МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1991

УДК 531.011

Е. М. ПОТАПЕНКО

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРУГИМИ КОНЦЕВЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

В [1] рассматривалась произвольная механическая система, имеющая структуру дерева с упругими концевыми звеньями на ветвях, описываемая линейными уравнениями. Данная работа, являющаяся дальнейшим развитием [1], посвящена исследованию динамики той же системы, но в нелинейной постановке. Составлены обобщенные нелинейные уравнения движения и исследована управляемость системы. Доказаны теоремы, позволяющие судить об устойчивости распределенной системы по уравнениям движения без учета упругости .

1. Уравнения движения. Пусть система представляет собой сложный механизм, состоящий из n звеньев, соединенных голономными связями, $(n-k)$ звеньев являются абсолютно твердыми и размещены в пространстве 1 на фигуре. Концевые звенья $1, 2, \ldots, j, \ldots, k$ кинематических ветвей состоят из абсолютно твердых оснований r_j и защемленных в них упругих частей e_j. По всем степеням свободы в сочленениях установлены управляющие устройства, датчики перемещений и, возможно, скоростей. В сочленениях звеньев может быть учтена упругость, что не влияет на полученные результаты. Состояние твердой части системы, включая части r_j, определяется векторами координат x и скоростей $x^\cdot$. С частями r_j жестко связываются правые ортогональные базисы O_j. Пусть l_j — радиус-вектор элемента части e_j в базисе O_j в недеформированном состоянии, $u(l_j)$ и $u^\cdot(l_j)$ — векторы упругой деформации и ее скорости в базисе O_j в точке с радиусом-вектором l_j; v_{0j} и ω_j — векторы абсолютной линейной и угловой скоростей базиса O_j, записанные через проекции на собственные оси. Тогда вектор абсолютной скорости элемента упругой части определится выражением

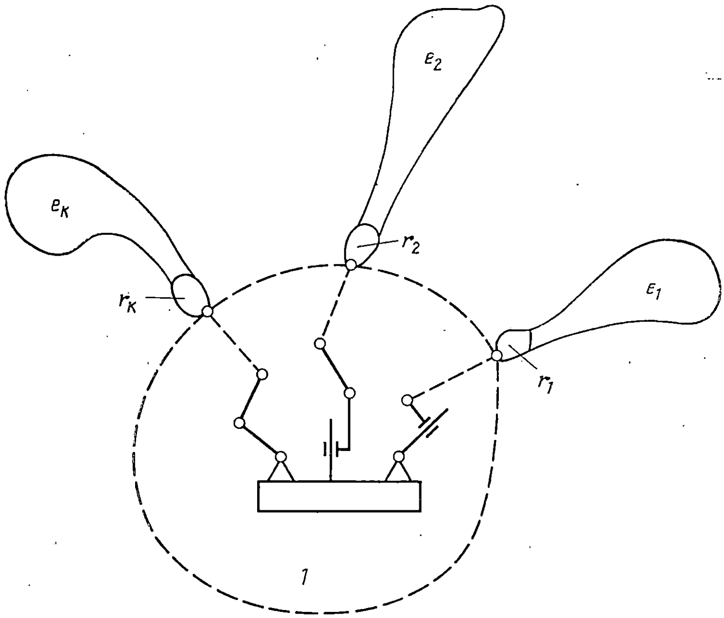
$$v_j = v_{0j} - g_j^* \omega_j + u^\cdot(l_j), \quad g_j = l_j + u(l_j) \tag{1.1}$$

где a^* — кососимметрическая матрица, составленная из проекций вектора **a**, а a^*b — матричное представление векторного умножения векторов **a** и **b**. Имеют место соотношения

$$v_{0j} = A_{1j}(x)x^\cdot, \quad \omega_j = A_{2j}(x)x^\cdot \tag{1.2}$$

Кинетическая энергия T всей материальной системы определяется выражением (здесь и далее суммирование по j от 1 до k):

$$2T = \int\limits_m v^T v\, dm = x^{\cdot T} M_r(x) x^\cdot + \sum \int\limits_{m_j} v_j^T v_j\, dm \tag{1.3}$$



