МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1991

УДК 539.3.01

И. М. НЕСАТЫЙ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Рассматривается плоскость комплексного переменного z с m гладкими разомкнутыми непересекающимися контурами L_k $(L=\Sigma L_k)$, концы которых обозначены через a_k и b_k. Считается, что на берегах разрезов, проведенных вдоль контуров, заданы усилия.

Интегральные уравнения рассматриваемой задачи получены с использованием комплексных потенциалов в [1], [2], где можно найти и библиографию работ в данном направлении. При этом искомой плотностью потенциалов обычно является скачок перемещений на разрезе или производная от этого скачка. В настоящей статье дан вывод интегрального уравнения относительно другой функции – суммы перемещений точек берегов разреза. Это уравнение оказывается союзным (в союзном классе функций), приведенному в [1] и безусловно разрешимым.

1. Искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем определять из граничных условий вида [1]:

$$\varphi^+(t)+t\overline{\varphi^{+\prime}(t)}+\overline{\psi^+(t)}=f^+(t)+C_k \tag{1.1}$$

$$\varphi^-(t)+t\overline{\varphi^{-\prime}(t)}+\overline{\psi^-(t)}=f^-(t)+C_k \tag{1.2}$$

Функции $f^{\pm}(t)$ считаются заданными. Постоянные C_k необходимо определить в ходе решения. Знак «плюс» означает, что предел берется слева при движении от точки a_k к точке b_k, «минус» — справа. Введем, как и в [1], дополнительные функции [1]

$$\varphi_0(z)=0,\quad \psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{f^+(t)}-\overline{f^-(t)}}{t-z}\,dt \tag{1.3}$$

и перейдем к новым функциям $\varphi^*(z)=\varphi(z)$ и $\psi^*(z)=\psi(z)-\psi_0(z)$. Тогда для новых функций придем к совпадающим на берегах разрезов условиям (звездочка опускается):

$$\varphi^{\pm}(t)+t\overline{\varphi^{\pm\prime}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=f(t)+C_k;\quad t\in t_k \tag{1.4}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}[f^+(t)+f^-(t)]+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f^+(\tau)-f^-(\tau)}{\bar\tau-\bar t}\overline{d\tau}$$

Обозначим через $w^+(t)$, $w^-(t)$ следующие функции:

$$\chi\varphi^{\pm}(t)-t\overline{\varphi^{\pm\prime}(t)}-\overline{\psi^{\pm}(t)}=2\mu[u^{\pm}(t)+iv^{\pm}(t)]=w^{\pm}(t),\quad t\in L_k \tag{1.5}$$

где $u^{\pm}(t)$, $v^{\pm}(t)$ — перемещения в направлении осей x, y точек левого и правого берегов разрезов. Складывая (1.4) и (1.5) для точек левого и

[1] В [1] допущены опечатки в выражении для $\psi_0(z)$.

правого берегов, соответственно найдем:

$$(1+\varkappa)\varphi^+(t)=f(t)+w^+(t)+C_k \tag{1.6}$$

$$(1+\varkappa)\varphi^-(t)=f(t)+w^-(t)+C_k \tag{1.7}$$

Вычитая (1.7) из (1.6), придем к задаче о скачке:

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=\frac{w^+(t)-w^-(t)}{1+\varkappa}=\frac{\omega(t)}{1+\varkappa} \tag{1.8}$$

решая которую получим:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int\limits_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \tag{1.9}$$

Подставив (1.6) и (1.7), а также производные предельных значений функций $\varphi^\pm(t)-\varphi^{\pm\prime}(t)$ в (1.4) или (1.5), найдем предельные значения функции $\psi(z)-\psi^\pm-(t)$. Разность этих значений также приводит к задаче и скачке, решение которой имеет вид:

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int\limits_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int\limits_L\frac{\bar t\omega'(t)\,dt}{t-z} \tag{1.10}$$

Представления (1.9), (1.10) были приведены без вывода в [1]. Переход в (1.9) и (1.10) к пределу при $z\to t_0$ $(t_0\in L)$ по формулам Сохоцкого — Племеля [2] и подстановка этих предельных значений в (1.4) приводит к интегральному уравнению, идентичному полученному в [1], которое мы запишем в виде:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}+\int\limits_L k_1(t_0,t)\,\omega(t)\,dt+$$
$$+\int\limits_L\overline{k_2(t_0,t)}\,\overline{\omega(t)}\,\overline{dt}=(1+\varkappa)[f(t_0)+C_k] \tag{1.11}$$

$$k_1(t_0,t)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0},\quad k_2(t_0,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0} \tag{1.12}$$

Индекс уравнения (1.11) равен $-m$, поскольку решение разыскивается в классе функций, ограниченных (и обращающихся в нуль) во всех концевых точках. Условие разрешимости этого уравнения дают, вообще говоря, достаточное количество соотношений для определения постоянных C_k, но требуют нахождения всех собственных функций союзного уравнения. Ввиду связанных с этим трудностей ниже предложены другие способы определения постоянных C_k, которые приводят в том числе и к другим интегральным уравнениям задачи.

