

УДК 539.3

© 1991 г.

Г. В. ТКАЧЕВ, К. Ф. УСТИНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОГО ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ВОЗБУЖДЕНИИ ТРЕЩИНОЙ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрена неустановившаяся динамическая смешанная краевая задача теории упругости, предложен метод ее решения и приведены результаты численного анализа. Для решения аналогичных установившихся задач, например таких, как задач определения волновых полей в упругом полугограниченном теле, вызванных гармоническими колебаниями берегов заглубленной трещины, разработано большое количество эффективных методов. Решение же неустановившихся задач для произвольных во времени нагрузок, приложенных к берегам трещины, сталкивается с большими трудностями даже в простейшем случае — при антиплоской постановке задачи. Имеющиеся в настоящее время методы решения таких задач (за исключением чисто численных методов) достаточно полно изложены в монографиях [1–3] и в работах, библиография которых приведена там же. Однако, заложенные с самого начала упрощающие предположения, такие как рассмотрение всего пространства, исследование автомоделных режимов, использование аналогов лучевых методов и др. весьма затрудняют распространение результатов на более сложные случаи (много-слойные среды, системы трещин, нагрузки, заданные и на трещине и на границе среды и др.), что без особого труда удастся осуществить с помощью предложенной здесь методики.

Рассмотренная ниже задача возникла в связи с проблемами сейсмологии по определению параметров очага землетрясения, имеющего существенно неустановившийся характер, а также акустической эмиссии, используемой для сигнализации о наличии дефекта и определении его местоположения в процессе испытания и работы конструкций ответственного назначения. Характерные особенности полученного решения задачи, проиллюстрированные на графиках, дают возможность делать заключения о параметрах очага колебаний в среде и о его местоположении.

Рассматривается антиплоская динамическая задача о трещине в упругом полупространстве. Полупространство занимает область $|x_0, y_0| \leq \infty$, $z_0 \leq 0$, а трещина имеет вид математического разреза $|x_0| \leq a$, $|y_0| \leq \infty$, $z_0 = -d_0$, расположенного параллельно границе полупространства на расстоянии d_0 от нее. Перемещения точек упругой среды, направленные только вдоль одной оси OY , удовлетворяют уравнению движения $(\partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial z_0^2 - b^{-2}\partial^2/\partial t_0^2)v_0(x_0, z_0, t_0) = 0$, где b — скорость распространения поперечных волн в среде.

Касательные напряжения на поверхности полупространства равны нулю. На трещине граничные условия для разных случаев задаются исходя из следующих соображений:

1. При моделировании очага землетрясения считается, что на берегах разреза, находящихся в жестком контакте друг с другом, заданы достаточно большие известные касательные напряжения. В момент времени $t_0 = 0$ в среде происходит вскрытие трещины, в результате чего под действием имеющихся напряжений ее берега начинают скользить друг относительно друга. За счет этого в течение промежутка времени $[0, T]$ приложенные напряжения убывают по известному закону от своих максимальных значений до нуля.

Использование принципа суперпозиции позволяет в дальнейшем свести эту задачу к двум: задаче с постоянными во времени касательными напряжениями $\tau_{\max}$ на берегах разреза и задаче с напряжениями, меняющимися в течение промежутка времени $[0, T]$ от 0 до $\tau_{\max}^0$, а затем остающимися такими. Разность решений этих двух задач является решением исходной задачи. В работе рассматривается только задача с граничными условиями второго типа.

2. При моделировании источника взрывного типа на берегах разреза по известному закону задаются напряжения, изменяющиеся в течение промежутка времени $[0, T]$ от нуля до некоторого максимального значения $\tau_{\max}^0$, а затем опять убывающие до нуля. При этом зависимость изменения напряжения от времени может быть произвольной. Во всех случаях для простоты берутся нулевые начальные условия.