где m — масса всей системы, $M_т(x)$ — массовая матрица твердой части системы (без учета упругих частей e_j), m_j — масса e_j. Имеют место соотношения

$$\int\limits_{m_j} g_j^* g_j^* \, dm = -J_j(u), \quad \int\limits_{m_j} g^* \, dm = l_{cj}^* m_j \qquad (1.4)$$

где $J_j(u)$, $l_{cj}(u)$ — матрица моментов инерции и координата центра масс части e_j в базисе O_j. Подстановка (1.1) в (1.3) с учетом (1.2), (1.4) дает выражение

$$2T = x^{\cdot T} M(x, u) x^{\cdot} + \sum \int\limits_{m_j} [2x^{\cdot T} A_j^T(x, u) + u^{\cdot T}] u^{\cdot} \, dm \qquad (1.5)$$

где $M(x, u)$ — массовая матрица всей системы, $M(x, u) = M^T(x, u) > 0$:

$$A_j(x, u) = A_{1j}(x) - g_j^*(u) A_{2j}(x) \qquad (1.6)$$

В потенциальной энергии системы будет учитываться только энергия упругих деформаций, которая имеет вид [2—5]:

$$2\Pi = \sum \int\limits_{V_j} u^T L_j(u) \, dV_j \qquad (1.7)$$

Здесь V_j — объем, занимаемый упругой частью звена j, $L_j(u)$ — дифференциальный определенно положительный векторный оператор, определяющий упругую силу, вид которого зависит от вида упругих элементов.

Диссипативную функцию, учитывающую потери энергии при упругих деформациях, приближенно можно представить в виде

$$U = \sum \int\limits_{V_j} u^{\cdot T} Q_j(l_j) u^{\cdot} \, dV_j \qquad (1.8)$$

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид [2]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_j'}{\partial u^{\cdot}} - \frac{\partial T_j'}{\partial u} = -\frac{\partial \Pi_j'}{\partial u} - \frac{\partial U_j'}{\partial u^{\cdot}} \qquad (1.9)$$

где T определено выражением (1.5), T_j', Π_j', U_j' — подынтегральные выражения в (1.3), (1.7), (1.8), F — вектор обобщенных сил, соответствующих координатам вектора x. Система (1.9) является гибридной. Она состоит из обыкновенного дифференциального уравнения (первое уравнение) и дифференциальных уравнений в частных производных (остальные уравнения); частные производные входят через слагаемые $\partial\Pi_j'/\partial u=L_j(u)$. Для приведения системы (1.9) к виду обыкновенных дифференциальных уравнений вводится преобразование

$$u(l_j, t)=\Phi_j(l_j)q_j(t) \tag{1.10}$$

где $\Phi_j(l_j)$ есть $3\times\infty$ матрица ортонормированных допустимых функций, а $q_j(t)$ — бесконечномерный вектор малых обобщенных «упругих» координат. Подстановка (1.10) в (1.5) с учетом соотношений

$$\int\limits_{m_j} \Phi_j^T(l_j)\Phi_j(l_j)dm=E=\mathrm{diag}[1, 1, \ldots]$$

следующих из условия ортонормированности, и обозначений (1.1), (1.6) и

$$P_j^T=\int\limits_{m_j}\Phi_j(l_j)dm, \quad H_j^T=\int\limits_{m_j} g_j^*(l_j, u)\Phi_j(l_j)dm$$

где P_j, $H_j=H_j(u)$ — матрицы коэффициентов влияния, приводит к следующему выражению

$$2T=x^{\cdot T}M(x, q)x^{\cdot}+\Sigma(2x^{\cdot T}N_j^T+q_j^{\cdot T})q_j^{\cdot} \tag{1.11}$$

$$q^T=(q_1^Tq_2^T\ldots q_k^T), \quad N_j=N_j(x, q_j)=P_jA_{1j}(x)+H_j(q_j)A_{2j}(x) \tag{1.12}$$