2. Воспользуемся приемом, аналогичным предложенному в [3], при решении видоизмененной задачи Дирихле для плоскости с разрезами произвольной формы. Проведем регуляризацию уравнения (1.11), по способу Карлемана — Векуа. При этом исходное уравнение (1.11) оказывается эквивалентным в смысле разыскания решения в данном классе функций

---

[2] Принимаем, что функция $\omega(t)$ (так же, как и $f(t)$), удовлетворяет условию H, а функция $\omega'(t)$ – условию H^* [3].

регулярному интегральному уравнению и условиям

$$\omega(t_0)+\int_L N_1(t_0,t)\,\omega(t)\,dt+\int_L \overline{N_2(t_0,t)}\,\overline{\omega(t)}\,\overline{dt}=f^*(t_0) \tag{2.1}$$

$$\int_L a_j(t)\,\omega(t)\,dt+\int_L b_j(t)\,\overline{\omega(t)}\,dt-(1+\varkappa)\int_L \frac{t^j f(t)\,dt}{R(t)}=(1+\varkappa)\sum_{k=1}^{m} C_k\int_{L_k}\frac{t^j\,dt}{R(t)} \tag{2.2}$$

$$(j=0,1\ldots m-1)$$

$$N_1(t_0,t)=\frac{R(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{k_1(t_1,t)\,dt_1}{R(t_1)\,(t_1-t_0)},$$

$$\overline{N_2(t_0,t)}=\frac{R(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\overline{k_2(t_1,t)}\,dt_1}{R(t_1)\,(t_1-t_0)}$$

$$a_j(t)=\int_L\frac{k_1(t_1,t)\,t_1{}^j dt_1}{R(t_1)},\quad b_j(t)=\overline{t'^2}\int_L\frac{\overline{k_2(t_1,t)}\,t_1{}^j dt_1}{R(t_1)},\quad t'=\frac{dt}{ds}$$

$$f^*(t_0)=(1+\varkappa)\frac{R(t_0)}{\pi i}\left[\int_L\frac{f(t)\,dt}{R(t)\,(t-t_0)}+\sum_{k=1}^{m}C_k\int_{L_k}\frac{dt}{R(t)\,(t-t_0)}\right]$$

$$R(t)=\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{1/2}(t-b_k)^{1/2}$$

При практической реализации, в отличие от [3], целесообразно, для сокращения объема вычислений, присоединить соотношения (2.2) не к регулярному уравнению (2.1), а к исходному сингулярному (1.11). В результате будем иметь систему уравнений для определения неизвестной функции $\omega(t)$ и постоянных C_k. Докажем, что однородная система уравнений (2.1) и (2.2) или (1.11) и (2.2) не имеет отличных от нуля решений и, следовательно, неоднородная система всегда разрешима. Обозначим $\varphi_0{}^*(z)$, $\psi_0{}^*(z)$, $w_0{}^{\pm}(t)$ и C_k функции и постоянные, соответствующие решению однородного уравнения. Из теоремы единственности имеем $\varphi_0{}^*(z)=i\alpha z+\beta$; $\psi_0{}^*(z)=-\bar\beta$; $C_k{}^0=0$, а из (1.6) и (1.7): $w^+(t)=w^-(t)=$ $=(1+\varkappa)(i\alpha t+\beta)$; $\omega(t)=w^+(t)-w^-(t)=0$ (следовательно, и $\varphi_0{}^*(z)=$ $=\psi_0{}^*(z)=\alpha=\beta=0$, как это следует из (1.9), (1.10). При этом оказываются выполненными и условия (2.2).

Рассмотрим и другие возможности для определения неизвестных постоянных C_k. Выпишем зависимости для предельных значений функции $\varphi(z)$: $\varphi^{\pm}(t_0)$, $t_0\in L_k$, полученные по формулам Сохоцкого — Племеля из (1.9):

$$\varphi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{w^+(t_0)+w^-(t_0)}{2(1+\varkappa)}+\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} \tag{2.3}$$

Сопоставляя (2.3) с (1.6) или (1.7), найдем:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}=2f(t_0)+\chi(t_0)+2C_k,\quad \chi(t_0)=w^+(t_0)+w^-(t_0) \tag{2.4}$$

