

Д. С. ЖУКОВ, И. Б. ПЕТРОВ, А. Г. ТОРМАСОВ

### ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

В последние годы наблюдается высокая активность в исследованиях, направленных на выявление возможности использования акустических волн длительностью 0,1–10 мкс, интенсивностью  $10^6$ – $10^8$  Па, для разрушения почечных камней с целью выведения их из организма без хирургического вмешательства (экстракорпоральный метод лечения с помощью ударно-волновой литотрипсии). Ранее были проведены физико-биологические исследования, показавшие безопасность (в рамках известных механизмов воздействия на организм) проведения лечения таким образом с использованием литотрипторов, формирующих плоский фронт ударных акустических волн<sup>1</sup>.

Цель настоящих исследований заключалась в выборе таких режимов работы литотриптора, при которых фрагментация камней при их разрушении была бы максимальной. Для выбора оптимального режима работы литотрипторов (длительность, интенсивность, количество ударных импульсов, форма фронта волны в акустическом пучке, возбуждаемом в искровой камере, заполненной жидкостью) необходимо исследовать физические принципы разрушения твердых включений в теле биообъекта, на 85% состоящего из воды. Исследования проводились путем экспериментальной проверки разрушения почечных камней в дистиллированной воде и численного моделирования рассматриваемого процесса разрушения.

1. Опишем коротко методы численного и экспериментального моделирования твердых включений в жидкости.

Для численного моделирования используется сеточно-характеристический метод решения систем уравнений гиперболического типа, предложенный в [1], разработанный для решения динамических задач механики деформируемого твердого тела в [2] (примеры численного решения некоторых задач, в том числе совместных с газодинамическими, можно найти в [2–5]). Выбор данной разностной схемы обусловлен ее важнейшими свойствами, необходимыми при численном решении ударно-волновых задач (особенно в случае наличия контактных границ – в данном случае твердое тело – жидкость), – монотонностью и минимальной аппроксимационной вязкостью, возможностью естественным образом строить вычислительные алгоритмы на границах области интегрирования и контактных границах.

Для математического описания поведения рассматриваемых в задаче сред используется нестационарная система уравнений МСС, включающая два уравнения движения, четыре реологических соотношения (в случае твердого тела), связывающих компоненты тензоров напряжения и деформации, уравнение состояния:

$$\rho v^{*i} = \nabla_k \sigma^{ik}, \quad \sigma_{ij}^* = Q_{ij}{}^{kl} \nabla_k v_l \quad (1.1)$$

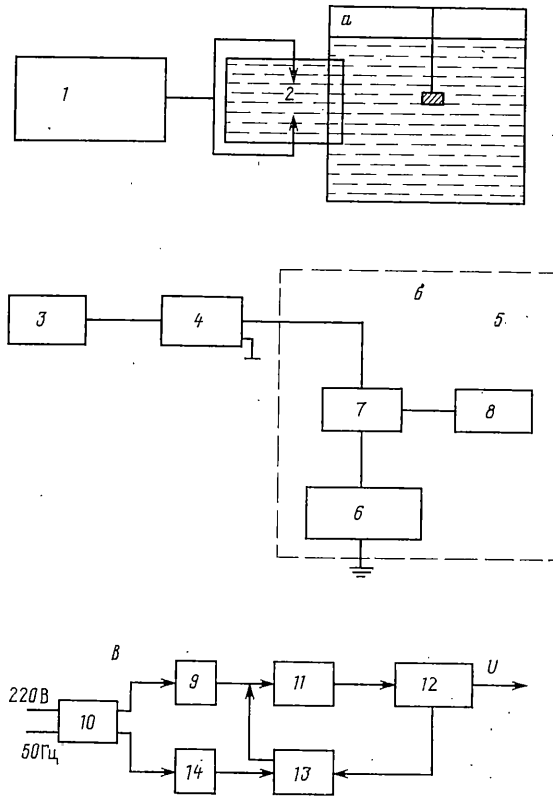
$$Q_{ij}{}^{kl} = \Lambda g^{kl} + \mu (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) - N k^{-2} (\lambda k k_p' g_{ij} - \mu S_{ij}) s_{kl},$$

$$\Lambda = \lambda (1 - 4k_p' k L) g_{ij} - 2\mu S_{ij} L, \quad \bar{K} = K / (1 - K / \mu (k_p')^2)$$

$$L = 1/4 \bar{K} k_p' \mu^{-1} K^{-1}, \quad N = 1 + 4\bar{K} (k_p')^2 \mu^{-1}, \quad S_{ij} = 2s_{ij} - 4/3 k k_p' g_{ij}$$

