

УДК 539.3

© 1991 г.

А. Б. МОВЧАН, С. К. СЕРКОВ

МАТРИЦЫ УПРУГОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В задачах проектирования композиционных материалов, исследования напряженно-деформированного состояния упругих тел с микродефектами часто встает вопрос об определении «дальних полей» деформаций, порожденных наличием малых полостей или включений. В настоящей работе строятся матрицы упругой поляризации, элементы которых суть коэффициенты в асимптотике на бесконечности специальных возмущающих полей смещений, соответствующих некоторому дефекту в упругой плоскости. Рассмотрение проводилось на примерах различных многоугольных полостей. Задачи для трещины в упругом пространстве и систем трещин рассмотрены в [1, 2], где определены закономерности образования плоских и пространственных структур разрушения. В [3] введены матричные характеристики, описывающие «дальние поля» деформаций вокруг полости или включения в неограниченной упругой среде, определены тензоры упругой емкости, поляризации, присоединенной деформации, дающие наиболее простые канонические представления для ряда важных механических величин, таких как приращение энергии при появлении в упругой среде микродефекта, эффективные упругие модули периодического композита, раскрытие трещины в упругом материале. Для задач дифракции упругих волн упомянутые матричные характеристики введены в [4]. Отметим, что тензоры упругой емкости, поляризации, присоединенной деформации для задач теории упругости являются аналогами таких классических интегральных характеристик областей, как гармоническая емкость, тензоры поляризации и виртуальной массы, введенных при исследовании краевых задач для оператора Лапласа в [5].

1. Постановка задачи. Основные положения. Рассмотрим упругую плоскость, содержащую конечную полость G с кусочно гладкой границей и обозначим $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$. Отыскивается убывающее на бесконечности поле смещений \mathbf{u} , удовлетворяющее двумерной системе Ламе в Ω :

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

и краевым условиям

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{n} — внутренняя единичная нормаль к ∂G , λ и μ — постоянные Ламе, \mathbf{p} — гладкая самоуравновешенная нагрузка.

Задача в такой постановке возникает при исследовании напряженно-деформированного состояния конечной плоской области, ослабленной малым отверстием, на шаге построения пограничного слоя в окрестности полости [3].

Из результатов [6] следует, что для убывающего на бесконечности решения задачи (1.1) — (1.2) справедливо представление

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 c_j \mathbf{V}^{(j)} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{T}(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

Здесь \mathbf{T} — тензор Сомильяны, c_j — скалярные постоянные. Вектор-функции $\mathbf{V}^{(j)}$ имеют вид $\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{x}) = (x_1, 0)$, $\mathbf{V}^{(2)}(\mathbf{x}) = (0, x_2)$, $\mathbf{V}^{(3)}(\mathbf{x}) = 2^{-1/2}(x_2, x_1)$ и образуют базис в пространстве однородных линейных векторных полиномов $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, подчиненных условию $\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0$.

Постоянные c_j определяются равенствами $c_j = \int_{\partial G} \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{U}^{(j)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, где $\mathbf{U}^{(j)}$ — специальные векторные поля, удовлетворяющие однородной задаче (1.1)–(1.2) и представимые в виде $\mathbf{U}^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^{(j)}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}^{(j)}(\mathbf{x})$. Вектор-функции $\mathbf{W}^{(j)}$, компенсирующие невязку $\mathbf{V}^{(j)}$ в краевых условиях, на бесконечности характеризуются асимптотикой

$$\mathbf{W}^{(j)}(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^3 P_{jh} \mathbf{V}^{(h)} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{T}(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{-2}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

Симметрическая матрица $\|P_{jh}\|_{j,k=1}^3$ называется матрицей упругой поляризации [3].