Решим сингулярное интегральное уравнение первого рода (2.4), рассматривая правую часть, временно, как известную. Решение ищем в классе функций, ограниченных (и обращающихся в нуль) во всех концевых точках a_k, b_k:

$$\omega(t_0)=\frac{2R(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{R(t)\,(t-t_0)}+\frac{R(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\chi(t)\,d(t)}{R(t)\,(t-t_0)}+\frac{2R(t_0)}{\pi i}\sum_{k=1}^{m}C_k\times$$
$$\times\int_{L_k}\frac{dt}{R(t)\,(t-t_0)} \tag{2.5}$$

Поскольку индекс уравнения (2.4) равен m, то решение заданного класса существует тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\sum_{k=1}^{m}a_{jk}C_k+A_j+B_j=0 \quad (j=0,1\ldots m-1)$$
$$a_{jk}=2\int_{L_k}\frac{t^j\,dt}{R(t)},\quad A_j=2\int_L\frac{t^jf(t)\,dt}{R(t)},\quad B_j=\int_L\frac{t^j\chi(t)\,dt}{R(t)} \tag{2.6}$$

Уравнения (1.11), (2.5) и (2.6) можно рассматривать как систему для нахождения неизвестных функций $\omega(t)$, $\chi(t)$ и постоянных C_k. Доказательство разрешимости этой системы аналогично, приведенному выше для системы (1.11) и (2.2).

Функцию $\omega(t)$ можно исключить из этой системы, если внести (2.5) в (1.11). В результате после преобразований, заключающихся в двукратном применении оператора с ядром Коши и перестановке порядка интегрирования в повторных интегралах, придем к регулярному интегральному уравнению:

$$-\chi(t_0)+\int_L N_1(t,t_0)\chi(t)\,dt+\int_L N_2(t,t_0)\overline{\chi(t)}\,\overline{dt}+P_{m-1}(t_0)=$$
$$=(1-\varkappa)f(t_0)-2\int_L N_1(t,t_0)f(t)\,dt-2\int_L N_2(t,t_0)\overline{f(t)}\,\overline{dt}+$$
$$+(1-\varkappa)C_k-2\int_L N_1(t,t_0)C(t)\,dt-2\int_L N_2(t,t_0)\overline{C(t)}\,\overline{dt},\quad C(t)=C_k,\quad t\in L_k \tag{2.7}$$

$$N_1(t,t_0)=\frac{1}{\pi iR(t)}\int_L\frac{k_1(t_0,t_1)R(t_1)\,dt_1}{t_1-t}$$
$$N_2(t,t_0)=-\frac{1}{\pi i\overline{R(t)}}\int_L\frac{k_2(t_0,t_1)\overline{R(t_1)}\,\overline{dt_1}}{\bar t_1-\bar t} \tag{2.8}$$

Здесь $P_{m-1}(t_0)$ — произвольный полином $(m-1)$ степени, который в дальнейшем не используется.

Ядра $k_1(t_0,\ t_1)$ и $k_2(t_0,\ t_1)$ определяются в соответствии с (1.12), причем последнее — переходом в (1.12) к сопряженным значениям. Сравнивая соответственно ядра (2.3) и (2.4) регулярного уравнения (2.1) с ядрами (2.8) и уравнения (2.7), можно прийти к выводу, что эти уравнения являются союзными в союзном классе функций ($\omega(t)$ и $\chi(t)/R(t)$). Поэтому будут союзными и сингулярные уравнения (1.11) и следующее ниже (2.9), регуляризацией которых можно получить соответственно уравнения (2.1) и (2.7):

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\chi(t)}{R(t)}\frac{dt}{t-t_0}+\int_L k_1(t,t_0)\frac{\chi(t)}{R(t)}dt+\int_L k_2(t,t_0)\overline{\frac{\chi(t)}{R(t)}}\overline{dt}=$$

$$=\frac{1-\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{R(t)(t-t_0)}-2\int_L k_1(t,t_0)\frac{f(t)}{R(t)}dt-2\int_L k_2(t,t_0)\overline{\frac{f(t)}{R(t)}}\overline{dt}+$$

$$+\frac{1-\varkappa}{\pi i}\int_L \frac{C(t)\,dt}{R(t)(t-t_0)}-2\int_L k_1(t,t_0)\frac{C(t)}{R(t)}dt- \quad (2.9)$$

$$-2\int_L k_2(t,t_0)\overline{\frac{C(t)}{R(t)}}\overline{dt}$$

Сама возможность записать в явном виде правую часть уравнения (2.9) связана с тем, что в явном виде записана и правая часть уравнения (2.7).

Уравнение (2.9) безусловно разрешимо, поскольку, как было установлено выше, союзное однородное уравнение (1.11) не имеет отличных от нуля решений в союзном классе функций. Совместно с условиями (2.6) уравнение (2.9) образует систему, из которой могут быть найдены функция $\chi(t)$ и постоянные C_k; после этого из (2.5) определяется $\omega(t)$, что решает задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
2. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 321 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.

Москва

Поступила в редакцию 5.IV.1990