

УДК 531.8
© 1991 г.

В. Г. ВЕРБИЦКИЙ, Л. Г. ЛОБАС

**БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ СВЯЗКИ
АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ И КАТЯЩИХСЯ УПРУГИХ ТЕЛ**

Рассматривается плоскопараллельное движение связки тел, моделирующих двухзвенный автопоезд, пневмоколесные машины со складывающейся рамой и пр. Для этих механических систем характерно наличие ведущего звена (тягача) и ведомого звена (полуприцепа), шарнирное соединение между которыми приводит к возможности относительного поворачивания звеньев. Для описания упругих свойств катящихся колес принят нелинейный вариант феноменологической гипотезы бокового увода [1]. Подход [2] позволил качественно проанализировать условия существования стационарных режимов, которым на опорной плоскости соответствуют прямолинейные и круговые движения. Установлены возможные бифуркации, приводящие к неустойчивости стационарных движений. Потеря устойчивости связана с катастрофой складки, порождаемой или в подсистеме «приведенный тягач», или в подсистеме «полуприцеп».

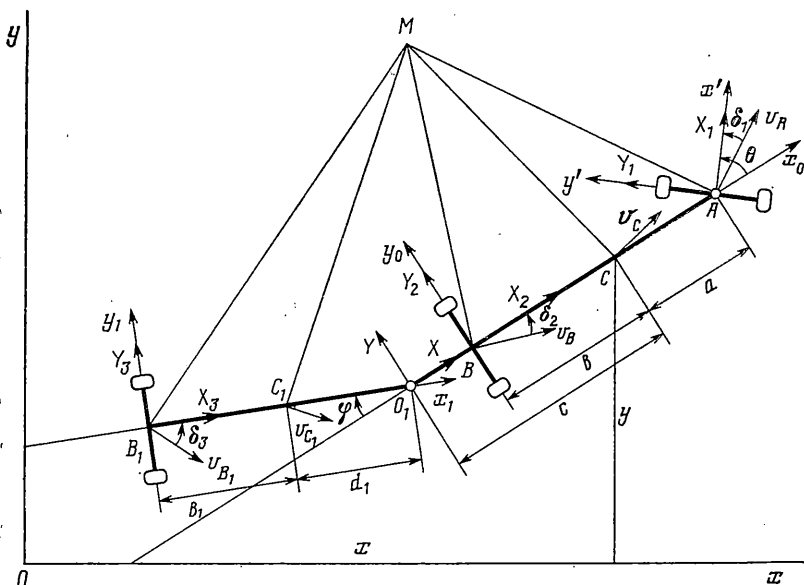
Другим методом движение двухзвенного автопоезда после потери устойчивости прямолинейного движения исследовалось в [3, 4]. С помощью приведения исходной системы к трехмерной системе на центральном многообразии, расщепления последней на одно- и двумерную подсистемы и удержания лишь главных частей нелинейностей (до третьего порядка включительно) выполнен постбифуркационный анализ связанных флаттерных и дивергентных движений. Аналогичным образом решалась родственная задача о колебаниях двухзвенного маятника с упруго заделанным концом и нагруженного неконсервативной следящей силой [5].

1. Постановка задачи. Пусть C, m, I – центр масс, масса и центральный момент инерции ведущего звена относительно вертикальной оси; C_1, m_1, I_1 – то же для ведомого звена; $L_i = b_i + d_i$; X_i, Y_i – продольные и боковые реакции опорной плоскости (фиг. 1); δ_i – углы бокового увода [1]:

$$\begin{aligned} v_c &= \dot{i}_0 v + \dot{j}_0 u, \quad v = \dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta, \quad u = -\dot{x} \sin \vartheta + \dot{y} \cos \vartheta \\ \omega &= \dot{\vartheta}, \quad v_c = \dot{i}_1 v_1 + \dot{j}_1 u_1, \quad v_1 = v \cos \varphi - (u - \omega c) \sin \varphi \\ u_1 &= v \sin \varphi + (u - \omega c) \cos \varphi - \omega_1 d_1, \quad \omega_1 = \dot{\vartheta}_1 = \omega - \dot{\varphi} \\ \delta_1 &= \theta - (u + a\omega)v^{-1}, \quad \delta_2 = (-u + b\omega)v^{-1}, \quad \delta_3 = (-u_1 + b_1\omega_1)v_1^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Функции $Y_i(\delta_i)$, имеющие эмпирическое происхождение, являются в большинстве случаев монотонными, нечетными, причем $Y_i'(0) = k_i > 0$; их предельные значения ограничены условиями сцепления беговой поверхности колес с поверхностью полотна дороги, так что кривые $Y_i = Y_i(\delta_i)$ имеют горизонтальные асимптоты $Y_i = \pm \varphi_i G_i$, где φ_i – коэффициенты сцепления, $G_1 = mgb l^{-1}$, $G_2 = mgal^{-1}$, $l = a + b$. Дифференциальные уравнения движения двухзвенника получим как частный случай из [6]:

