МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1991

УДК 539.3


А. В. ВОВКУШЕВСКИЙ

# ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ ПРИ УЧЕТЕ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Методы решения контактных задач для тел с шероховатыми поверхностями рассматривались в работах [1, 2, 3]. В них деформации микронеровностей, образующих шероховатость, моделируются включением между контактирующими поверхностями некоторого упругого слоя. В публикуемой статье аналогичный подход используется для вариационной постановки в духе задачи Синьорини с трением, причем учитывается податливость слоя по направлениям нормали и касательной. Показано, что включение упругого слоя приводит к качественным изменениям исходной задачи и может рассматриваться как способ ее регуляризации.

1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\sigma_{ij,\,j}+f_i=0, \quad \sigma_{ij}=a_{ijkh}\varepsilon_{kh}, \quad \varepsilon_{kh}={}^1/_2(u_{k,\,h}+u_{h,\,k}) \text{ в } \Omega \tag{1.1}$$

$$S_\sigma\colon\ \sigma_{ij}n_j=F_i; \quad S_u\colon\ u_i=u_i^0 \tag{1.2}$$

$$S_c\colon\ u_n+u_{cn}\leqslant\delta_n, \quad \sigma_n\leqslant 0, \quad (u_n+u_{cn}-\delta_n)\sigma_n=0 \tag{1.3}$$

$$S_c\colon\ |\sigma_t|\leqslant -f\sigma_n \tag{1.4}$$

$$S_c\colon\ \sigma_t(u_t+u_{ct})\leqslant 0, \quad (|\sigma_t|+f\sigma_n)(u_t+u_{ct})=0 \tag{1.5}$$

$$u_{cn}=\rho_n\sigma_n, \quad u_{ct}=\rho_t\sigma_t \tag{1.6}$$

$$u_n=u_in_i, \quad u_t=u_it_i, \quad \sigma_n=\sigma_{ni}n_i, \quad \sigma_t=\sigma_{ni}t_i, \quad \sigma_{ni}=\sigma_{ij}n_j$$

где $u_i$ — компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$, $\sigma_{ij}$ — компоненты напряжений, $\varepsilon_{ij}$ — деформаций, $n_i$, $t_i$ — нормали и касательной к границе $S=S_\sigma\cup\cup S_u\cup S_c$ двумерной области $\Omega$, $\delta_n$ — начальный зазор, $f\geqslant 0$ — коэффициент трения, $u_{cn}$, $u_{ct}$ — обжатие и сдвиг упругого слоя, $\rho_n$, $\rho_t$ — коэффициенты податливости слоя по направлению нормали и касательной.

Считаем, что тензор констант упругости удовлетворяет условиям симметричности и положительной определенности $a_{ijkh}=a_{ijhk}=a_{khij}$, $a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant\alpha_1\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$, $\alpha_1>0$. Кроме этого считаем, что выполняется ряд обычных требований [4], в частности, $\Omega$ — открытое ограниченное множество, граница $S$ регулярна, $f_i\in L^2(\Omega)$, $F_i\in L^2(S_\sigma)$ и так далее. Относительно коэффициентов $\rho_n$ и $\rho_t$ достаточно предположить, что это кусочно-постоянные ограниченные положительные функции на $S_c$. Поясним смысл сформулированных условий на $S_c$. Группа условий (1.3) описывает действие односторонних связей по направлению нормали, (1.4) — условие трения Кулона, (1.5) устанавливает связь между проскальзыванием поверхностей контакта и направлением и величиной касательных напряжений, (1.6) характеризуют податливость упругого слоя.

Условия контакта типа (1.3)—(1.6) при $\rho_t\equiv 0$ (т. е. без учета податливости в касательном направлении) рассматривались в [5], а при $\rho_t=\rho_n\equiv 0$ (без упругого слоя) в [4, 6, 7, 8] и др. работах. При произвольном процессе загружения в (1.5) должны входить скорости проскальзывания поверхностей, что, например, учитывалось в [5, 6]. Сформулированные условия (1.5) справедливы при некоторых предположениях относительно процесса приложения нагрузки, например, при монотонном и пропорциональном возрастании всех нагрузок, заданных перемещений и зазоров.