Выражение (1.11) можно привести к виду

$$2T=x^{\cdot T}[M(x, q)-\Sigma N_j^TN_j]x^{\cdot}+\Sigma(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot})^T(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot}) \tag{1.13}$$

В соответствии с (1.12):

$$N_j^TN_j=A_{1j}P_j^TP_jA_{1j}+A_{2j}^TH_j^TH_jA_{2j}+2A_{2j}^TH_j^TP_jA_{1j} \tag{1.14}$$

Для случая, когда $\Phi_j(l_j)$ удовлетворяет условиям полноты, имеют место соотношения [5]:

$$P_j^TP_j=m_j\,\mathrm{diag}\,[1, 1, 1], \quad H_j^TH_j=J_j(q_j), \quad H_j^TP_j=m_jg_{cj}^*(q_j) \tag{1.15}$$

С учетом (1.14), (1.15):

$$M(x, q)-\Sigma N_j^T(x, q_j)N_j(x, q_j)=M_r(x) \tag{1.16}$$

вследствие чего выражение (1.13) принимает вид

$$2T=x^{\cdot T}M_r(x)x^{\cdot}+\Sigma(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot})^T(N_jx^{\cdot}+q_j^{\cdot}) \tag{1.17}$$

Подстановка (1.10) в (1.7) дает выражение

$$2\Pi=\Sigma q_j^T\Omega_j^2q_j \tag{1.18}$$

$$\Omega_j^2=\mathrm{diag}[\Omega_{j1}^2, \Omega_{j2}^2, \ldots]=\int\limits_{V_j}\Phi_j^T(l_j)L_j[\Phi_j(l_j)]dV_j$$

где Ω_{j1}, Ω_{j2}, ... — собственные частоты колебаний упругой части e_j при неподвижной в инерциальном пространстве части r_j.

С помощью (1.10) выражение (1.8) преобразуется к виду

$$U=\sum q_j^{\cdot T}R_jq_j^{\cdot},\quad R_j=\int\limits_{V_j}\Phi_j^T(l_j)Q(l_j)\Phi_j(l_j)dV_j \tag{1.19}$$

Применение процедуры получения уравнений Лагранжа второго рода к функциям (1.11), (1.18), (1.19) дает систему уравнений

$$\begin{gathered}M(x,q)x^{\cdot\cdot}+\sum N_j^T(x,0)q_j^{\cdot\cdot}+\left\{M^{\cdot}(x,q)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[x^{\cdot T}M(x,q)]\right\}x^{\cdot}+\\
+\sum\left\{N_j^{\cdot T}(x,0)-\frac{\partial}{\partial x}[x^{\cdot T}N_j^T(x,0)]\right\}q_j^{\cdot}=F\\
q_j^{\cdot\cdot}+R_jq_j^{\cdot}+\Omega_j^2q_j+N_j(x,q_j)x^{\cdot\cdot}+N_j^{\cdot}(x,q_j)x^{\cdot}-\\
-x^{\cdot T}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}M(x,q)x^{\cdot}+\frac{\partial}{\partial q_j}N_j^T(x,q_j)q_j^{\cdot T}\right]=0\quad(j=1,2,\ldots,k)\end{gathered} \tag{1.20}$$

В первом уравнении в матрицах $N_j(x,q_j)$ аргумент q_j взят равным нулю в результате пренебрежения величинами порядка $q_j^Tq_j^{\cdot}$, $q_j^Tq_j^{\cdot\cdot}$. С помощью обозначений

$$\begin{gathered}N^T=[N_1^TN_2^T\ldots N_k^T],\quad q=[q_1^Tq_2^T\ldots q_k^T]^T\\
R=\operatorname{diag}[R_1R_2\ldots R_k],\quad \Omega^2=\operatorname{diag}[\Omega_1^2\Omega_2^2\ldots\Omega_k^2]\end{gathered} \tag{1.21}$$