$$\begin{aligned} (m + m_1) \dot{v} - m_1 d_1 \dot{\omega} \sin \varphi + m_1 d_1 \ddot{\varphi} \sin \varphi - (m + m_1) \omega u + \\ + m_1 (c + d_1 \cos \varphi) \omega^2 + m_1 d_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - 2m_1 d_1 \omega \dot{\varphi} \cos \varphi = \\ = X_1 \cos \theta - Y_1 \sin \theta + X_2 + X_3 \cos \varphi + Y_3 \sin \varphi \\ (m + m_1) \dot{u} - m_1 (c + d_1 \cos \varphi) \dot{\omega} + m_1 d_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi + (m + m_1) \omega v - \end{aligned} \tag{1.2}$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
 & -m_1 d_1 \omega^2 \sin \varphi - m_1 d_1 \varphi'' \sin \varphi + 2m_1 d_1 \omega \dot{\varphi} \sin \varphi = \\
 & = X_1 \sin \theta + Y_1 \cos \theta + Y_2 - X_3 \sin \varphi + Y_3 \cos \varphi
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
 & [I_1 + m_1 c (c + d_1 \cos \varphi)] \omega'' - m_1 c \dot{u} - m_1 c d_1 \varphi'' \cos \varphi - \\
 & - m_1 c v \omega + m_1 c d_1 \omega^2 \sin \varphi + m_1 c d_1 \varphi'^2 \sin \varphi - 2m_1 c d_1 \omega \dot{\varphi} \sin \varphi = \\
 & = X_1 a \sin \theta + Y_1 a \cos \theta - b Y_2 + X_3 c \sin \varphi - Y_3 c \cos \varphi
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
 & (I_1 + m_1 d_1^2) \varphi'' - [I_1 + m_1 d_1 (d_1 + c \cos \varphi)] \omega'' + m_1 d_1 u' \cos \varphi + \\
 & + m_1 d_1 v' \sin \varphi + m_1 d_1 v \omega \cos \varphi - m_1 d_1 \omega u \sin \varphi + \\
 & + m_1 c d_1 \omega^2 \sin \varphi = Y_3 L_1
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Взаимное влияние звеньев моделируется силой $X+Y$, приложенной в точке сцепки O_1 . Для проекций силы, с которой ведомое звено воздействует на ведущее, имеем

$$\begin{aligned}
 X = & -m_1 [v' - \omega u - (\omega' - \varphi'') d_1 \sin \varphi + \omega^2 c + (\omega - \varphi')^2 d_1 \cos \varphi] + \\
 & + X_3 \cos \varphi + Y_3 \sin \varphi, \quad Y = -m_1 [u' + \omega v - (\omega' - \varphi'') d_1 \cos \varphi - \omega' c - \\
 & - (\omega - \varphi')^2 d_1 \sin \varphi] - X_3 \sin \varphi + Y_3 \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Рассмотрим движения автопоезда с заданной скоростью $v = \text{const}$ и постоянными значениями переменных u , ω , φ , считая для определенности $X_1 = X_3 = 0$. Уравнением (1.2) определяется требуемое значение X_2 . Стационарные значения переменных u , ω , φ удовлетворяют согласно (1.3)–(1.5) системе

$$-mv\omega - m_1 (v - d_1 \omega \sin \varphi) \omega + Y_1 \cos \theta + Y_2 + Y_3 \cos \varphi = 0 \quad (1.6)$$

$$m_1 c \omega (v - d_1 \omega \sin \varphi) + Y_1 a \cos \theta - b Y_2 - c Y_3 \cos \varphi = 0 \quad (1.7)$$

$$-m_1 d_1 \omega [v \cos \varphi - (u - c \omega) \sin \varphi] + L_1 Y_3 = 0 \quad (1.8)$$