Применение интегральных преобразований Лапласа по времени t_0 и Фурье по координате x_0 , а также использование свойств интегральных преобразований от свертки двух функций позволяет свести решение краевой задачи к решению интегрального уравнения вида

$$\int_0^t dT \int_{-1}^1 \Phi(T, \xi) k(t-T, x-\xi) d\xi = F(t, x) \quad (|x| \leq 1, t \geq 0) \quad (1)$$

$$\Phi(T, \xi) = (\partial^2 / \partial \xi^2 - \partial^2 / \partial T^2) \Delta v(T, \xi)$$

где $\Delta v(T, \xi) = v_+(T, \xi) - v_-(T, \xi)$ — разность смещений верхнего (v_+) и нижнего (v_-) берегов трещины.

Правая часть уравнения (1) имеет вид

$$F(t, x) = \tau_+(t, x) - \int_0^t dT \int_{-1}^1 \Delta \tau(T, \xi) k^*(t-T, x-\xi) d\xi \quad (2)$$

где $\tau_+(t, x)$ — известное напряжение на верхнем берегу, $\Delta \tau(t, x) = \tau_+(t, x) - \tau_-(t, x)$ — известная разность напряжений на берегах трещины. Ядро $k(t-T, x-\xi)$ имеет вид

$$k(t-T, x-\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-\xi)} d\alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K(s, \alpha) e^{s(t-T)} ds \quad (3)$$

$$K(s, \alpha) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda d}) / \lambda, \quad \lambda = (s^2 + \alpha^2)^{1/2} \quad (4)$$

Поведение на бесконечности функции $K(s, \alpha)$ как $K(s, \alpha) = o((s^2 + \alpha^2)^{-1/2})$ ($s, \alpha \rightarrow \infty$) обеспечивает существование оригинала ядра $k(t-T, x-\xi)$. Такое же, как (3) соотношение связывает функции $k^*(t-T, x-\xi)$ и $K^*(s, \alpha)$, где $K^*(s, \alpha) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda d})$. Выражения (1)–(4) записаны в безразмерных переменных

$$x = x_0/a, \quad t = bt_0/a, \quad d = d_0/a, \quad v = v_0/\mu a, \quad \tau = \tau^0/\mu \quad (5)$$

где μ — модуль сдвига материала полупространства, $2a$ — ширина трещины.

Волновое поле на поверхности полупространства выражается через решение $\Phi(t, x)$ уравнения (1) и задается формулой

$$v(t, x) = \int_0^t dT \int_{-1}^1 [\Phi(T, \xi) k_0(t-T, x-\xi) - \Delta \tau(T, \xi) k_0^*(t-T, x-\xi)] d\xi \quad (6)$$

причем подынтегральные выражения $K_0(s, \alpha)$ и $K_0^*(s, \alpha)$, связанные с ядрами $k_0(t-T, x-\xi)$, $k_0^*(t-T, x-\xi)$ соотношением (3), имеют вид

$$K_0(s, \alpha) = -e^{-\lambda d}/\lambda^2, \quad K_0^*(s, \alpha) = e^{-\lambda d}/\lambda$$

Решение интегрального уравнения (1) типа Вольтерра первого рода с ядром $k(t-T, x-\xi)$ (3), (4) и правой частью (2) производится следующим численно-аналитическим методом.

На основе свойства интегрального уравнения типа Вольтерра, заключающегося в том, что решение его в каждый момент времени зависит только от предыдущих моментов времени, в уравнении (1) осуществляется разбиение временного отрезка интегрирования $[0, t]$ на части точками t_n , $n=0, 1, \dots, N$ ($t_0=0, \dots, t_N=t$) и перенос вправо интегралов по всем, кроме последнего, полученным отрезкам. Замена на каждом таком отрезке $[t_{n-1}, t_n]$ неизвестной функции $\Phi(T, \xi)$ ее значением $\Phi(t_n^*, \xi)$ в промежуточной точке $t_n^* \in [t_{n-1}, t_n]$ позволяет приближенно записать уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi(t_N^*, \xi) d\xi \int_{t_{N-1}}^{t_N} k(t_N-T, x-\xi) dT &= \Psi(t_N, x) \\ \Psi(t_N, x) &= F(t_N, x) - \sum_{n=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \Phi(t_n^*, \xi) d\xi \int_{t_{n-1}}^{t_n} k(t_N-T, x-\xi) dT \end{aligned} \quad (7)$$

причем для $N=1$ получим $\Psi(t_1, x) = F(t_1, x)$.