уравнения (1.20) переписываются в виде

$$\begin{gathered}M(x,q)x^{\cdot\cdot}+N^T(x,0)q^{\cdot\cdot}+\left\{M^{\cdot}(x,q)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[x^{\cdot T}M(x,q)]\right\}x^{\cdot}+\\
+\left\{N^{\cdot T}(x,0)-\frac{\partial}{\partial x}[x^{\cdot T}N^T(x,0)]\right\}q_j^{\cdot}=F\\
q^{\cdot\cdot}+Rq^{\cdot}+\Omega^2q+N(x,q)x^{\cdot\cdot}+N^{\cdot}(x,q)x^{\cdot}-\\
-x^{\cdot T}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}M(x,q)x^{\cdot}+\frac{\partial}{\partial q}N^T(x,q)q^{\cdot}\right]=0\end{gathered} \tag{1.22}$$

С упругой системой будет сопоставляться система без учета упругости, описываемая уравнением

$$M(x,0)x^{\cdot\cdot}+\left\{M^{\cdot}(x,0)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[x^{\cdot T}M(x,0)]\right\}x^{\cdot}=F \tag{1.23}$$

для которой кинетическая энергия

$$2T_0=x^{\cdot T}M(x,\ 0)x^{\cdot} \tag{1.24}$$

Пусть работа исполнительных органов, формирующих управляющие воздействия, описывается уравнением

$$F^{\cdot}+\alpha F=f(r,\ p,\ w) \tag{1.25}$$

а выходные сигналы датчиков имеют вид

$$r^{\cdot}+\beta r=\varphi(x),\quad p^{\cdot}+\gamma p=\psi(x^{\cdot}) \tag{1.26}$$

где $f(r,\ p,\ w)$, $\varphi(x)$, $\psi(x^{\cdot})$ – непрерывные, удовлетворяющие условиям единственности решения функции, характеризующие нелинейности приборов, являющиеся нечетными функциями каждого аргумента при равенстве нулю остальных аргументов и обращающиеся в ноль только при равенстве нулю всех своих аргументов; α, β, γ — матрицы, связанные с постоянными времени приборов; w — вектор состояния компенсатора или динамического наблюдателя, в уравнение которого подставлено выражение входного воздействия, определяемый уравнением

$$w^{\cdot}=W(w, r, p) \tag{1.27}$$

где функция W обладает теми же свойствами, что и функция f из (1.25).

2. Устойчивость движения. Для системы (1.22) полная энергия определяется выражением

$$V'=T+\Pi \tag{2.1}$$

и удовлетворяет уравнению

$$V'^{\cdot}=x^{\cdot T}F-2U=x^{\cdot T}F-q^{\cdot T}Rq^{\cdot} \tag{2.2}$$

где в соответствии с (1.17) — (1.19), (1.21):

$$2T=x^{\cdot T}M_r(x)x^{\cdot}+(Nx^{\cdot}+q^{\cdot})^T(Nx^{\cdot}+q^{\cdot})$$
$$2\Pi=q^T\Omega^2q, \quad 2U=q^{\cdot T}Rq^{\cdot} \tag{2.3}$$

Функция T из (2.3) при $M_r(x)>0$ является определенно положительной. Следует заметить, что если хотя бы при одном из значений j масса r_j равна нулю, то матрица $M_r(x)$ не будет определенно положительной. При тех же условиях функция V' из (2.1) также является определенно положительной по отношению к координатам $x^{\cdot}$, q, $q^{\cdot}$.

Для системы (1.23), не учитывающей упругости,

$$V_0'=T_0, \quad V'^{\cdot}=x^{\cdot T}F \tag{2.4}$$

где T_0 дано в (1.24). Функции V_0', T_0 являются определенно положительными по отношению к координатам вектора $x^{\cdot}$.

Пусть в системе учитывается произвольное, но конечное число тонов упругих колебаний. Сформулируем теоремы устойчивости движения.