Матрица упругой поляризации, отвечающая конечной полости в условиях плоской деформации имеет вид

$$\|P_{jk}\|_{j,k=1}^3 = A \begin{vmatrix} 2h_r - \Sigma & \Xi & h_i \\ \Xi & -2h_r - \Sigma & h_i \\ h_i & h_i & -2\mu(\lambda + \mu)^{-1} |c_{-1}|^2 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

$$A = 2\pi(\lambda + 2\mu), \quad h_r = \operatorname{Re}(c_1 c_{-1}), \quad h_i = \operatorname{Im}(c_1 c_{-1})$$

$$\Sigma = (\lambda + \mu)(2\mu)^{-1} (|c_1|^2 + |c_{-1}|^2) + \mu(\lambda + \mu)^{-1} |c_{-1}|^2$$

$$\Xi = \mu(2(\lambda + \mu))^{-1} (|c_{-1}|^2 - |c_1|^2) - \lambda(\lambda + 2\mu)(2\mu(\lambda + \mu))^{-1} (|c_1|^2 + |c_{-1}|^2)$$

Здесь c_j — коэффициенты в представлении

$$z = f(\zeta) = c_{-1}\zeta^{-1} + c_0 + c_1\zeta + \dots \quad (1.4)$$

функции, конформно отображающей единичный круг $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: |\mathbf{x}| < 1\}$ на область Ω .

Имеет место следующая

Теорема. Пусть конформное отображение единичного круга на область $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$ задается равенством (1.4). Тогда матрица поляризации, соответствующая Ω , совпадает с матрицей поляризации области Ω_0 , на которую единичный круг отображается функцией

$$z = f_0(\zeta) = c_{-1}\zeta^{-1} + c_1\zeta \quad (1.5)$$

Замечание. Отметим, что Ω_0 — внешность эллипса, повернутого относительно координатных осей на угол $\alpha = 1/2(\arg c_1 + \arg c_{-1})$ полуоси эллипса $a = |c_1| + |c_{-1}|$, $B = |c_{-1}| - |c_1|$.

Целью настоящей работы является построение матриц упругой поляризации некоторых многоугольных областей.

2. Многоугольные области. Представление (1.3) матрицы упругой поляризации требует коэффициенты c_1, c_{-1} конформного отображения (1.4). Для многоугольных областей воспользуемся известной [7] формулой Кристоффеля — Шварца

$$f(\zeta) = C \int \prod_{i=1}^N (t - a_i)^{\alpha_i - 1} \frac{dt}{t^2}, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = N + 2 \quad (2.1)$$

С использованием приближенных конформных отображений определяются компоненты матриц упругой поляризации произвольных треугольных и четырехугольных полостей. Отметим, что в [8] приведены приближенные конформные отображения внутренности единичного круга на внешность прямоугольника и правильного многоугольника.

Рассмотрим сначала плоскость с треугольным отверстием, вершины которого $M(m_1, m_2)$, $N(n_1, n_2)$, $P(p_1, p_2)$, а внешние углы $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$. Формула (2.1) принимает вид

$$f(\xi) = C \int_1^{\xi} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{a_2}{t}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{a_3}{t}\right)^{\gamma-1} dt \quad (2.2)$$

Следуя [8], подынтегральную функцию разложим в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, проведем инверсию и выпишем формулу для конформного отображения единичного круга на внешность эллипса, эквивалентного исходной области относительно матрицы поляризации.

$$f_0(\xi) = c_{-1}\xi^{-1} + c_1\xi \quad (2.3)$$

При выборе преобразов вершин треугольника используется условие отсутствия слагаемого вида $c \ln \xi$ в разложении (2.3):

$$(\alpha-1)a_1 + (\beta-1)a_2 + (\gamma-1)a_3 = 0, \quad |a_j| = 1 \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Будем считать $\arg a_3 = 0$, тогда

$$\arg a_1 = \arccos \frac{(\beta-1)^2 - (\gamma-1)^2 - (\alpha-1)^2}{2(\alpha-1)(\gamma-1)},$$

$$\arg a_2 = -\arccos \frac{(\alpha-1)^2 - (\beta-1)^2 - (\gamma-1)^2}{2(\gamma-1)(\beta-1)}$$

и формула (2.3) преобразуется к виду

$$f_0(\xi) = C(1/\xi + \{a_3^2(-\gamma^3 + 3\gamma - 2) + a_2^2(-\beta^2 + 3\beta - 2) + a_1^2(-\alpha^2 + 3\alpha - 2) + 2(a_3a_2(\beta-1)(1-\gamma) + a_3a_1(\alpha-1)(1-\gamma) + a_2a_1(\alpha-1)(1-\beta))\}\xi/2) \quad (2.5)$$