Решив уравнение (7) для $N=1$ и найдя на отрезке $[t_0, t_1]$ значение $\Phi(t_1^*, x)$, на следующем отрезке $[t_1, t_2]$ следует решать уравнение (7) с правой частью

$$\Psi(t_2, x) = F(t_2, x) - \int_{-1}^1 \Phi(t_1^*, \xi) d\xi \int_{t_0}^{t_1} k(t_2-T, x-\xi) dT$$

выраженной через уже найденное $\Phi(t_1^*, \xi)$ и так далее.

Для приближенного решения полученного уравнения (7) используется метод Галеркина¹. Для этого, задавшись целым числом M , на каждом временном промежутке $[t_{n-1}, t_n]$ отрезок интегрирования $[-1, 1]$ разбивается на M частей с шагом h точками x_m , $m=0, 1, \dots, M$ ($x_0=-1, \dots, x_M=1$). С каждой точкой x_m для $m=2, 3, \dots, M-1$ связывается координатная функция

$$\psi_m(x) = \begin{cases} 1 - |x - x_m|/h, & x \in [x_m - h, x_m + h] \\ 0, & x \notin [x_m - h, x_m + h] \end{cases}$$

а в крайних точках области для $m=0$ и $m=M$ из-за наличия особенности у функции $\Phi(t^*, x)$ на краях трещины (т. е. при $|x|=1$) в качестве координатных функций вводятся функции

$$\psi_m(x) = \begin{cases} (1 - |x - x_m| h^{-1})(1 - |x|)^{-1/2}, & x \in [-1, -1+h] \cup [1-h, 1] \\ 0, & x \notin [-1, -1+h] \cup [1-h, 1] \end{cases}$$

¹ Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости. Препринт № 33. М.: ИПМ АН СССР, 1973.

Приближенное решение уравнения (7) на каждом n -м временном промежутке $[t_{n-1}, t_n]$ ищется в виде суммы

$$\Phi(t_n^*, x) = \sum_{m=0}^M C_{m,n} \psi_m(x)$$

причем неизвестные коэффициенты $C_{m,n}$ определяются методом коллокаций.

В результате решение исходной краевой задачи сводится к решению на каждом временном промежутке $[t_{n-1}, t_n]$ алгебраической системы уравнений вида

$$\sum_{m=0}^M C_{m,n} B_m(t_n, x_j) = \Psi(t_n, x_j) \quad (n=1, 2, \dots, N, j=0, 1, \dots, M) \quad (8)$$

$$B_m(t_n, x_j) = \int_{-1}^1 \psi_m(\xi) d\xi \int_{t_{n-1}}^{t_n} k(t_n - T, x_j - \xi) dT$$

Система (8) хорошо обусловлена, что связано с трехдиагональным видом матрицы ее коэффициентов. Дело в том, что для неустановившейся динамической задачи в системе (8) в каждой j -й строке будут отличными от нуля только коэффициенты $B_m(t_n, x_j)$, соответствующие финитным координатным функциям $\psi_m(x)$, определенные на области $[x_j - \Delta t_n, x_j + \Delta t_n]$, которую за время $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ пробегает передний фронт волны, возбужденной в точке x_j в момент времени t_{n-1} . При условии, что шаг по времени Δt меньше шага по пространственной координате h , волна не выходит за пределы области $[x_j - h, x_j + h]$, в результате чего в j -й строке будут отличны от нуля только $B_{j-1}(t_n, x_j)$, $B_j(t_n, x_j)$, $B_{j+1}(t_n, x_j)$, причем коэффициент $B_j(t_n, x_j)$ на порядок больше двух других. В монографии [4] приводятся результаты и ссылки на исследования, на основе которых гарантируется сходимость подобных вычислительных схем, связанных с дискретизацией пространственно-временной области, если отношение $\Delta t/h^2$ не превышает 0,5.