Здесь  $v^i$  ( $i=1, 2$ ) – компоненты вектора скорости смещения,  $\rho$  – плотность,  $\sigma_{ij}$ ,  $s_{ij}$  – компоненты тензора напряжений и его девиатора (для воды  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $p = -\sigma_k^k / 3$  – гидродинамическое давление),  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $\lambda$ ,  $\mu$  – постоянные Ламэ (для воды  $\mu=0$ ),  $K$  – коэффициент всестороннего сжатия,  $k$  – предел текучести на чистый сдвиг (для воды  $k=0$ ),  $g_{ij}$  – компоненты

<sup>1</sup> Жуков Д. С. Способ неконтактного разрушения конкрементов в теле биообъекта: А. С. 1263234 МКИ А61В 17/22 // Б. И. 1986. № 38. С. 8.



Фиг. 1

Фундаментального тензора,  $\delta_i^j$  — символ Кронеккера,  $\nabla_i$  — ковариантная производная по  $i$ -ой координате; условие текучести Мизеса — Шлейхера:

$$f = s^{ij}s_{ij} - 2k^2(p) = 0 \quad (1.2)$$

$$k(p) = k_0 + ap \quad (1.3)$$

Выражения для  $Q_{ij}^{hl}$  получаются из вида функции  $\Psi$ , входящей в ассоциированный закон

$$\varepsilon_{ij}^* p = \Psi \partial f / \partial \sigma_{ij}, \quad (1.4)$$

$$\Psi = 1/4 [1 + (k_p')^2 \mu^{-1} K'] s^{hl} \varepsilon_{hl}^* k^{-2+1/4} K' k_p' \mu^{-1} k^{-1} \varepsilon_{.k}^{.h} \quad (1.5)$$

$$k_p' = \partial k(p) / \partial p$$

причем для вывода (1.5) использовались известные соотношения:

$$e_{ij}^p = 1/2 s_{ij} \mu^{-1}, \quad p = K(\varepsilon^e) \cdot k^* \quad (1.6)$$

$$e_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e - 1/3 (\varepsilon^e) \cdot k^* g_{ij} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e \quad (1.8)$$

— закон Гука (1.6), определение дивергента тензора деформаций (1.7), гипотеза аддитивности (1.8);  $\varepsilon_{ij}^p, \varepsilon_{ij}^e$  — компоненты тензоров пластической и упругой деформации, и (1.4). Система (1.1) записывается в матричном виде

$$\partial u / \partial t + A^h \partial u / \partial x^h = f, \quad u \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}\} \quad (1.9)$$

— вектор искомых функций;  $f$  — вектор-столбец правых частей,  $A^k$  — квадратные матрицы  $6 \times 6$ , вид которых приведен в [2];  $t$  — время,  $x^k$  — пространственные координаты. Алгоритм расчета искомых функций во внутренних и граничных точках области интегрирования представлен в [2], контактных границ — в [6].

2. Установка для экспериментальной проверки режимов разрушения почечных камней включает регулируемый генератор высоковольтных импульсов (ГВИ, 16–25 кВ, номер на фиг. 1 — 1), искровую камеру (ИК — 2) и резервуар с почечным камнем, заполненный дистиллированной водой (фиг. 1, а). ГВИ имеет в составе высоковольтный источник электропитания (ВИЭП — 3), накопитель энергии (НЭ — 4), формирователь импульсов (ФИ — 5) — фиг. 1, б. ВИЭП заряжает накопительный элемент, который разряжается на разрядники искровой камеры (ИК — 6), создавая пробой в жидкости — коронный разряд. Период следования импульсов и момент их появления задается устройством управления разрядником (УУ — 7) через ключевой элемент (КЭ — 8) — управляемый разрядник. Частота следования импульсов (0,2–1) гц, амплитуда генерируемых акустических импульсов (10–200) атм, длительность импульсов (0,1–1) мкс.

ВИЭП имеет в составе: нестабилизированный источник постоянного напряжения (ИН — 9), понижающий трансформатор (ТВИ — 10), инвертор (И — 11), высоковольтный трансформаторно-выпрямительный модуль (ВТМ — 12), узел управления (УУ — 13), формирующий необходимые импульсы управления, регулирования и стабилизацию выходных импульсов, сервисный источник электропитания (СИ — 14). Для изменения формы фронта волны использовались два концентратора — эллиптический и параболический.