Постоянная C , отвечающая за поворот и равномерное растяжение, определяется равенством

$$C = (n_1 - m_1 + i(n_2 - m_2)) \left(\int_{a_1}^{a_2} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{a_2}{t}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{a_3}{t}\right)^{\gamma-1} dt \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Тем самым определены коэффициенты при ξ и ξ^{-1} в представлении конформного отображения единичного круга на плоскость с треугольной полостью. Далее с использованием (1.3) определяются компоненты матрицы упругой поляризации.

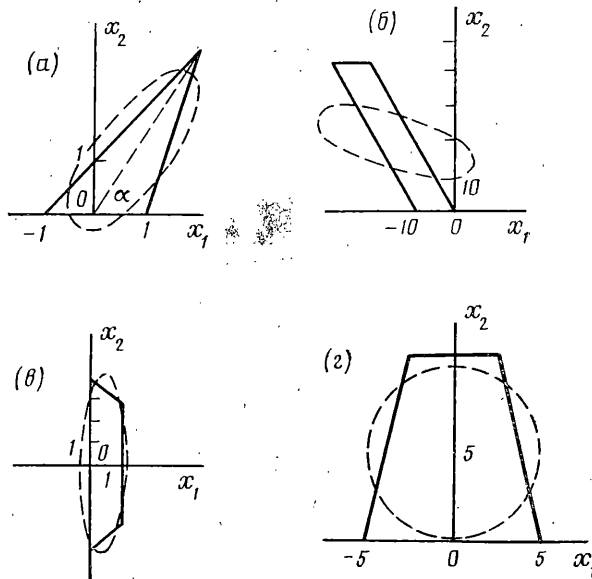
Аналогично проведем рассмотрение при построении матриц упругой поляризации, отвечающих четырехугольным отверстиям.

Для четырехугольника с внешними углами $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ имеем

$$f(\xi) = C \int_1^{\xi} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{a_2}{t}\right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{a_3}{t}\right)^{\gamma-1} \left(1 - \frac{a_4}{t}\right)^{\delta-1} dt \quad (2.7)$$

Преобразы вершин a_1, a_2, a_3, a_4 удовлетворяют условиям

$$(\alpha-1)a_1 + (\beta-1)a_2 + (\gamma-1)a_3 + (\delta-1)a_4 = 0, \quad |a_i| = 1 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2.8)$$



Фиг. 1

В частности, для прямоугольного отверстия ($\alpha=\beta=\gamma=\delta=1,5$) приближенное конформное отображение приведено в [8]. В этом случае $a_1=e^{h\pi i}$, $a_2=e^{(2-h)\pi i}$, $a_3=e^{(1+h)\pi i}$, $a_4=e^{(1-h)\pi i}$:

$$f(\xi) = C(1/\xi + 1/2(a+\bar{a})\xi + 1/24(a-\bar{a})^2\xi^3 + \dots), \quad a=e^{2h\pi i} \quad (2.9)$$

Число k характеризует отношение сторон прямоугольника ($k=1/4$ отвечает квадрату). Для отверстия в форме параллелограмма $\gamma=\alpha$, $\beta=\delta=3-\alpha$. Преобразы вершин могут быть определены равенствами $a_1=-a_3=1$, $a_2=-a_4=e^{i\varphi}$; (2.7) преобразуется к виду $f(\xi) = C(1/\xi + (e^{2i\varphi}(2-\alpha) + \alpha - 1)\xi + \dots)$. Отношение p сторон параллелограмма, углы φ и α связаны равенством

$$p = (f(e^{i\varphi}) - f(-1)) (f(1) - f(e^{i\varphi}))^{-1} e^{i\alpha}$$

Аналогично, для трапеции с углами $\delta=\alpha$, $\beta=\gamma=3-\alpha$ имеем $a_1=\bar{a}_4=e^{i\varphi}$, $a_2=\bar{a}_3=e^{i\varphi_1}$, $\varphi_1 = \arccos((\alpha-1)(\alpha-2)^{-1} \cos \varphi)$. Угол φ характеризует отношение p оснований трапеции $p = (f(e^{i\varphi}) - f(e^{-i\varphi})) (f(e^{i\varphi_1}) - f(e^{-i\varphi_1}))^{-1}$. Справедливо представление

