МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1991

УДК 539.3:534.1

А. А. ЛЯПИН

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания слоистого упругого полупространства со сферической полостью при осесимметричной деформации среды. Краевая задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, допускающей эффективное численное исследование в диапазоне длинных и средних волн. Использование формул переразложения решений уравнения Гельмгольца для различных систем координат позволяет достаточно просто исследовать ряд задач акустики, а также задач о распространении упругих колебаний в твердых телах с полостями канонической (цилиндр, сфера) конфигурации [1, 2, 3]. Данная методика применяется здесь к изучению задачи для слоистого полупространства со сферической полостью, генерирующей осесимметричные гармонические колебания.

1. Постановка задачи. Пусть упругая среда занимает в цилиндрической системе координат (R, Z, θ) область (фиг. 1):

$$D=D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_N,\quad D_1=\{Z<0,\ R>0,\ \theta\in(0,\ 2\pi)$$
$$r=(R^2+(Z+h_1)^2)^{1/2}>a\},\quad D_j=\{Z\in(Z_{j-1},\ Z_j)$$
$$R>0,\ \theta\in(0,\ 2\pi)\},\quad j=2,\ldots,N$$

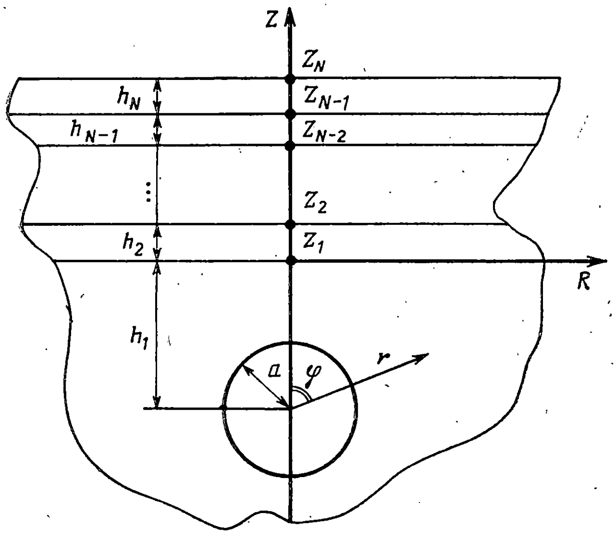
Здесь h, a $(a<h)$ — величина заглубления и радиус полости, $Z_1=0$, $Z_j=Z_{j-1}+h_j$, $j=2,\ldots,N$, h_j — толщины слоев. Свойства среды в области D_j характеризуются параметрами μ_j, V_{pj}, V_{sj} (соответственно модуль сдвига и скорости распространения продольных и поперечных волн). С центром полости свяжем сферическую систему координат (r, φ, θ). Далее все величины, имеющие размерность длины, будут отнесены к a, а имеющие размерность напряжений,— к μ_1.

Амплитудные функции перемещений точек среды в D_j, удовлетворяющие уравнениям Ламе, ищем в виде контурных интегралов в соответствии с принципом предельного поглощения [4]:

$$u_k^{(j)}(R,Z)=\gamma_j\int\limits_\Gamma\{[\mathbf{V}^{(j)}(\alpha,Z)\cdot\mathbf{R}^{*(j-1)}(\alpha)+\mathbf{W}^{(j)}(\alpha,Z)\cdot\mathbf{R}^{*(j)}(\alpha)]\}_k$$
$$\alpha J_{k-1}(\alpha R)\,d\alpha,\quad \gamma_j=\mu_1/\mu_j,\quad u_1^{(j)}\equiv u_Z^{(j)},\quad u_2^{(j)}\equiv u_R^{(j)},\quad j=2,\ldots,N$$

Здесь $\mathbf{R}^{*(j-1)}$, $\mathbf{R}^{*(j)}$ — трансформанты Ханкеля векторов напряжений на нижней и верхней гранях слоев D_j:

$$V_{21}^{(j)}=\alpha[4\alpha^2\zeta_j^2f_{12}^{(j)}(Z)+2\zeta_j^4f_{21}^{(j)}(Z)+\zeta_jg_{12}^{(j)}(Z)+8\alpha^2\lambda_{1j}^2\lambda_{2j}^2g_{21}^{(j)}(Z)]/\Delta_j(\alpha)$$
$$\Delta_j(\alpha)=8\zeta_j^4f_{12}^{(j)}(0)-[\zeta_j^8+16\alpha^2\lambda_{1j}^2\lambda_{2j}^2]g_{12}^{(j)}(0)\tag{1.1}$$
$$f_{mn}^{(j)}(Z)=\operatorname{ch}\lambda_{mj}\xi_j-\operatorname{ch}\lambda_{nj}h_j\operatorname{ch}\lambda_{mj}\eta_j$$