В [7] изучены бифуркации стационарных состояний отдельно взятого ведущего звена, в [8] — ведомого. Ниже оцениваются динамические

качества автопоезда по сравнению с аналогичными качествами одиночного тягача. Уравнения (1.6), (1.7) можно рассматривать как уравнения стационарных состояний отдельно взятого тягача, на который от прицепа в точке сцепки O_1 действует сила $\mathbf{R} = i_0 X + j_0 Y$ (в уравнениях входит лишь ее поперечная проекция Y):

$$mv\omega = Y_1 \cos \theta + Y_2 + Y, \quad Y_1 a \cos \theta - b Y_2 - c Y = 0 \quad (1.9)$$

Координаты вектора \mathbf{R} определяются выражениями $X = m_1 \omega \times [u - \omega(c + d_1 \cos \varphi)] + Y_3 \sin \varphi$, $Y = -m_1 \omega(v - \omega d_1 \sin \varphi) + Y_3 \cos \varphi$. В зависимости от величины и знака нового параметра Y можно оценить стационарные режимы всей системы. Примем $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$. Из (1.1) имеем

$$\omega = vl^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) \quad (1.10)$$

На основании (1.10) систему (1.9) запишем в виде

$$Y_1^* = v^2(gl)^{-1}(\theta + \delta_2 - \delta_1) - Y^*(1 - cb^{-1}) \quad (1.11)$$

$$Y_1^* = Y_2^* + cl(ab)^{-1}Y^* \quad (1.12)$$

где $Y_i^* = Y_i G_i^{-1}$, $Y^* = Y(mg)^{-1}$. Для каждого значения параметра Y^* уравнение (1.12) на плоскости переменных $\delta_2 - \delta_1$ и Y_1^* определяет кривую линию

$$Y_1^* = Y_1^*(\delta_2 - \delta_1) \quad (1.13)$$

не зависящую от скорости движения v двухзвенника («неподвижную»). Уравнение (1.11) определяет прямую, угловой коэффициент которой всегда положителен и с увеличением v растет от 0 до $+\infty$. Точки пересечения неподвижной кривой (1.13) с подвижной прямой (1.11) являются особыми точками системы. В [9] показано, что в случае одиночного колесного экипажа и монотонных зависимостей $Y_i(\delta_i)$ дивергенция векторного поля фазовых скоростей, задаваемого системой

$$\dot{\omega} = P(\omega, u), \quad \dot{u} = Q(\omega, u) \quad (1.14)$$

отрицательна во всей фазовой плоскости ωu , поэтому анализ бифуркаций особых точек поля позволяет выяснить их устойчивость или неустойчивость. Потеря устойчивости движения происходит при появлении кратной особой точки системы (1.14) (в результате бифуркаций слияния или рождения особых точек). Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент неподвижной кривой в точке, соответствующей стационарному режиму, превосходил угловой коэффициент подвижной прямой.

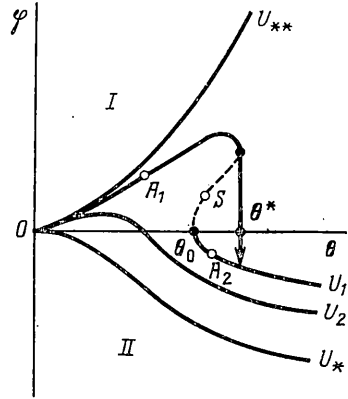
Необходимое условие устойчивости прямолинейного движения двухзвенника, получающееся из линейного приближения, состоит в требовании $v < v_+$, где

$$v_+^2 = k_1 k_2 E_1 l^2 / \{m L_1 (k_1 a - k_2 b) + m_1 b_1 [k_1 (a + c) + k_2 (c - b)]\} \quad (1.15)$$

2. Случай $c = b$, $b_1 = 0$. При $c = b$ положение подвижной прямой (1.11) не зависит от значений Y . Для $b_1 = 0$ знак параметра Y совпадает со знаком угла φ . Если $b_1 \neq 0$, то параметр Y может изменить знак при достаточном больших положительных значениях φ , что препятствует непосредственному применению изложенного выше подхода. Ниже, однако, будет показано, что задачу качественного анализа стационарных режимов двухзвенника при $b_1 \neq 0$ можно свести к аналогичной задаче для двухзвенника, у которого $b_1 = 0$.