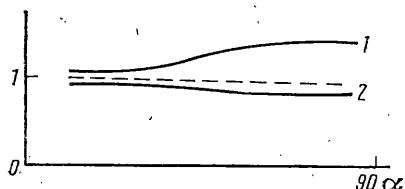
$$f(\xi) = C(1/\xi + \{(-\alpha^2 + 3\alpha - 2)((a_1 - a_2)^2 + (a_1^{-1} - a_2^{-1})^2 - 2(a_1^{-1}a_2 + a_1a_2^{-1}) - 4) - 2\}\xi/2 + \dots)$$

На основе приведенных выше приближенных конформных отображений и представления (1.3) определяются компоненты матрицы упругой поляризации и параметры эквивалентного эллипса.

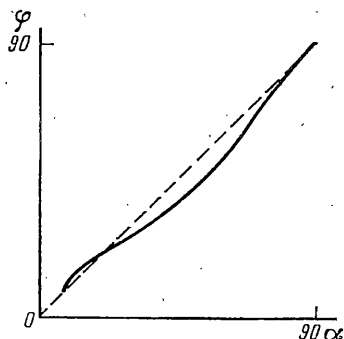
3. Примеры. Составлены и реализованы на ЭВМ FORMAC-программы для определения компонент матрицы поляризации и вычисления параметров эквивалентного эллипса. Ниже приведены результаты расчетов для конкретных треугольных и четырехугольных полостей. Указаны координаты вершин многоугольника, длины полуосей a , b и угол φ между большой осью эквивалентного эллипса и осью абсцисс. Приведены компоненты матрицы упругой поляризации. На фиг. 1 изображены исходные полости и эквивалентные им эллипсы.

$$(a) (-1; 0), (1; 0), (2; 3); a=1,999, b=0,583, \varphi=64^\circ$$

$$P_{11} = 2\pi(\lambda + 2\mu)(1,828 - 1,084(\lambda + \mu)\mu^{-1} - 1,667\mu(\lambda + \mu)^{-1})$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$P_{22}=2\pi(\lambda+2\mu)(-1,828-1,084(\lambda+\mu)\mu^{-1}-1,667\mu(\lambda+\mu)^{-1})$$

$$P_{12}=2\pi(\lambda+2\mu)(-2,168\lambda(\lambda+\mu)^{-1}+0,583\mu(\lambda+\mu)^{-1}-1,084\lambda^2[\mu(\lambda+\mu)]^{-1}), \quad P_{33}=-1,667\mu(\lambda+\mu)^{-1}2\pi(\lambda+2\mu)$$

$$(b) (0; 0), (-10; 0), (-35; 44), (-25; 44)$$

$$a=28,764, \quad b=5,243, \quad \varphi=-29^\circ$$

$$P_{11}=2\pi(\lambda+2\mu)(400-213,727(\lambda+\mu)\mu^{-1}-289,139\mu(\lambda+\mu)^{-1})$$

$$P_{22}=2\pi(\lambda+2\mu)(-400-213,727(\lambda+\mu)\mu^{-1}-289,139\mu(\lambda+\mu)^{-1})$$

$$P_{12}=2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)^{-1}(-427,455\lambda+75,411\mu-213,727\lambda^2\mu^{-1})$$

$$P_{33}=-289,139\mu(\lambda+\mu)^{-1}2\pi(\lambda+2\mu)$$

$$(c) (0; 5), (1,97; 3,84), (1,97; -3,84), (0; -5)$$

$$a=5,027, \quad b=1,186, \quad \varphi=90^\circ$$

$$P_{11}=2\pi(\lambda+2\mu)(11,931-6,669(\lambda+\mu)\mu^{-1}-9,652\mu(\lambda+\mu)^{-1})$$