Фиг. 1

$$g_{mn}^{(j)}(Z)=(\operatorname{sh}\lambda_{nj}h_j\operatorname{sh}\lambda_{mj}\eta_j)/(\lambda_{nj}\lambda_{mj}),\qquad \xi_j=Z+Z_j$$

$$\eta_j=-Z+Z_{j+1},\quad \lambda_{1j}^2=\alpha^2-\theta_{1j}^2,\quad \lambda_{2j}^2=\alpha^2-\theta_{2j}^2$$

$$\zeta_j^2=\alpha^2+\lambda_{2j}^2,\quad \theta_{1j}^2=\omega^2a^2/V_{pj}^2,\quad \theta_{2j}^2=\omega^2a^2/V_{sj}^2 \tag{1.2}$$

Здесь $V_{12}^{(j)}$ соответствует $V_{21}^{(j)}$ с заменой $f_{mn}^{(j)}\to f_{nm}^{(j)}$, $g_{mn}^{(j)}\to g_{nm}^{(j)}$, $V_{11}^{(j)}$ получается из (1.1) заменой

$$f_{12}^{(j)}\to-\frac{\partial f_{12}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\alpha,\qquad g_{12}^{(j)}\to-\frac{\partial g_{12}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\alpha,\qquad f_{21}^{(j)}\to-\alpha\frac{\partial f_{21}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\lambda_{2j}^2,$$

$$g_{21}^{(j)}\to-\alpha\frac{\partial g_{21}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\lambda_{2j}^2$$

Соответственно для $V_{22}^{(j)}$:

$$f_{12}^{(j)}\to-\frac{\partial f_{21}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\alpha,\qquad g_{12}^{(j)}\to-\frac{\partial g_{21}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\alpha,\qquad f_{21}^{(j)}\to-\alpha\frac{\partial f_{12}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\lambda_{1j}^2,$$

$$g_{21}^{(j)}\to-\alpha\frac{\partial g_{12}^{(j)}}{\partial Z}\Big/\lambda_{2j}^2$$

$W_{mn}^{(j)}$ соответствуют $W_{mn}^{(j)}$ с заменой ξ_j на η_j и η_j на ξ_j, а также изменением у выражения для W_{11} знака на противоположный.

Для $\mathbf{u}^{(1)}(R, Z)$ с применением принципа суперпозиции [5] имеем:

$$\mathbf{u}^{(1)}(R, Z)=\mathbf{u}^{(1,1)}(R, Z)+\mathbf{u}^{(1,2)}(R, Z) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{u}^{(1,1)}(R,Z)=\operatorname{col}\{v_1^{(1,1)}\cos\varphi-u_2^{(1,1)}\sin\varphi,\ v_1^{(1,1)}\sin\varphi+v_2^{(1,1)}\cos\varphi\}$$

Здесь $\mathbf{v}^{(1,1)}$ — поле смещений в сферической системе координат от действия осциллирующей полости в упругом пространстве при заданном векторе напряжений на полости $\mathbf{Y}(\varphi)$; $\mathbf{u}^{(1,2)}$ — смещения точек однородного полупространства без полости при заданном на границе $Z=0$ векторе напряжений $\mathbf{X}(R)$. Вектор-функции $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ считаются неизвестными и подлежат последующему определению.

Функции $\mathbf{v}^{(1,1)}$ определяются представлением $\mathbf{v}^{(1,1)}=\operatorname{grad}\Phi-\operatorname{rot}\cdot(\mathbf{e}_\theta\partial\Psi/\partial\varphi)$, где волновые потенциалы Φ, Ψ имеют вид (сумма по $n=0, 1, \ldots, \infty$):

$$\Phi=\Sigma A_n h_n^{(1)}(\theta_{11}r)P_n(\cos\varphi),\qquad \Psi=\Sigma B_n h_n^{(1)}(\theta_{12}r)P_n(\cos\varphi)$$

$\theta_{11}=\omega a/V_{p1}$, $\theta_{12}=\omega a/V_{s1}$; $h_n^{(1)}$ – сферические функции Ханкеля, $P_n(\cos\varphi)$ – полиномы Лежандра.