Теорема 2.1. Пусть для системы (1.22) $M_r(x)>0$, $R>0$. Тогда, если система (1.23), (1.25) — (1.27) (без учета упругости) удовлетворяет какой-либо теореме второго метода Ляпунова об устойчивости в некотором смысле с определенно отрицательной производной по времени $V_0^{\cdot}$ функции Ляпунова $V_0>0$, в которую вектор $x^{\cdot}$ входит только через слагаемое, пропорциональное $V_0'=x^{\cdot T}M(x)x^{\cdot}$, то положение равновесия системы (1.22), (1.25) — (1.27) (с учетом упругости) будет устойчивым в том же смысле.

Под некоторым смыслом устойчивости системы понимается асимптотическая устойчивость в малом, большом, целом, абсолютная устойчивость и т. п. нулевого положения равновесия.

Доказательство. Замена в V_0 слагаемого V_0' из (2.4), (1.24) на V' из (2.1), (2.3) при $M_r(x)>0$ дает определенно положительную для координат системы (1.22), (1.25) — (1.27) функцию V. Функция $V^{\cdot}$ для рассматриваемой системы будет знакоотрицательной (как видно из (2.2), не содержит q), обращающейся в 0 при $x=x^{\cdot}=0$, $q^{\cdot}=0$, $r=0$, $p=0$, $F=0$, $w=0$. (Это следует из определенной отрицательности $V_0^{\cdot}$ по отношению к системе (1.23), (1.25) — (1.27) и из сравнения (2.2) и (2.4)). Поэтому, если $V^{\cdot}\equiv0$, то $x^{\cdot}\equiv x^{\cdot\cdot}\equiv0$, $q^{\cdot}\equiv q^{\cdot\cdot}\equiv0$, а это, как следует из (1.22) дает $q\equiv0$. Тогда из теоремы Барбашина — Красовского следует асимптотическая устойчивость положения равновесия рассматриваемой системы (1.22), (1.25) — (1.27).

Теорема 2.2. Пусть для системы (1.22) выполняются следующие условия: а) $M_r(x)>0$, б) $R=0$, в) система (1.22) является локально полностью управляемой в начале координат по теоремам 2.1 или 2.2 работы [1]. Тогда, если система (1.23), (1.25) — (1.27) (без учета упругости) удовлетворяет какой-либо теореме второго метода Ляпунова об устойчивости в некотором смысле с определенно отрицательной производной по времени $V_0^{\cdot}$ функции Ляпунова $V_0>0$, в которую вектор $x^{\cdot}$ входит только через слагаемое, пропорциональное $V_0'=x^{\cdot T}M(x, 0)x^{\cdot}$, то начало координат системы (1.22), (1.25)–(1.27) (с учетом упругости) будет устойчивым в том же смысле.

Доказательство. Из равенства $V'^{\cdot}=V_0'^{\cdot}$ следует равенство $V^{\cdot}=V_0^{\cdot}$, следовательно, при $V^{\cdot}\equiv 0$ $x\equiv x^{\cdot}\equiv x^{\cdot\cdot}\equiv F\equiv 0$. Подстановка этих тождеств в (1.22) дает систему $N^T(0, 0)q^{\cdot\cdot}=0$, $q^{\cdot\cdot}+\Omega^2 q=0$. Отсюда следует, что условия отсутствия целых траекторий, отличных от начала координат системы (1.22), (1.25)–(1.27), где $V^{\cdot}\equiv 0$, совпадают с условиями локальной полной управляемости в начале координат по теоремам 2.1 и 2.2 работы [1]. Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть для системы (1.22) выполняется условие $M_r(x)>0$. Тогда, если система (1.23), (1.25)–(1.27) (без учета упругости) удовлетворяет теореме Барбашина – Красовского, причем вектор $x^{\cdot}$ входит в функцию Ляпунова V_0 только через слагаемое, пропорциональное $V_0'=x^{\cdot T}M(x, 0)x^{\cdot}$, а совокупность точек, где $V^{\cdot}=V_0^{\cdot}-q^{\cdot T}Rq^{\cdot}=0$, не составляет целых траекторий для системы (1.22), (1.25)–(1.27) (с учетом упругости) кроме точки 0, то эта точка будет асимптотически устойчивой для системы (1.22), (1.25)–(1.27).