Наконец следует отметить, что решение системы (8) будет наиболее эффективным тогда, когда ее коэффициенты $B_m(t_n, x_j)$ смогут быть представлены явными аналитическими выражениями, а не в виде квадратур. По таблицам интегральных преобразований [5] находится оригинал ядра (3) в явном виде

$$k(t-T, x-\xi) = \frac{H(t-T-|x-\xi|)}{2((t-T)^2 - (x-\xi)^2)^{1/2}} - \frac{H(t-T-2d)H((t-T)^2 - 4d^2)^{1/2} - |x-\xi|}{2((t-T)^2 - (x-\xi)^2 - 4d^2)^{1/2}} \quad (9)$$

$$H(x-y) = 1, \quad x \geq y; \quad H(x-y) = 0, \quad x < y$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, после чего вычисление коэффициентов $B_m(t_n, x_j)$ системы (8) не представляет труда.

Для численной реализации рассматривается случай, когда к трещине приложена самоуравновешенная нагрузка. Тогда $\Delta \tau(t, x)$ обращается в нуль и правая часть уравнения (1) принимает совсем простой вид $F(t, x) = \tau_+(t, x)$.

Решение интегрального уравнения (1) проводится по указанной выше схеме.

Для определения волнового поля на поверхности полупространства при сделанных предположениях относительно $\Delta\tau(t, x)$ и использовании свойств свертки двух функций выражение (6) преобразуется к виду

$$v(t, x) = \int_0^t dT \int_{-1}^1 \Phi(T, \xi) k_0(t-T, x-\xi) d\xi$$

$$k_0(t-T, x-\xi) = \frac{1}{2} H((t-T)^2 - (x-\xi)^2 - d^2) \int_{-1}^1 \ln |R(t-T, x-\xi, u)| \frac{du}{1-u^2}$$

$$R(t-T, x-\xi, u) = \frac{t-T-(x-\xi)u - ((t-T)^2 - (x-\xi)^2 - d^2)^{1/2} (1-u^2)^{1/2}}{t-T-(x-\xi)u + ((t-T)^2 - (x-\xi)^2 - d^2)^{1/2} (1-u^2)^{1/2}} \quad (10)$$

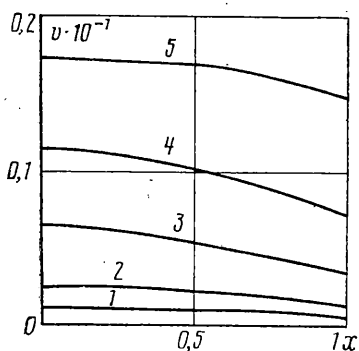
Непосредственное исследование выражений (9), (10) позволяет сделать следующие заключения.

При решении интегрального уравнения (1) для первых моментов времени разность смещений берегов трещины в каждой точке с координатой $x \in [-1, 1]$ определяется только полем напряжений той части трещины, от которой волна успевает дойти до исследуемой точки за рассматриваемое время. Скорость волны равна единице (b — в размерных переменных) и поэтому часть трещины, вызывающая возмущения в точке x , будет занимать область $[x-t, x+t]$ (все величины безразмерны согласно (5)). В этом случае в выражении для ядра (9) отлично от нуля только первое слагаемое. Начиная с момента $t=2d$ в рассматриваемую точку x приходит волна напряжений, излученная трещиной и отраженная от границы полупространства. Теперь дополнительно к предыдущему в формировании искомой разности перемещений начинает играть роль еще и та часть поверхности трещины, которая излучила эту отраженную волну. Скорость, с которой граница этой области движется вдоль берегов трещины от точки x в обе стороны, равна $\pm t/(t^2-4d^2)^{1/2}$, а сама область охватывает отрезок $[x-(t^2-4d^2)^{1/2}, x+(t^2-4d^2)^{1/2}]$. Теперь в ядре (9) интегрального уравнения (1) отличны от нуля оба слагаемых.