Так как $b_1 = 0$, то дальше задача сводится к определению всех возможных стационарных состояний ведомого звена при движении точки

сцепки по окружности произвольного радиуса с постоянной угловой скоростью ω , т. е. к решению уравнения (1.8) при произвольных значениях ω , u . В общем случае эта задача решена в [8]. На фиг. 2 показаны ветви кривой $\varphi = \varphi(\theta)$, выходящие из начала координат; значения v увеличиваются сверху вниз. Условие $v < v_{**} = (\varphi_3 g L_1)^{1/2}$ достаточно для того, чтобы ведомое звено при повороте двухзвенника ориентировалось во внутреннюю сторону; это соответствует нахождению устойчивого стационарного состояния данного звена в области I из [8], для нее $\varphi + \Delta\varphi > 0$, $\Delta\varphi = \text{arctg}[-(u + c\omega)v^{-1}]$. Условие $v > v_*$ достаточно для того, чтобы ведомое звено ориентировалось во внешнюю сторону, т. е. чтобы в круговом движении устойчивое стационарное состояние достигалось лишь в области II из [8], для нее $\varphi + \Delta\varphi < 0$. Здесь $v_* = (\kappa_3 g L_1)^{1/2}$, $\kappa_3 = k_3 G_3^{-1}$, $G_3 = m_1 g d_1 L_1^{-1}$. Для $v = v_1$ при $\theta < \theta_0$ есть лишь одна устойчивая особая точка (в области I). При $\theta = \theta_0$ на границе областей I и II рождается кратная особая точка, которая при $\theta > \theta_0$ распадается на две особые точки: седло S в области I и устойчивую особую точку A_2 в области II. При дальнейшем увеличении θ точки A_1 и S движутся навстречу, сливаясь при $\theta = \theta^*$, так что для $\theta > \theta^*$ в области I особых точек нет. Таким образом, при $v = v_1$ возможны две бифуркации: рождения двух стационарных состояний для $\theta = \theta_0$ и слияния для $\theta = \theta^*$. Если стационарному состоянию полуприцепа соответствовала точка A_1 , то для $\theta = \theta^*$ при увеличении θ полуприцеп скачкообразно переходит из одного устойчивого стационарного состояния ($\varphi > 0$) в другое ($\varphi < 0$).



Фиг. 2

1°. Ведущее звено с недостаточной поворачиваемостью [I]: $k_1 a - k_2 b < 0$. Из (1.15) следует, что у двухзвенника (как и у одиночного экипажа) в этом случае отсутствует критическая скорость прямолинейного движения.

Если $v < v_{**}$, то $\varphi(\theta) > 0$ при $\forall \theta > 0$, причем $\varphi(\theta)$ — монотонно возрастающая функция (фиг. 2). Следовательно, $Y > 0$. Изменение с ростом θ конфигурации кривой (1.13) для двухзвенника показано на фиг. 3, а–в. При $\theta = 0$ вид ее такой же, как у одиночного колесного экипажа, поскольку $\theta = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Y = 0$. С ростом θ растет φ и, следовательно, Y . В случае фиг. 3, а у автопоезда имеется единственная устойчивая особая точка O . В случаях фиг. 3, б, в особых точек две: устойчивая N и неустойчивая S , причем во всей системе автопоезд реализуется переход $O \rightarrow N$ от устойчивой особой точки к устойчивой, неустойчивая особая точка S , по крайней мере на данной ветви, не реализуется. Характер стационарных состояний автопоезда и отдельно взятого тягача при $v < v_{**}$ совпадают.

Если $v = v_1$, то $\varphi(\theta)$ знакопеременная функция. Таким, следовательно, является и Y . В этом случае на основании фиг. 2 существуют три характерных значения θ , при которых Y различные: $\theta = \theta^* - 0 \Rightarrow \varphi > 0 \Rightarrow Y > 0$ (фиг. 3, з), $\theta = \theta_0 < \theta^* \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Y = 0$ (фиг. 3, д), $\theta = \theta^* + 0 \Rightarrow \varphi < 0 \Rightarrow Y < 0$ (фиг. 3, е). Кривая (1.13) при этих значениях θ имеет различный характер. Из устойчивого стационарного состояния N_1 (фиг. 3, з) система скачком переходит в устойчивое стационарное состояние N_2 (фиг. 3, е), которое существует лишь до некоторого значения $\theta_{\max} > \theta^*$, а затем сливается с седловой особой точкой S_2 и исчезает. С перестройкой ведомого звена во внешнюю сторону свойство двухзвенника совершать устойчи-

вый разворот разрушается при $\theta > \theta_{\max}$. Кроме того, при $\theta = \theta^*$ автопоезд претерпевает катастрофу складки (фиг. 3, e).