Односторонние граничные условия (1.3)—(1.6) отличаются от обычно применяемых наличием членов $u_{cn}$ и $u_{ct}$, обозначающих обмятие и сдвиг поверхностных слоев контактирующих поверхностей. Такие местные деформации физически объясняются смятием мелких неровностей поверхностей, закон деформирования (1.6) в первом приближении принимается линейным.

В [9] отмечалось, что традиционная постановка задачи Синьорини с трением некорректна. В общем случае для нее не доказаны теоремы существования и единственности решения. Оказывается, что введение упругого слоя между контактирующими поверхностями позволяет получить указанные результаты при достаточно малом коэффициенте трения.

**2.** Сформулируем вариационную постановку типа Лагранжа. Обозначим тройки функций $[\mathbf{u}, u_{cn}, u_{ct}]=U$, $[\mathbf{v}, v_{cn}, v_{ct}]=V$ и введем множества и соответствующие обозначения

$$W^0=\{\mathbf{v}\,|\,v_i\in H^1(\Omega);\quad v_i=u_i^0 \text{ на } S_u\} \tag{2.1}$$

$$W=\{V\,|\,\mathbf{v}\in W^0;\quad v_{cn},\ v_{ct}\in L^2(S_c);\quad v_n+v_{cn}\leqslant\delta_n \text{ на } S_c\} \tag{2.2}$$

$$a(\mathbf{u},\mathbf{w})=\int\limits_\Omega a_{ijkh}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\,\varepsilon_{kh}(\mathbf{w})\,d\Omega,$$

$$l(\mathbf{w})=\int\limits_\Omega f_iw_i\,d\Omega+\int\limits_{S_\sigma} F_iw_i dS$$

$$\begin{aligned}\Phi(U,V-U)&=a(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u})-l(\mathbf{v}-\mathbf{u})+\\&+\int\limits_{S_c}\left[\frac{1}{\rho_n}u_{cn}(v_{cn}-u_{cn})+\frac{1}{\rho_t}u_{ct}(v_{ct}-u_{ct})\right]dS-\\&-\int\limits_{S_c}f\sigma_n(\mathbf{u})\,(|v_t+v_{ct}|-|u_t+u_{ct}|)\,dS\end{aligned} \tag{2.3}$$

Докажем, что для решения задачи (1.1)—(1.6) справедливо вариационное неравенство

$$\Phi(U,\ V-U)\geqslant 0 \tag{2.4}$$

при $U\in W$ и произвольных $V\in W$. Обычным путем [4] устанавливаем, что

$$a(\mathbf{u},\mathbf{w})-\int\limits_\Omega f_iw_i\,d\Omega=\int\limits_S \sigma_{ni}w_i\,dS \tag{2.5}$$

где $\mathbf{w}=\mathbf{v}-\mathbf{u}$. Учитывая условия на $S_u$ и $S_\sigma$, и добавляя в обе части (2.5) одинаковые члены, получим

$$\begin{aligned}\Phi(U,V-U)=\int\limits_{S_c}\Big[\ &\sigma_nw_n+\frac{1}{\rho_n}u_{cn}w_{cn}+\sigma_tw_t+\frac{1}{\rho_t}u_{ct}w_{ct}-\\&-f\sigma_n(|v_t+v_{ct}|-|u_t+u_{ct}|)\Big]dS\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$w_{cn}=v_{cn}-u_{cn},\qquad w_{ct}=v_{ct}-u_{ct}$$

Далее учтем (1.6) и представим подынтегральное выражение в (2.6) в виде

$$\psi=\sigma_n(v_n+v_{cn}-\delta_n)-\sigma_n(u_n+u_{cn}-\delta_n)+ \tag{2.7}$$
$$+\sigma_t(v_t+v_{ct})-\sigma_t(u_t+u_{ct})-f\sigma_n(|v_t+v_{ct}|-|u_t+u_{ct}|)$$

Первый член неотрицателен в силу неравенств (1.3), второй член равен нулю вследствие равенства в (1.3), а неотрицательность суммы остальных членов следует из легко проверяемого неравенства.

$$[\sigma_t(v_t+v_{ct})-f\sigma_n|v_t+v_{ct}|]-[\sigma_t(u_t+u_{ct})-f\sigma_n|u_t+u_{ct}|]\geqslant 0 \tag{2.8}$$

Действительно, в силу (1.4) и $\sigma_n\leqslant 0$ первая квадратная скобка в (2.8) неотрицательна. Слагаемые во второй квадратной скобке разных знаков вследствие (1.5), кроме того, либо $u_t+u_{ct}=0$, либо $|\sigma_t|=-f\sigma_n$, поэтому этот член равен нулю.

