теории пластичности // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 29. С. 39–46.
51. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
52. Ризтмайер Р., Морган К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
53. Ефимов А. Б., Зуев В. В., Майборода В. П. Осесимметричное ударное нагружение материалов с учетом разупрочнения // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. С.
54. Геринг Дж. Высокоскоростной удар с инженерной точки зрения // Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973. С. 468–516.
55. Понд Р., Гласс К. Металлофизические исследования и распределение энергии // Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973. С. 428–467.
56. Динамика удара/Под ред. С. С. Григоряна. М.: Мир, 1985. 296 с.
57. Кравчук А. С., Малайкин А. В. Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия твердых тел с многослойными пластинами. // Всесоюз. школа-семинар «Математическое моделирование в науке и технике»: Тез. докл. Пермь: УНЦ АН СССР, 1986. С. 184.
58. Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
59. Апуков В. Н., Поздеев А. А. Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 1. С. 47–55.
60. Апуков В. Н., Петрухин Г. И., Поздеев А. А. Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 165–170.
61. Апуков В. И., Белоусов В. Л., Каниболотский М. А. Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композит. материалов. 1986. № 2. С. 252–257.
62. Сагомонян А. Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1975. № 5. С. 104–111.