2°. Ведущее звено с избыточной поворачиваемостью [1]: $k_1 a - k_2 b > 0$. Так как $b_1 = 0$, то из (1.15) следует, что в случае прямолинейного движения критическая скорость тягача и автопоезда совпадают: $v_+^2 = = k_1 k_2 l^2 m^{-1} (k_1 a - k_2 b)^{-1}$.

Если $v < v_{**}$, то $\varphi(\theta) > 0$ при $\forall \theta > 0$. На фиг. 4, a-e отражены возможные ситуации при движении автопоезда с докритическими скоростями, причем $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, а также эволюция одного и того же стационарного состояния N_1 при возрастании θ . Особая точка N_1 устойчива и существует при $\forall \theta$. Таким образом, в отличие от тягача у автопоезда в некотором интервале скоростей появляется новое качество — при всех θ имеется устойчивое стационарное состояние.

Если $v_{**} < v = v_2 < v_*$, то из фиг. 2 следует, что $\varphi(\theta)$ — непрерывная функция, которая меняет знак с + на -, проходя через нуль. Наиболее общая ситуация в этом случае изображена на фиг. 4, г-ж, причем $\theta_2 < \theta_1$, $\theta_4 < \theta_3$. При переходе от фиг. 4, г к фиг. 4, д, т. е. с уменьшением θ от θ_1 до θ_2 , устойчивая особая точка N_1 становится неустойчивой особой точкой s_1 . На фиг. 4, e изображена устойчивая особая точка N_1 , для которой $\theta = \theta_3$ и $Y > 0$. В случае фиг. 4, ж полуприцеп перестроился во внешнюю сторону ($Y < 0$), а точка N_1 из устойчивой (фиг. 4, e) стала неустойчивой S_1 . Таким образом, с перестройкой полуприцепа во внешнюю сторону характер стационарных состояний автопоезда и отдельно взятого тягача совпадает.

Все изложенные в данном параграфе результаты качественного анализа подтверждаются численным интегрированием.

3. **Общий случай** ($b_1 \neq 0$). Покажем, что приведенный выше анализ стационарных состояний справедлив для автопоезда с произвольным распределением масс ведомого звена. С этой целью запишем уравнения (1.6) — (1.8) так

$$-Mv\omega + Y_1 \cos \theta + Y_2 + Y' = 0 \quad (3.1)$$

$$m_{11}cv\omega + Y_1 a \cos \theta - bY_2 - cY' = 0 \quad (3.2)$$

$$-m_{12}\omega [v \cos \varphi - (u - c\omega) \sin \varphi] + Y_3 = 0 \quad (3.3)$$

$$M = m + m_{11}, \quad m_{11} = m_1 b_1 L_1^{-1}, \quad m_{12} = m_1 d_1 L_1^{-1} \quad (3.4)$$

$$Y' = -m_1 d_1 L_1^{-1} \omega (v - \omega L_1 \sin \varphi) + Y_3 \cos \varphi$$

Обозначим

$$\xi = m_{11} M^{-1} c, \quad a' = a + \xi, \quad b' = b - \xi, \quad c' = c - \xi, \quad G_1' = M g b' l^{-1}$$

$$G_2' = M g a' l^{-1}, \quad Y_1'^* = Y_1 / G_1', \quad Y_2'^* = Y_2 / G_2', \quad Y'^* = Y' M^{-1} g^{-1} \quad (3.5)$$