$$P_{22}=2\pi(\lambda+2\mu)(-11,931-6,669(\lambda+\mu)\mu^{-1}-9,652\mu(\lambda+\mu)^{-1})$$

$$P_{12}=2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)^{-1}(-13,340\lambda+2,983\mu-6,669\lambda^2\mu^{-1})$$

$$P_{33}=-9,652\mu(\lambda+\mu)^{-1}2\pi(\lambda+2\mu)$$

$$(d) (5; 0), (-5; 0), (2,7; 10,58), (-2,7; 10,58); \quad a=b=4,8$$

$$P_{11}=P_{22}=-58,3\pi(\lambda+2\mu)((\lambda+\mu)(2\mu)^{-1}-\mu(\lambda+\mu)^{-1})$$

$$P_{12}=29,2\pi(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)^{-1}(\mu-\lambda(\lambda+2\mu)\mu^{-1})$$

$$P_{33}=-58,3\pi(\lambda+2\mu)\mu(\lambda+\mu)^{-1}$$

Вычисление компонент P_{jk} проводилось в системе координат, ориентированной соответственно осям эквивалентного эллипса; $P_{k3}=P_{3k}=0$, $k=1, 2$.

4. Обсуждение. Рассмотрим упругое тело $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, содержащее малую полость G_ε . Приращение потенциальной энергии при появлении в Ω полости G_ε определяется соотношением [3]:

$$\Delta\Pi = \varepsilon^2 \mathbf{P} \mathbf{I}^T + O(\varepsilon^3) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{I} = \{\varepsilon_{11}(\mathbf{u}^{(0)}; 0), \quad \varepsilon_{22}(\mathbf{u}^{(0)}; 0), \quad 2^{1/2}\varepsilon_{12}(\mathbf{u}^{(0)}; 0)\}$$

где $\mathbf{u}^{(0)}$ — поле смещений, отвечающее однородной области Ω . (Для удобства рассуждений считаем, что начало координат содержится внутри G_ε .) Матрица поляризации \mathbf{P} в данном случае является отрицательно определенной, и в соответствии с (4.1) для отверстий, эквивалентных относительно матрицы поляризации, приращение $\Delta\Pi$ потенциальной энергии в

главном одинаково. В результате, [9], площади и периметры плоских областей, эквивалентных относительно матрицы поляризации, отличаются незначительно. Проведенные численные расчеты находятся в соответствии с данным утверждением. На фиг. 2 приведены графики зависимости отношений периметров (кривая 2) и площадей (кривая 1) эллипсов и соответствующих им треугольников (площадь треугольника фиксирована) от угла α наклона медианы к оси абсцисс.

Если область Ω — периодический композит; а ячейка S ($\text{diam } S / \text{diam } \Omega \ll 1$) содержит малое отверстие G_ε ($\varepsilon = \text{diam } G_\varepsilon / \text{diam } S \ll 1$), то матрица $\|A_{ij}^*\|_{i,j=1}^3$ эффективных упругих модулей осредненного материала определяется равенством [3] $A^* = A + \varepsilon^2 P + o(\varepsilon^2)$, где $A_{11} = A_{22} = 2\mu + \lambda$, $A_{12} = A_{21} = \lambda$, $A_{33} = 2\mu$, $A_{k3} = A_{3k} = 0$, $k=1, 2$. Осредненный материал является ортотропным и ориентация плоскостей ортотропии соответствует ориентации осей эллипса, эквивалентного G относительно матрицы поляризации. На фиг. 3 приведен график зависимости угла φ наклона большой оси эллипса от угла α наклона медианы треугольника (см. фиг. 1, а) к оси абсцисс. Составленные программы могут быть использованы при расчете конструкционных материалов и оценке их прочностных характеристик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн Р. В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 111–126.
2. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. Формирование структур разрушения слабо взаимодействующих трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 173–182.
3. Зорин И. С., Мовчан А. В., Назаров С. А. Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.
4. Бабич В. М., Иванов М. И. Длинноволновая асимптотика в задачах распространения упругих волн // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 156. Вып. 16. С. 6–19.
5. Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз. 1962. 336 с.
6. Кондрагьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конечными или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1987. 688 с.
8. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
11.IV.1989