Константы A_n, B_n однозначным образом отыскиваются из граничного условия $\mathbf{t}^{(1,1)}|_{r=1}=\mathbf{Y}(\varphi)$ через коэффициенты $\mathbf{Y}^{(n)}$ разложения $\mathbf{Y}(\varphi)$ по функциям $P_n^\nu(\cos\varphi)$, $\nu=0, 1$.

Здесь и далее символом $\mathbf{t}^{(j)}$ обозначен вектор напряжений на соответствующей граничной поверхности области D_j; $\mathbf{t}^{(1)}=\mathbf{t}^{(1,1)}+\mathbf{t}^{(1,2)}$ в соответствии с (1.3). Для $\mathbf{u}^{(1,2)}$ имеем

$$\mathbf{u}_k^{(1,2)}=\int\limits_\Gamma\{\mathbf{P}(\alpha,Z)\cdot\mathbf{X}^*(\alpha)\}_k J_{k-1}(\alpha R)\alpha\,d\alpha$$

$$P_{11}(\alpha,Z)=\lambda_{11}(\zeta_1^2\exp[\lambda_{11}Z]-2\alpha^2\exp[\lambda_{21}Z])/\Delta_R(\alpha)$$

$$P_{12}(\alpha,Z)=\alpha(2\lambda_{11}\lambda_{21}\exp[\lambda_{11}Z]-\zeta_1^2\exp[\lambda_{21}Z])/\Delta_R(\alpha)$$

$$P_{21}(\alpha,Z)=\alpha(-\zeta_1^2\exp[\lambda_{11}Z]+2\lambda_{11}\lambda_{21}\exp[\lambda_{21}Z])/\Delta_R(\alpha)$$

$$P_{22}(\alpha,Z)=\lambda_{21}(-2\alpha^2\exp[\lambda_{11}Z]+\zeta_1^2\exp[\lambda_{21}Z])/\Delta_R(\alpha)$$

$$\Delta_R(\alpha)=\zeta_1^4-4\lambda_{11}\lambda_{21}\alpha^2$$

где λ_{k1}, ζ_1^2 имеют вид (1.2).

2. Сведение граничной задачи к системе функциональных уравнений.

Удовлетворение граничных условий исходной краевой задачи $\mathbf{t}^{(1)}|_{r=1}=\boldsymbol{\tau}(\varphi)$, $\mathbf{t}^{(N)}|_{Z=Z_N}=\mathbf{T}(R)=\mathbf{R}^{(N)}(R)$ и условий стыковки слоев

$$\mathbf{u}^{(j)}(R,Z_j)=\mathbf{u}^{(j+1)}(R,Z_j),\quad (j=1,\ldots,N-1)\tag{2.1}$$

приводит к системе функциональных уравнений второго рода относительно неизвестных $\mathbf{X}^*$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{R}^{*(1)}$:

$$\mathbf{Y}(\varphi)+\mathbf{t}^{(1,2)}(\varphi)|_{r=1}=\boldsymbol{\tau}(\varphi),\tag{2.2}$$

$$\mathbf{X}^*(\alpha)+\mathbf{t}^{*(1,1)}(\alpha)|_{Z=0}=\mathbf{R}^{*(1)}(\alpha)$$

$$\mathbf{P}(\alpha,0)\cdot\mathbf{X}^*(\alpha)+\mathbf{u}^{*(1,1)}(\alpha)|_{Z=0}=\mathbf{Q}(\alpha)\cdot\mathbf{R}^{*(1)}(\alpha)+\mathbf{S}(\alpha)\cdot\mathbf{T}^*(\alpha)$$

Матрицы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ получены последовательным исключением функций $\mathbf{R}^{*(j)}(\alpha)$, $j=2,\ldots,N-1$ из условий (2.1). Здесь

$$f^*(\alpha)=H_\nu[f(R)]=\int\limits_0^\infty f(R)J_\nu(\alpha R)R\,dR$$

Вектор-функции $t^{*(1,1)}(\alpha)$, $u^{*(1,1)}(\alpha)$ выписываются в явном виде с применением для Φ и $\partial\Psi/\partial\varphi$ формул переразложения сферических функций по решениям уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат [6]:

$$h_n^{(1)}(\theta_{j1}r)P_n^\nu(\cos\varphi)=\frac{i^{n-1}}{\theta_{j1}}\int\limits_\Gamma P_n^\nu\left(\frac{i\lambda_{j1}}{\theta_{j1}}\right)\exp[-(Z+h_1)\lambda_{j1}]J_\nu(\alpha R)\alpha\,d\alpha/\lambda_{j1}$$