Таким образом, $\psi\geqslant 0$ и (2.4) доказано. Можно осуществить доказательство и в обратном направлении.

3. Рассмотрим вопрос единственности решения (2.4). Пусть существуют два решения задачи: $U^1$ и $U^2$. Подставим в (2.4) сначала $U=U^1$, $V=U^2$, а затем $U=U^2$, $V=U^1$ и сложим полученные неравенства. В итоге получим

$$a(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1)-\int\limits_{S_c}\left[\frac{1}{\rho_n}(u_{cn}{}^2-u_{cn}{}^1)^2+\frac{1}{\rho_t}(u_{ct}{}^2-u_{ct}{}^1)^2\right]dS+$$
$$+\int\limits_{S_c}f(\sigma_n{}^2-\sigma_n{}^1)(|u_t{}^2+u_{ct}{}^2|-|u_t{}^1+u_{ct}{}^1|)\,dS\geqslant 0 \tag{3.1}$$

Введем положительные константы $\rho_{0n}\leqslant\rho_n$, $\rho_{0t}\leqslant\rho_t$, $f_0\geqslant f$, $\rho_{0t}{}^+\geqslant\rho_t$ и обозначим $\mathbf{w}=\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1$, норму $\mathbf{u}$ в $H^1(\Omega)$ через $\|\mathbf{u}\|_\Omega$, норму $\sigma_n$ в $L^2(S_c)$ через $\|\sigma_n\|_S$. Пусть граница $S_u$ невырождена, тогда $a(\mathbf{w},\mathbf{w})\geqslant\alpha\|\mathbf{w}\|_\Omega{}^2$, $\alpha>0$. Используя (1.6) и учитывая введенные обозначения, из (3.1) получим

$$\alpha\|\mathbf{w}\|_\Omega{}^2+\rho_{0n}\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S{}^2+\rho_{0t}\|\sigma_t(\mathbf{w})\|_S{}^2\leqslant f_0\int\limits_{S_c}|\sigma_n(\mathbf{w})|\;|\,|u_t{}^2+u_{ct}{}^2|-$$
$$-|u_t{}^1+u_{ct}{}^1|\,|\,dS\leqslant f_0\int\limits_{S_c}|\sigma_n(\mathbf{w})|\;|w_t|\,dS+f_0\int\limits_{S_c}|\sigma_n(\mathbf{w})|\;|w_{ct}|\,dS \tag{3.2}$$

С учетом неравенства Коши — Буняковского и следующего из результатов [10, гл. 5, § 3] соотношения $\|w_t\|_S\leqslant C\|\mathbf{w}\|_\Omega$ оценим первый интеграл в правой части (3.2):

$$\int\limits_{S_c}|\sigma_n(\mathbf{w})|\;|w_t|\,dS\leqslant C\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S\,\|\mathbf{w}\|_\Omega.$$

Второй интеграл в (3.2) оценивается с помощью (1.6):

$$\int\limits_{S_c}|\sigma_n(\mathbf{w})|\;|w_{ct}|\,dS\leqslant\rho_{0t}{}^+\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S\,\|\sigma_t(\mathbf{w})\|_S$$

Левую часть (3.2) преобразуем с помощью неравенства $a^2+b^2\geqslant\geqslant{}^1/_2(a+b)^2$ и, таким образом, получим

$$^1/_2[\alpha^{1/2}\|\mathbf{w}\|_\Omega+\rho_{0t}^{1/2}\|\sigma_t(\mathbf{w})\|_S]^2+\rho_{0n}\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S{}^2\leqslant$$
$$\leqslant f_0[C\|\mathbf{w}\|_\Omega+\rho_{0t}^{+}\|\sigma_t(\mathbf{w})\|_S]\,\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S \tag{3.3}$$