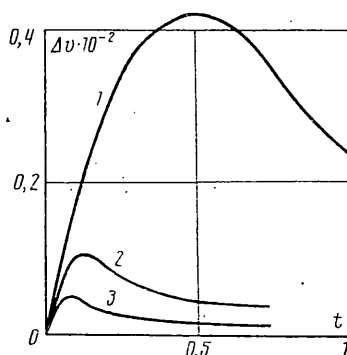
Волновое поле на поверхности полупространства формируется следующим образом: для времен $t < d$ вся поверхность полупространства находится в покое. Начиная с момента $t=d$ во всей области $x \in [-1, 1]$ над трещиной появляются возмущения, причем смещения точки с координатой x определяются излучением той части берегов трещины, которая занимает область $[x-(t^2-d^2)^{1/2}, x+(t^2-d^2)^{1/2}]$ для момента времени t . Вправо и влево от точек $x=\pm 1$ по поверхности полупространства начинает бежать волна, передний фронт которой имеет координату $|x|=1+(t^2-d^2)^{1/2}$ ($t > d$). Этот фронт определяется возмущениями, распространяющимися по прямой от ближайшего к данной точке конца трещины. Полученный фронт будет единственным, что следует как из формулы (10), так и из самой постановки антиплоской задачи, не позволяющей получить поверхностную волну типа Релевской, а также рассматривать трансформации продольных и поперечных волн.

Результаты расчета на ЭВМ амплитуд волновых полей приведены на фиг. 1–5. Рассматривались две задачи: исследование возмущений, вызванных сейсмическим источником — задача 1 и взрывным источником — задача 2. Все результаты приведены в безразмерных переменных (5).

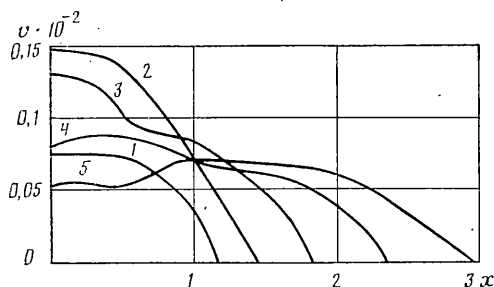
Фиг. 1, 2 иллюстрируют результаты решения задачи 1. В этом случае к берегам трещины в течение времени $[0; 0,04]$ прилагались касательные напряжения, растущие по линейному закону от 0 до значения $\tau_{\max}=0,006$. Для всех последующих времен напряжения оставались равными $\tau_{\max}$. На фиг. 1 кривым 1–5 соответствуют амплитуды смещений поверхности полупространства в зависимости от координаты x



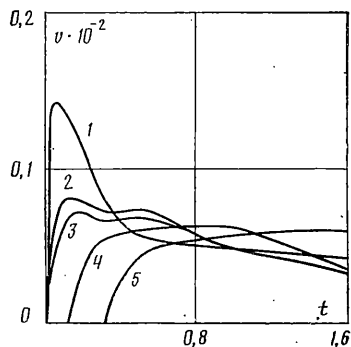
Фиг. 1



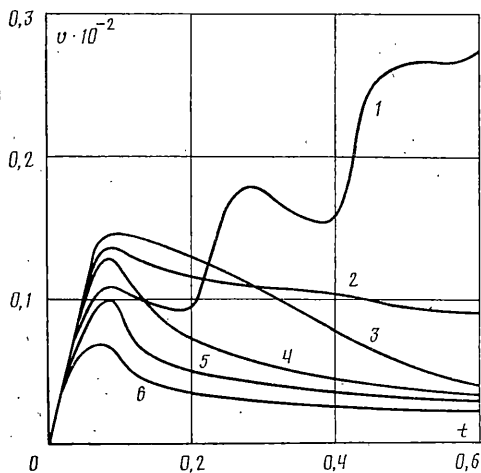
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

для значений времени $t_1=0,04$; $t_2=0,08$; $t_3=0,2$; $t_4=0,4$; $t_5=0,8$. Трещина находится на расстоянии одной своей длины ($d=2$) от поверхности полупространства и поэтому для времен $t < 2$ поверхность полупространства находится в покое. В силу симметрии расположения трещины (от $x=-1$ до $x=1$) относительно оси OZ все графики приведены только для $x \geq 0$.