где $P_n^{\nu}(\cos\varphi)$ — функции Лежандра на разрезе, а $P_n^{\nu}(i\lambda_{j1}/\theta_{j1})$ при $\mathrm{re}\,\alpha < \theta_{21}$ — функции комплексного аргумента с исчезающей мнимой частью.

Компоненты векторов $\mathbf{u}^{*(1,1)}=\{u_Z^{*(1,1)}, u_R^{*(1,1)}\}$, $\mathbf{t}^{*(1,1)}=\{\sigma_Z^{*(1,1)}, \tau_{RZ}^{*(1,1)}\}$ имеют вид

$$\mathrm{col}\{u_Z^{*(1,1)}, u_R^{*(1,1)}, \sigma_Z^{*(1,1)}, \tau_{RZ}^{*(1,1)}\}=\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n+1}\{\mathbf{f}A_n \exp[-(Z+h_1)\lambda_{11}]\times$$

$$\times P_n(i\lambda_{11}/\theta_{11})+\mathbf{g}B_n \exp[-(Z+h_1)\lambda_{21}]P_n^1(i\lambda_{21}/\theta_{21}), \qquad |Z|<h_1 \tag{2.3}$$

$$f_1=1/\theta_{11},\ f_2=-\alpha/(\theta_{11},\lambda_{11}),\ f_3=(2\alpha^2-\theta_{11}^4/\theta_{21}^2)/(\theta_{11}\lambda_{11}),\ f_4=2\alpha/\theta_{11},$$

$$g_1=\alpha/(\theta_{21}\lambda_{21}),\ g_2=-1/\theta_{21},\ g_3=2\alpha/\theta_{21},\ g_4=(\alpha^2+\lambda_{21}^2)/(\theta_{21}\lambda_{21})$$

Оператор $\mathbf{t}^{(1,2)}(\varphi)$ легко получить с использованием закона Гука для соотношений (1.4) и последующим переходом к сферической системе координат (r, φ, θ) в виде:

$$\mathbf{t}^{(1,2)}(\varphi)\,|_{r=1}=\int_{\Gamma}\sum_{m,\nu=1}^{2}\mathbf{L}^{m\nu}(\alpha,\varphi)\cdot\mathbf{X}^*(\alpha)\exp[\lambda_{m1}Z]\,\alpha J_\nu(\alpha R)\,d\alpha$$

Обращая последние уравнения системы (2.2) относительно функций X^* с учетом (2.3), получим явное представление

$$\mathbf{X}^*(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{K}_n(\alpha, h_j, \gamma_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})\cdot\mathbf{Y}^{(n)}+\mathbf{M}(\alpha)\cdot\mathbf{T}^*(\alpha) \tag{2.4}$$

Определитель системы при данном обращении на Г не равен нулю. Первое уравнение системы (2.2) разлагается далее по полной ортогональной системе функций $P_l^k(\cos\varphi)$, и с применением формул переразложения:

$$\exp[Z\lambda_{m1}]J_m(\alpha R)=\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^m i^n(2n+1)(n-m)!/(n+m)!$$

$$P_n^m(i\lambda_{j1}/\theta_{j1})j_n(\theta_{j1}r)P_n^m(\cos\varphi)$$

получим ($L^{m\nu l}(\alpha)$ — известны):

$$\mathbf{t}^{(1,2)}(\varphi)\,|_{r=1}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{A}_l P_l^{\nu}(\cos\varphi), \qquad \mathbf{A}_l=\int_{\Gamma}\sum_{m,\nu=1}^{2}\mathbf{L}^{m\nu l}(\alpha)\cdot\mathbf{X}^*(\alpha)\exp[-\lambda_{m1}h_1]\,d\alpha \tag{2.5}$$