Обозначим $N=\|\mathbf{w}\|_\Omega+(\rho_{0t}/\alpha)^{1/2}\|\sigma_t(\mathbf{w})\|_S$ и $B=\max(1, \rho_{0t}+\alpha^{1/2}/(C\rho_{0t}^{1/2}))$, и получим из (3.3):

$$^1/_2\alpha N^2+\rho_{0n}\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S{}^2\leqslant f_0CBN\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S \tag{3.4}$$

Поскольку $\mathbf{u}^2\neq\mathbf{u}^1$, то $N>0$, тогда обозначим $p=\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S/N$ и запишем (3.4) в виде

$$^1/_2\alpha-f_0CBp+\rho_{0n}p^2\leqslant 0 \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что минимальное значение приведенного трехчлена как функции от $p$ неположительно, откуда получим

$$f_0\geqslant f_*=(2\rho_{0n}\alpha)^{1/2}/(CB)$$

Это неравенство является необходимым условием наличия двух решений. Очевидно, достаточным условием единственности будет $f_0<f_*$.

При $\rho_t\equiv 0$ доказательство упрощается, подобная оценка получена в [11], но для формально регуляризованной задачи. Здесь же этот результат получается для физически ясной задачи с учетом податливого слоя на контакте. Существенно, что при $\rho_t=\rho_n\equiv 0$, т. е. для традиционной задачи Синьорини с трением, подобного результата получить не удается.

Подчеркнем, чтобы избежать недоразумений, что в общем случае решение задач с трением неединственно и зависит от процесса загружения. Здесь результат о единственности получен в предположении простого процесса загружения и закрепленного тела.

Представляет интерес получение фактических значений $f_*$, при достижении которых решение теряет единственность. Подобный результат для простой упругой системы был получен в [7], а для упругого тела на основе использования метода конечных элементов — в [12].

Следует отметить случай, когда задача о контакте двух тел разделяется на две: задачу о контакте без трения и сдвиговую [13]. В этом случае получается ситуация, когда известны предельные касательные напряжения трения на $S_c$. Такая задача является корректно поставленной при любом $f$ [4], решение в ней единственно.

**4.** Решение рассматриваемой задачи можно осуществить различными способами, например, с помощью процесса типа предложенного в [6]. Будем искать последовательные приближения $U^r$, $r=1, 2, \ldots$ . Обозначим $g^r=-f\sigma_n(\mathbf{u}^{r-1})$, где при $r=1$ $\mathbf{u}^0\equiv 0$, и вместо (2.4) будем искать решение последовательности вариационных задач

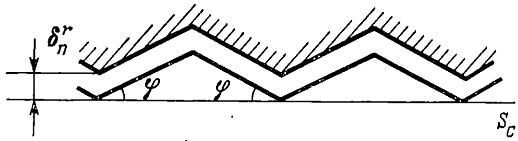
$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u})-l(\mathbf{v}-\mathbf{u})+\int\limits_{S_c}\left[\frac{1}{\rho_n}u_{cn}(v_{cn}-u_{cn})+\frac{1}{\rho_t}u_{ct}(v_{ct}-u_{ct})\right]dS+$$
$$+\int\limits_{S_c}g^r(|v_t+v_{ct}|-|u_t+u_{ct}|)\,dS\geqslant 0 \tag{4.1}$$

где $U\in W$, $V\in W$, причем $V$ произвольно.

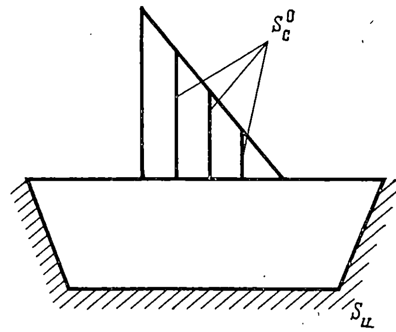
Принципиальное отличие задачи (4.1) от (2.4) состоит в том, что $g^r$ известно. На основе общей теории вариационных неравенств [4] можно установить, что задаче (4.1) эквивалентна задача минимизации

$$\Pi^r(U)\to\min, \quad U\in W \tag{4.2}$$

$$\Pi^r(U)={}^1/_2a(\mathbf{u}, \mathbf{u})-l(\mathbf{u})+{}^1/_2\int\limits_{S_c}\left[\frac{1}{\rho_n}(u_{cn})^2+\frac{1}{\rho_t}(u_{ct})^2\right]dS+$$
$$+\int\limits_{S_c}g^r|u_t+u_{ct}|\,dS \tag{4.3}$$