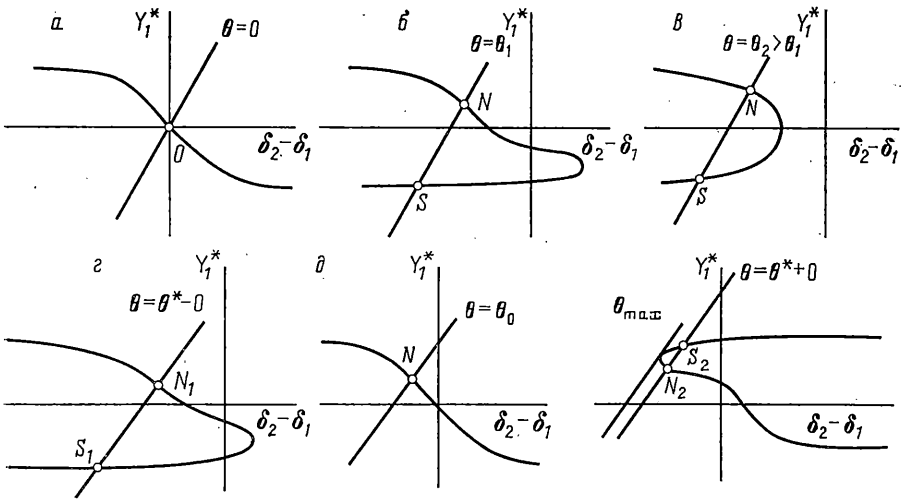
Уравнения (3.1), (3.2) принимают вид

$$v\omega g^{-1} = Y_1'^* + (1 - c'/b') Y'^*, \quad Y_1'^* = Y_2'^* + Y'^* c' l (a' b')^{-1} \quad (3.6)$$

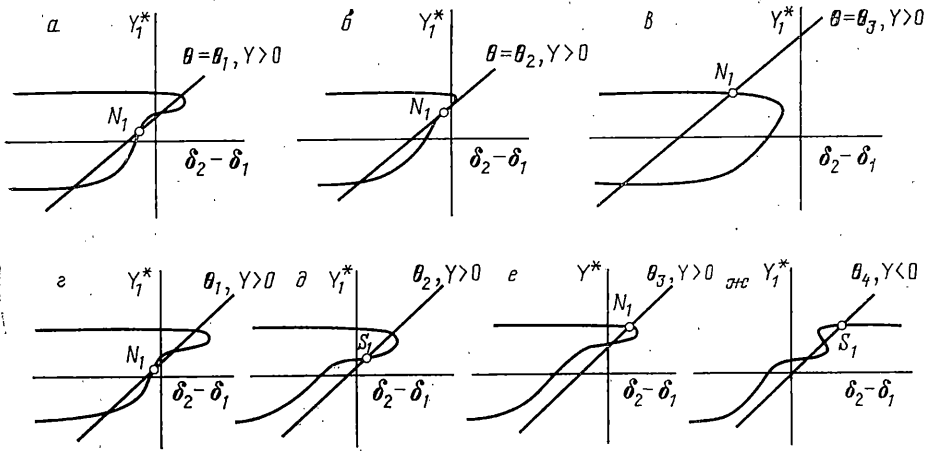
Уравнения (3.6) после исключения из них величины ω на основании (1.10) совпадают с (1.11), (1.12) и, следовательно, определяют стационарные режимы некоторого приведенного автопоезда, для которого $b_1 = 0$. Чтобы найти выражение для Y' через ω , φ , необходимо из (3.4) исключить Y_3 на основании (3.3); получим

$$Y' = m_1 d_1 L_1^{-1} \omega [-v \sin \varphi + \omega L_1 - (u - c\omega) \cos \varphi] \sin \varphi \quad (3.7)$$

Все величины (3.5) со знаком «штрих» отличаются от их аналогов без штриха в конечном итоге величиной ξ , пропорциональной дроби $m_1 b_1 / L_1$. Чтобы выяснить ее физический смысл, массу ведомого звена «раз-



Фиг. 3



Фиг. 4

несем»: в точке сцепки O_1 сосредоточим массу m_{11} , а в точке над серединой B_1 колесной оси поместим массу m_{12} , т. е. проведем процедуру замены полуприцепа невесомым стержнем с двумя сосредоточенными массами m_{11} и m_{12} в точках O_1 и B_1 . Этим самым масса полуприцепа распределена на две точечные массы, одну из которых (m_{11}) можно считать принадлежащей тягачу, а другая (m_{12}) соответствует некоторому новому, более легкому полуприцепу, у которого центр масс лежит над осью вращения колес.

На основании изложенного рассмотрим новую механическую систему, состоящую из ведущего звена массой M , часть m_{11} которой сосредоточена в точке O_1 , и невесомого ведомого звена, в точке B_1 которого имеется точечная масса m_{12} ; уравнения (3.1)–(3.3) являются условиями равновесия этой двухзвенной шарнирно соединенной системы. При этом (3.1) — условие равенства нулю проекции главного вектора сил на поперечную ось тягача, Y' — боковая реакция в точке сцепки O_1 от «приведенного» полуприцепа; (3.2) — условие равенства нулю главного момента сил относительно вертикальной оси, проходящей через «ста-

рый» центр масс тягача, т. е. через точку C (фиг. 1); (3.3) — условие равенства нулю главного момента сил, действующих на полуприцеп, относительно вертикальной оси, проходящей через точку O_1 . Пусть C' — центр масс приведенного тягача, его расстояния до передней и задней колесных осей равны a' и b' соответственно. Тогда (3.6) — уравнения равновесия приведенного тягача относительно точки C' .