Неравномерность смещений во времени точек поверхности полупространства над трещиной наглядно отражена на фиг. 2. На этой фигуре приведены графики зависимости от времени разности амплитуд смещений двух точек поверхности с координатами $x=0$ и $x=1$ ($\Delta v = v(0) - v(1)$). Кривые 1, 2, 3 соответствуют расстояниям трещины от поверхности полупространства равным соответственно 1; 5; 10 длинам

трещины. Из фигуры видно, что сначала перемещения поверхности над центром трещины ($x=0$) «обгоняют» смещения над краем ($x=1$) (значения разности увеличиваются), а затем смещения краев «догоняют» смещения над центром (разность убывает). Наибольший максимум разности достигнут при заглублении трещины на расстояние, равное одной своей длине и убывает, когда трещина смещается дальше от поверхности. Следует отметить, что такая же картина наблюдается для разности амплитуд любых двух точек над трещиной (не симметричных относительно OZ), поэтому она может служить характеристикой относительного заглубления трещины.

Фиг. 3–5 относятся к результатам решения задачи 2. В этом случае на берегах трещины заданы касательные напряжения, которые в течение промежутка времени $[0; 0,04]$ растут по линейному закону от 0 до $\tau_{\max}=0,006$, а затем в течение времени $[0,04; 0,08]$ убывают по тому же закону до 0, оставаясь такими все дальнейшее время. На фиг. 3 цифрами 1–5 обозначены графики амплитуд смещений поверхности полупространства в зависимости от x для времен $t_1=0,04$; $t_2=0,08$; $t_3=0,2$; $t_4=0,4$; $t_5=0,8$. Трещина находится от поверхности полупространства на глубине равной одной своей длине ($d=2a=2$) вследствие чего для времен $t<2$ поверхность неподвижна.

На фиг. 4 приведены графики 1–5 амплитуд смещений поверхности в зависимости от времени t для точек с координатами $x_1=0$ (над центром трещины); $x_2=1$ (над ее концом); $x_3=1,1$; $x_4=1,7$; $x_5=2,25$ (за пределами трещины) для расстояния трещины от поверхности $d=2a=2$. Ясно видно, что смещения точек над трещиной носят колебательный характер, а смещения точек достаточно удаленных от трещины имеют только один ярко выраженный максимум. При этом каждый всплеск амплитуды смещений в точке над трещиной соответствует приходу фронта очередной отраженной волны (см. также фиг. 5). В точках, выходящих за пределы области, расположенной над трещиной, смещения начинаются с момента прихода волнового фронта от ближайшего конца трещины и растут до прихода возмущений от самой дальней точки трещины, после чего монотонно убывают (кривые 4, 5 на фиг. 4). По этим результатам можно уверенно заключить, находится ли точка, для которой получена приведенная кривая над трещиной или за ее пределами.

Зависимость амплитуд смещений от времени для различных заглублений трещины в точке поверхности полупространства с координатой $x=0$ проиллюстрирована на фиг. 5. Кривые 1–6 соответствуют расстоянию трещины от поверхности равному 0,05; 0,25; 1; 4; 8; 16 ее длины. Численный анализ показал, что для глубин от 1 до 2 длин трещины наблюдается абсолютный максимум первого всплеска амплитуды смещения (кривая 3). Эти графики построены для относительных времен, где за $t=0$ бралось время прихода в точку $x=0$ переднего фронта возмущений от трещины.

Результаты численного анализа достаточно наглядно показывают как возможности, так и способы определения местоположения дефекта в материале по наблюдаемым значениям волновых полей на поверхности среды и, кроме того, позволяют хотя бы приблизительно судить о характере процесса, обусловившего появление возмущений на поверхности этой среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 343 с.
2. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
3. Сеймов В. М., Островерж Б. Н., Ермоленко А. И. Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений. Киев.: Наук. думка, 1983. 318 с.
4. Венерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.V.1989