Фиг. 1




Фиг. 2

Можно показать также, что решение задачи (4.2) существует и единственно. Решать (4.2) можно с помощью методов минимизации недифференцируемых функционалов [6, 14], или переходом к задаче с идеальными связями [15].

С помощью (4.1) можно доказать сходимость процесса при $f<f_*$. Для этого надо сложить два неравенства (4.1) при значениях $U=U^{r+1}$, $V=U^r$ и $U=U^r$, $V=U^{r+1}$ и затем применить практически ту же схему оценок, что и в п. 3. Отметим, что факт сходимости процесса означает и существование решения задачи (2.4).

Подведем некоторые итоги. Исследование задачи Синьорини с трением было объявлено открытой проблемой еще в монографии [4]. Строгие результаты о существовании решения этой задачи получены в [16], но для частного случая полосы с бесконечной границей $S_c$. Тем самым авторы исключили возможность появления особых точек на границе контакта (например — под углом штампа). В [9] для достижения корректности постановки в общем случае вводится специальный закон трения со сглаживанием. В настоящей работе показано, что аналогичный результат можно получить более простыми и естественными средствами — введением упругого контактного слоя. Это можно рассматривать и как учет шероховатости поверхностей и как регуляризацию задачи. Отметим, что для целей регуляризации достаточно учесть податливость только по направлению нормали [5]. Подчеркнем также установленный принципиальный факт наличия в задачах с трением критического значения коэффициента трения $f_*$, при достижении которого свойства системы изменяются.

5. На практике хорошо себя зарекомендовал другой метод решения задачи (1.1)—(1.6). Будем решать при $r=1, 2, \ldots$ последовательность вспомогательных задач, образованных из (1.1)—(1.6) заменой (1.3) на следующие условия

$$\begin{gathered}
u_n+u_{cn}+f|u_t+u_{ct}|\leqslant\delta_n{}^r, \quad \sigma_n\leqslant 0 \\
[u_n+u_{cn}-\delta_n{}^r+f|u_t+u_{ct}|]\sigma_n=0 \\
\delta_n{}^r=\delta_n+f|u_t^{r-1}+u_{ct}^{r-1}|
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Оказывается, что условия (5.1), (1.4), (1.5) задают на $S_c$ идеальные односторонние связи, соответствующие зубчатому рельефу поверхностей с углом наклона граней $\varphi=\operatorname{arctg} f$ (фиг. 1). Для случая $\rho_t=\rho_n=0$ это показано в [7], наличие упругого слоя здесь принципиально ничего не изменяет. Первая вспомогательная задача при $\delta_n{}^r=\delta_n$ соответствует ситуации так называемого геометрического трения, рассматривавшегося в [17, 18].

Вспомогательные задачи ставятся в форме принципа минимума полной потенциальной энергии системы, причем первое неравенство в (5.1) определяет главные граничные условия на $S_c$. Остальные соотношения в

| $r$ | $N_r\cdot 10^3$ | $r$ | $N_r\cdot 10^3$ | $r$ | $N_r\cdot 10^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 7,5678 | 9 | 7,6341 |
| 2 | 6,0390 | 6 | 7,6091 | 10 | 7,6352 |
| 3 | 7,1549 | 7 | 7,6252 | 11 | 7,6356 |
| 4 | 7,4593 | 8 | 7,6316 | 12 | 7,6357 |

(5.1), (1.4) и (1.5) являются естественными граничными условиями. Нетрудно убедиться, что в случае сходимости процесса условия (5.1) в пределе переходят в (1.3).

Можно доказать сходимость такого процесса при $f<f_*$. Для случая $\rho_t\equiv 0$, но с учетом последовательности загружения, это выполнено в [5].