Если $c' > 0$, то картина качественного поведения стационарных состояний автопоезда при различных v, θ соответствует приведенной в п. 2. Если $c' < 0$, то она меняется на противоположную: полуприцеп, ориентированный во внутреннюю сторону, ухудшает, а ориентированный во внешнюю сторону улучшает устойчивость круговых стационарных режимов по сравнению с приведенным тягачом.

Система (3.1), (3.2) определяет стационарные режимы и их устойчивость (если угловой коэффициент подвижной прямой меньше углового коэффициента неподвижной кривой в точке пересечения прямой с кривой, то соответствующий стационарный режим устойчив). Для движения по траекториям достаточно больших радиусов кривизны величины u, ω, φ имеют порядок малости угла θ , при этом сила Y' (как следует из (3.7)) имеет третий порядок малости. Из этого следует, что условие устойчивости таких движений совпадает с условием устойчивости прямолинейного движения, т. е. значения критической скорости прямолинейного и кругового движений равны между собой. Значение критической скорости прямолинейного движения автопоезда, как следует из (3.1), (3.2), определяется приведенным тягачом и совпадает с критической скоростью тягача, в котором учтено перераспределение вертикальных нагрузок на его оси, т. е. $v_+^2 = \kappa_1' \kappa_2' gl (\kappa_1' - \kappa_2')^{-1}$, $\kappa_i' = k_i / G_i'$.

В заключение отметим следующее. Из анализа кривых на фиг. 3 и 4 видно, что ориентирование полуприцепа во внутреннюю сторону ($\varphi > 0$) улучшает устойчивость автопоезда: во всех случаях имеются устойчивые круговые режимы при всех достаточно больших θ . В случае же ориентации во внешнюю сторону ($\varphi < 0$) автопоезд теряет устойчивость аналогично тому, как теряют устойчивость круговые движения тягача с избыточной поворачиваемостью при превышении некоторого значения $\theta_{\max}(v)$.

При движении по траекториям произвольных радиусов кривизны случаи потери устойчивости круговых движений рассмотрены выше. В этих случаях характерным является значение v_{**} , а не критическая скорость приведенного тягача (как в случаях траекторий достаточно больших радиусов кривизны). Если последняя не существует (отсутствует или равна $+\infty$, т. е. $k_1' a' - k_2' b' \leq 0$) или существует, но $v_{**} < v < v_+$, то круговое движение автопоезда теряет устойчивость при некотором θ , обозначенном на фиг. 2 через θ^* . Если же критическая скорость приведенного тягача v_+ существует, но $v_{**} > v_+$ (чего можно достичь удлинением полуприцепа), то круговые движения автопоезда (в отличие от приведенного тягача) устойчивы при $v_+ < v < v_{**}$ и при $\forall \theta$, превышающих некоторое значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45. вып. 5. С. 944–948.
3. Troger H., Zeman K. A nonlinear analysis of the generic types of loss of stability of the steady state motion of a tractor-semitrailer // Vehicle System Dynamics. 1984. V. 13. No. 4. P. 161–172.

4. *Scheidl R., Stribersky A.* Gekoppelte Divergenz- und Flatterinstabilität eines Sattelschleppzuges // ZAMM. 1986. V. 66. No. 4. P. 87–89.
5. *Scheidl R., Troger H., Zeman K.* Coupled flutter and divergence bifurcation of a double pendulum // Internat. J. Non-Linear Mech. 1984. V. 19. No. 2. P. 163–176.
6. *Лобас Л. Г.* Математическая модель связанных систем с качением // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 6. С. 80–87.
7. *Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г.* Бифуркации и устойчивость стационарных движений колесного экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 57–63.
8. *Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г.* Бифуркации стационарных состояний ведомых звеньев колесных экипажей // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 9. С. 110–116.
9. *Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г.* Области притяжения в задаче о плоском движении систем с качением // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 498–503.

Киев

Поступила в редакцию
11.VII.1989