В результате для определения $\mathbf{Y}^{(n)}$ из соотношений (2.4), (2.5) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Y}^{(l)}+\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{B}_{lk}\cdot\mathbf{Y}^{(k)}=\boldsymbol{\tau}^{(l)}+\boldsymbol{\sigma}^{(l)} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B}_{lk}=\int_{\Gamma}\sum_{m,\nu=1}^{2}\mathbf{L}^{m\nu l}\cdot\mathbf{K}_k(\alpha, h_j, \gamma_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})\exp[-\lambda_{m1}h_1]\,d\alpha \qquad (j=1,\ldots,N),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(l)}=\int_{\Gamma}\sum_{m,\nu=1}^{2}\mathbf{L}^{m\nu l}\cdot\mathbf{M}(\alpha)\cdot\mathbf{T}^*(\alpha)\exp[-\lambda_{m1}h_1]\,d\alpha \tag{2.7}$$

3. Исследование свойств системы. В результате изучения поведения функций, входящих в выражения $\mathbf{P}(\alpha, 0)$, $\mathbf{Q}(\alpha)$, $\mathbf{u}^{(1,1)}(\alpha)$, $\mathbf{t}^{(1,1)}(\alpha)$ на Γ и использования представления для $P_n{}^m(i\lambda_{j1}/\theta_{j1})$ через гипергеометрическую функцию:

$$P_n{}^m(z)=\frac{2^n\Gamma(n+{}^1/_2)z^{n+m}}{(z^2-1)^{m/2}\Gamma(1+n-m)}F\left(-\frac{n+m}{2},\frac{1-n-m}{2},\frac{1-2n}{2},z^{-2}\right);\quad |z|>1$$

для элементов матриц $\mathbf{K}_k(\alpha, h_j, \gamma_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})$ получим равномерные по h, γ_j, θ_{ij} оценки типа:

$$|K_k{}^{11}(\alpha, h_j, \gamma_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})|<\exp[-h_1|\alpha|]\,|\alpha|^{k+1}/k!$$
$$\{C_3k^{-2}|F(-k/2,\ (1-k)/2;\ (1-2k)/2;\ \theta_{11}{}^2/(\theta_{11}{}^2-\alpha^2))|+$$
$$+C_4|F(-(k+1)/2,\ -k/2;\ (1-2k)/2;\ \theta_{11}{}^2/(\theta_{11}{}^2-\alpha^2)|\}$$

Аналогично для элементов $\mathbf{L}^{m\nu l}$ можно получить при всех p, s, m оценки на Γ:

$$|L_{ps}^{m\nu l}(\alpha)|<|\alpha|^{l+1}\sum_{\nu=1}^{2}\left\{\frac{C_\nu}{(l+\nu)!}\left|F\left(-\frac{l+\nu}{2},\ \frac{1-l-\nu}{2};\ \frac{1-2l}{2};\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\xi^2\right)\right|\right\}\quad \xi^2=\theta_{\nu+1\,1}^2/(\theta_{\nu+1\,1}^2-\alpha^2),\qquad C_j=\text{const}\qquad (j=1,2,3,4)$$

Оценивая далее интеграл в выражении B_{lk} методом Лапласа при l, $k\to+\infty$ имеем

$$\|\mathbf{B}_{lk}\|=\sum_{p,s=1}^{2}|B_{lk}^{ps}|<\frac{C(l+k+2)!}{h(k+1)!\,l!\,(2h)^{l+k+2}}$$

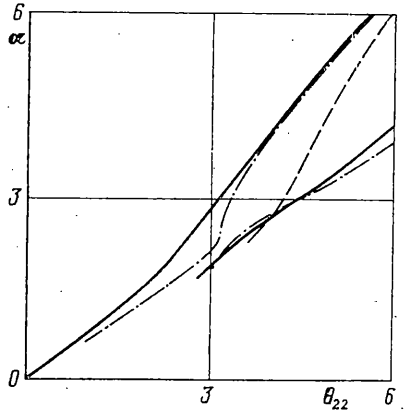
Отсюда $\Sigma_{l,k=0}^{\infty}\|\mathbf{B}_{lk}\|$ мажорируется рядом (C — некоторая константа):

$$\frac{C}{h}\sum_{l,k=0}^{\infty}\frac{(l+k)!}{k!\,l!\,(2h)^{k+l}}=\frac{C}{h-1}\tag{3.1}$$

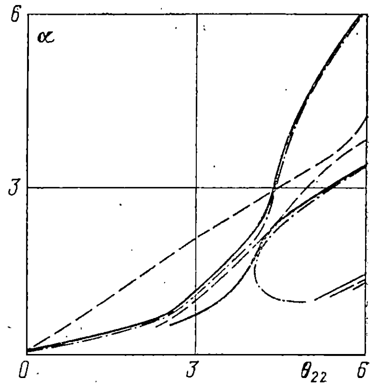
Из оценки (3.1) следует квазивполне регулярность системы (2.6) в пространстве l^2 для полости, целиком погруженной в полупространство ($h>1$). При условии однозначной разрешимости исходной краевой задачи это определяет единственность решения системы (2.6) и возможность применения к ее исследованию метода редукции.