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теорем 2.1, 2.2.

Пример. Пусть для системы (1.22)

$$F=-F_1(x)-F_2(x^{\cdot}) \tag{2.5}$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x^{\cdot})$ таковы, что $F_1(0)=F_2(0)=0$ и

$$V_1=\int x^{\cdot T}F_1(x)\,dt, \quad V_2=x^{\cdot T}F_2(x^{\cdot})$$

являются определенно положительными функциями. Зависимости $F_1(x)$, $F_2(x^{\cdot})$ определяются как видом выходных характеристик датчиков x и $x^{\cdot}$, так и видом закона управления.

Подстановка (2.5) в (1.23) с последующим умножением обеих частей уравнения слева на $x^{\cdot T}$ дает энергетическое уравнение $V_0^{\cdot}=-x^{\cdot T}F_2(x^{\cdot})$, $V_0=T_0+V_1$, где T_0 определено в (1.24). Из сравнения (2.2) и (2.4) для системы (1.22) следует, что

$$V^{\cdot}=V_0^{\cdot}-q^{\cdot T}Rq^{\cdot}=-x^{\cdot T}F_2(x^{\cdot})-q^{\cdot T}Rq^{\cdot} \tag{2.6}$$

Функция V_0 является определенно положительной и имеет требуемую для теоремы 2.3 структуру. Функция $V^{\cdot}$ является знакоотрицательной. $V^{\cdot}=0$ при $x^{\cdot}=0$ и $q^{\cdot}=0$ (если $R>0$). Тогда при $V^{\cdot}\equiv 0$ имеют место тождества $x^{\cdot}\equiv x^{\cdot\cdot}\equiv 0$, $q^{\cdot}\equiv q^{\cdot\cdot}\equiv 0$. Подстановка этих тождеств в (1.22) дает $q\equiv 0$, $x\equiv 0$. Таким образом, $V^{\cdot}\equiv 0$ только в начале координат. Тогда на основании теоремы 2.3 можно утверждать, что начало координат системы (1.22), (2.5) будет асимптотически устойчивым.

Пусть теперь $R=0$. Как следует из (2.6), $V^{\cdot}\equiv 0$ при $x^{\cdot}\equiv x^{\cdot\cdot}\equiv 0$, $x\equiv x_0\equiv \text{const}$. Эти тождества сводят систему (1.22), (2.5) к виду

$$N^T(x_0, 0)q^{\cdot\cdot}=-F_1(x_0), \quad q^{\cdot\cdot}+\Omega^2 q=0 \tag{2.7}$$

Второе уравнение показывает, что координаты вектора q изменяются синусоидально с переменными координатами вектора $q^{\cdot\cdot}$. В соответствии с теоремами 2.1, 2.2 работы [1] $q^T=[q_1^T q_2^T]$, где q_1, q_2 – соответственно управляемая и неуправляемая в точке x_0 составляющие вектора q. Тогда с учетом постоянства x_0 из первого уравнения (2.7) следует $q_1^{\cdot\cdot}\equiv q_1\equiv 0$, $x_0\equiv 0$. Следовательно, $V^{\cdot}\equiv 0$ при $x\equiv x^{\cdot}\equiv 0$, $q_1\equiv q_1^{\cdot}\equiv 0$. Это означает, что неуправляемые в точке $x=0$ координаты вектора q_2 не демпфируются. Если же система в точке $x=x^{\cdot}=0$ является полностью управляемой, то система (1.22), (2.5) является асимптотически устойчивой по отношению к началу координат.

На основании рассмотренного примера можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.4. Пусть для системы (1.22), (2.5) выполняются условия а) $M_r(x)>0$, б) $R>0$ или $R=0$, но система (1.22) является локально полностью управляемой в точке $x=x^{\cdot}=0$, в) $F_1(x)$, $F_2(x^{\cdot})$ таковы, что $F_1(0)=F_2(0)=0$ и $V_1=\int x^{\cdot T}F_1(x)\,dt$, $V_2=x^{\cdot T}F_2(x^{\cdot})$ являются определенно положительными функциями. Тогда нулевая точка системы (1.22), (2.5) будет асимптотически устойчивой.