Для демонстрации эффективности метода приведем пример решения задачи, представленной на фиг. 2. (Это гравитационная плотина с вертикальными швами). Здесь вместо границы $S_c$ фигурируют разрезы $S_c^0$, между поверхностями которых действуют связи с трением. В этом случае вместо $u_n$ и $u_t$ в (1.3) и (1.5) входят взаимные перемещения поверхностей $\Delta u_n$ и $\Delta u_t$. Соответствующие материалы приведены в [7]. Нагрузками являлись собственный вес плотины и давление воды на вертикальную грань.

Задача решалась методом конечных элементов с помощью модифицированной программы [19], число пар узлов на $S_c^0$ равнялось 42, $f=0{,}6$. Следует отметить, что в конечномерном случае корректность постановки при малом трении имеет место и без регуляризации, поэтому расчеты выполнялись при $\rho_n=\rho_t\equiv 0$. Даже в этом случае сходимость процесса оказалась хорошей. В таблице приведены значения при $r=1, 2, \ldots$ норм дополнительных зазоров $N_r=(\Sigma_i(f|\Delta u_{ti}^{r-1}|)^2)^{1/2}$, где $i$ — номера пар узлов на $S_c^0$. Именно дополнительными зазорами отличаются одна от другой вспомогательные задачи, поэтому стабилизация $N_r$ характеризует сходимость процесса.

В итоге максимальная погрешность выполнения условия контакта $\Delta u_n\leqslant\delta_n$ не превысила $2\cdot 10^{-8}$ при характерном масштабе подвижек $\Delta u_t$ равном 0,005.

Вспомогательные задачи решались методом, изложенным в [19]. При этом производится предварительное исключение свободных неизвестных, не входящих в условия на $S_c$ и $S_c^0$, и только потом методом условного градиента решается задача квадратичного программирования сравнительно невысокого порядка. Итерации по $r$ осуществляются на уровне этой задачи невысокого порядка (в данном примере он равнялся 84). В результате общее время решения оказывается соизмеримым с временем решения одной задачи с идеальными связями (первой вспомогательной). В данном случае это составило на ЭВМ БЭСМ-6 13 минут 53 секунды против 10 минут 57 секунд.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Рабинович А. С.* Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3. С. 165–172.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
3. *Александров В. М., Кудиш И. И.* Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактных задач при учете поверхностной структуры взаимодействующих тел. // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 58–70.
4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
5. *Вовкушевский А. В.* Постановка и решение контактной задачи теории упругости

с трением при произвольном процессе загружения. // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1985. № 405. С. 9–13.
6. *Кравчук А. С.* К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения. // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 122–129.
7. *Вовкушевский А. В., Шойхет Б. А.* Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. М.: Энергоиздат, 1981. 136 с.
8. *Спектор А. А.* Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением. // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 1. С. 39–42.
9. *Oden J. T., Pires E. B.* Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. N 1. P. 67–76.
10. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической функции. М.: Наука, 1975. 394 с.
11. *Вовкушевский А. В.* О вариационных постановках задачи Синьорини с трением. // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 73–78.
12. *Вовкушевский А. В., Дурнев В. А.* Об устойчивости решения задачи теории упругости с условиями трения на границе. // Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники. 1984. Т. 171. С. 86–91.
13. *Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.* Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 141–148.
14. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
15. *Вовкушевский А. В.* О решении задачи теории упругости с условиями трения на границе. // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 88–92.
16. *Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.* Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986. 270 с.
17. *Parland H.* Friction law, stiffness and stability of non-monolithic structures. // Proc. 3rd Finnish Mechanics Days. Helsinki, 1988. P. 317–328.
18. *Sanchez-Palencia E., Suquet P.* Friction and homogenization of a boundary. // Free boundary problems: Theory and applications, Boston: Pitman Adv. Pr., 1982. V. 2. P. 561–571.
19. *Вовкушевский А. В., Зейлигер В. А.* Программа решения задачи упругости с односторонними связями и уравнения Пуассона методом конечных элементов для ЭВМ БЭСМ-6. Л.: Всес. н.-и. ин-т гидротехники. 1980. 127 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
31.V.1989