Практический расчет интегралов в (2.7) показывает, что данный метод исследования краевой задачи эффективен для длин продольных волн в среде, больших или соизмеримых с расстоянием (суммирование по j от 1 до N) $H=\Sigma h_j$ (случай мелкого и среднего заложения полости). При глубоком заложении полости решение системы можно получить с использованием асимптотических методов расчета интегралов по методике работы [5].

Аналитическое представление решения краевой задачи позволяет сделать ряд практически важных выводов о генерации волн в полуограниченных средах заглубленными источниками. Так, характеристики поверхностных и пограничных волн, распространяющихся вдоль плоских границ $Z=Z_k$, определяются распределением нулей и полюсов функций $\mathbf{K}_n(\alpha, h_j, \gamma_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})$. Знаменатель $\mathbf{K}_n$ совпадает со знаменателем подынтегральных функций в выражении (1.1), (1.4) для волновых полей



Фиг. 2



Фиг. 3

в слоистой среде без полости. А следовательно, заглубленный источник возбуждает поверхностные и пограничные волны с теми же фазовыми скоростями, что и источник на поверхности слоистого полупространства. Существенная разница достигается лишь за счет изменения свойств числителя $\mathbf{K}_n$. Так для двуслойной среды со сферической полостью при соотношении скоростей $V_{s1}>V_{s2}$, $V_{p1}>V_{p2}$ уменьшение V_{s2}, V_{p2} при фиксированных V_{s1}, V_{p1} и постоянной интенсивности источника приводит к противоположным результатам. Для поверхностного источника амплитуды генерируемых поверхностных и пограничных волн растут, для заглубленного — уменьшаются. Последнее свойство для заглубленной осциллирующей сферы находит свое объяснение в сближении нулей и полюсов выражения $\mathbf{K}_n$ при уменьшении скоростей V_{p2}, V_{s2}. На фиг. 2, 3 показано поведение кривых нулей и полюсов функции K_0^{11} при следующих параметрах $\gamma=V_{s2}/V_{s1}=V_{p2}/V_{p1}=0{,}6$ для фиг. 2 и $\gamma=0{,}2$ для фиг. 3. При этом, распределение нулей и полюсов функции K_0^{11} не зависит от глубины залегания полости в полупространстве, а находится в зависимости от соотношения упругих характеристик среды и толщины слоя. Сплошной линией нанесены кривые полюсов. Штриховой — нули $M_{11}(\alpha)$ для возбуждения среды с поверхности слоя, штрихпунктирной — нули $K_0^{11}(\alpha)$ при возбуждении среды осциллирующей полостью. Аналитическое представление решения через коэффициенты $Y_m^{(n)}$ позволяет также рассмотреть трансформацию гармонических волн при отражении от границ области, а также разделение по типам волн в дальней от источника колебаний зоне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шульга Н. А.* Дифракция волн на круговых препятствиях в полуплоскости // Прикл. механика, 1969. Т. 5. № 5. С. 115–119.
2. *Алексеева Л. А.* О колебаниях упругой полуплоскости, ослабленной круговым отверстием // Изв. АН КазССР. Сер. Физ.-Мат., 1984. № 1. С. 1–5.
3. *Головченко А. В.* Крутильные колебания полупространства со сферической полостью круговым штампом // Математические методы анализа динамических систем. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1985. С. 117–124.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. *Румянцева Т. Г., Селезнева Т. Н., Селезнев М. Г.* Пространственная задача об установившихся колебаниях упругого полупространства со сферической полостью // ПММ, 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 651–656.
6. *Ерофеенко В. Т.* Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах (с одинаковыми началами координат) для некоторых уравнений математической физики // Дифференц. уравнения, 1973. Т. 9. С. 1310–1317.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 27.VI.1989