Примечание. Теорема 2.4 будет выполняться также при $R \geqslant 0$, когда элементы матрицы R достаточно малы [1] и выполняются условия локальной полной управляемости системы (1.22) в нулевой точке.

3. Управляемость. Наличие положений равновесия системы (1.22) определяется кинематикой системы и видом управления $F(x, \dot{x})$. Пусть $F(x, \dot{x})$ выбрано так, что при $x \in G$, где G — некоторая область, имеется одно устойчивое положение равновесия $x = \dot{x} = 0$, $q = \dot{q} = 0$ $(F(0, 0) = 0)$ и возможно конечное количество ν неустойчивых положений равновесия $x = x_i^*$, $\dot{x} = 0$, $q = \dot{q} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, где $F(x_i^*, 0) = 0$. (Положения равновесия систем (1.22), (2.5) и (1.23), (2.5) имеют место при одних и тех же значениях x. Положения равновесия являются внутренними точками области G). Из теоремы 2,4 видно, что всегда можно подобрать такое управление $F(x, \dot{x})$, при котором, если траектории системы (1.22) не проходят через точки неустойчивых положений равновесия и выполняются условия локальной полной управляемости в начале координат, то положение устойчивого равновесия будет асимптотически устойчивым. Поскольку система без учета упругости (1.23) является глобально управляемой, так как по каждой степени свободы имеется независимое управление, то систему (1.22) всегда можно вывести за счет управления из положений неустойчивого равновесия. Это означает, что систему (1.22) всегда можно привести за конечное время в малую окрестность начала координат ограниченным управлением. Если к тому же система (1.22) является локально полностью управляемой в начале координат, то на основании [6, 7] с учетом симметрии $t \to -t$ (t — время) для рассматриваемой системы можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.1. Рассматривается система (1.22) с управлением $F(x, \dot{x})$ во всех сочленениях звеньев, формирующим в многообразии $x \in G$ единственное устойчивое положение равновесия и возможно конечное количество неустойчивых положений равновесия. Тогда, если $M_r(x) > 0$ и выполняются условия локальной полной управляемости в положении устойчивого равновесия, то область нуль-управляемости совпадает с областью G.

Следствие. Если для системы (1.22) условия локальной полной управляемости выполняются в каждой точке области G, то система (1.22) будет полностью управляемой в области G.

Заключение. 1. Получены простые критерии управляемости сложной механической системы с упругими конечными звеньями.

2. Сформулированные критерии устойчивости не требуют знания динамических характеристик упругих частей системы или нуждаются в минимальной информации о них.

3. Доказанные теоремы устойчивости сводят задачу исследования устойчивости упругой системы к задаче исследования устойчивости той же системы, но без учета упругости, что существенно упрощает задачу.

4. Используя методологию [1], теоремы, аналогичные теоремам 2.1, 2.3, 2.4, можно доказать и без дискретизации распределенной части системы, а оперируя уравнениями в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапенко Е. М.* Наблюдаемость, управляемость и устойчивость сложных механических систем с упругими конечными звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 9–16.
2. *Мирович Л.* Исследование устойчивости вращающегося тела, содержащего упругие части, прямым методом Ляпунова // Ракетн. техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 7. С. 11–20.
3. *Мирович Л., Калико Р. А.* Сравнение методов исследования устойчивости для нежестких спутников // Ракетн. техника и космонавтика. 1973. Т. 11. № 1. С. 108–117.
4. *Meiravitch L.* Liapunov stability analysis of hybrid dynamical systems with multi-elastic domains // Intern. J. Non-Linear Mech. 1972. V. 7. No. 4. P. 425–443.
5. *Hughes P. C.* Modal identities for elastic bodies, with application to vehicle dynamics and control // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1980. V. 47. No. 1. P. 177–184.
6. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
7. *Каюмов О. Р.* О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.

Запорожье

Поступила в редакцию
3.VII.1989