3. Постановка задачи. В качестве начальных условий задачи бралось невозможное состояние камня и жидкости, т. е.

$$u(0, x_1, x_2) = 0, \quad 0 \leq x_{1,2} \leq 0,05 \text{ м} \quad (1.10)$$

на боковой и нижней границах области интегрирования ставились условия сноса, на оси  $Ox_1$  — условия симметрии (см., например, [3]), верхняя граница камня и жидкости нагружаются прямоугольным импульсом давления, т. е. для жидкости (индекс  $L$ ) и для камня (индекс  $K$ ), соответственно:

$$p(t, x_1) = \begin{cases} p_L & \text{при } t \leq \tau_i \\ 0 & \text{при } t > \tau_i \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\sigma_{22}(t, x_1) = \begin{cases} -p_K & \text{при } t \leq \tau_i \\ 0 & \text{при } t > \tau_i; \quad \sigma_{12} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь  $\tau_i$  — время действия импульса. При этом  $p_L \neq p_K$  вследствие разности акустических жесткостей камня и жидкости; их отношение легко вычисляется: см., например, [6].

На нижней и боковой контактных границах камень — жидкость ставились условия скольжения (алгоритм расчета контактных границ изложен в [6]):

$$\sigma_{22}^k = -p^L, \quad \sigma_{12}^k = 0, \quad V_2^k = V_2^L \quad (1.13)$$

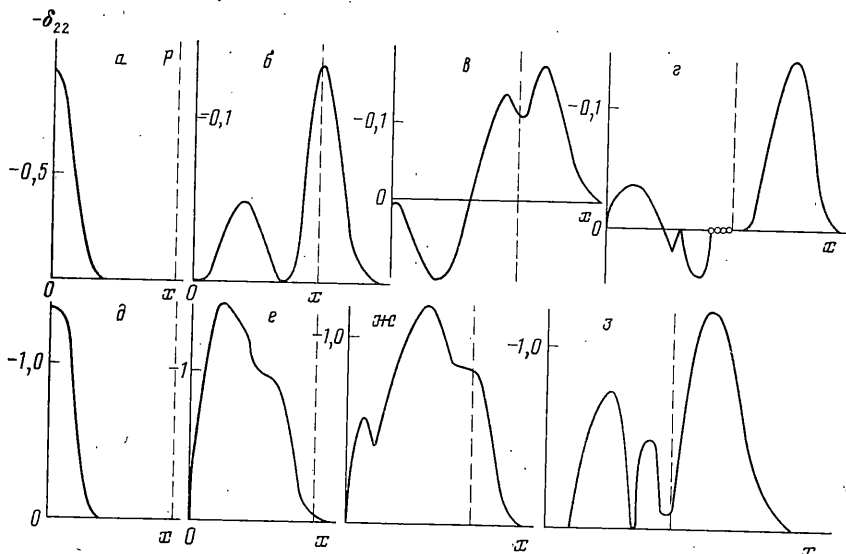
$$\sigma_{11}^k = -p^L, \quad \sigma_{12}^k = 0, \quad V_1^k = V_1^L \quad (1.14)$$

(индексы  $K$  и  $L$  относятся, соответственно, к камню и жидкости).

Рассмотрим некоторые результаты численного моделирования разрушения почечного камня при действии ударной волны, инициируемой искровым разрядом. Прочностные характеристики камня брались следующими:

$$\lambda_k = 0,384 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu_k = 0,25 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

$$\rho_k^0 = 1,33 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad k_0^p = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}, \quad k_0^c = 8 \cdot 10^6 \text{ Па}$$



Фиг. 2

( $k_0^p$  и  $k_0^c$  — пределы текучести при растяжении и сжатии), коэффициенты в (1.3):  $a=0$  (растяжение),  $a=0,1$  (сжатие);  $\sigma_V = 1,5 \cdot 10^6$  Па (откольная прочность камня),  $H_k = R_k = 3 \cdot 10^{-2}$  м (толщина и радиус дискообразного камня); для жидкости принималось:  $\lambda_L = 2,6 \cdot 10^9$  Па,  $\mu_L = 0$ ,  $\rho_L^0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Характерные величины в (1.1) выбирались следующими:

$$\rho_* = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \sigma_* = 10^7 \text{ Па}, \quad L_* = 10^{-1} \text{ м} \quad (1.15)$$

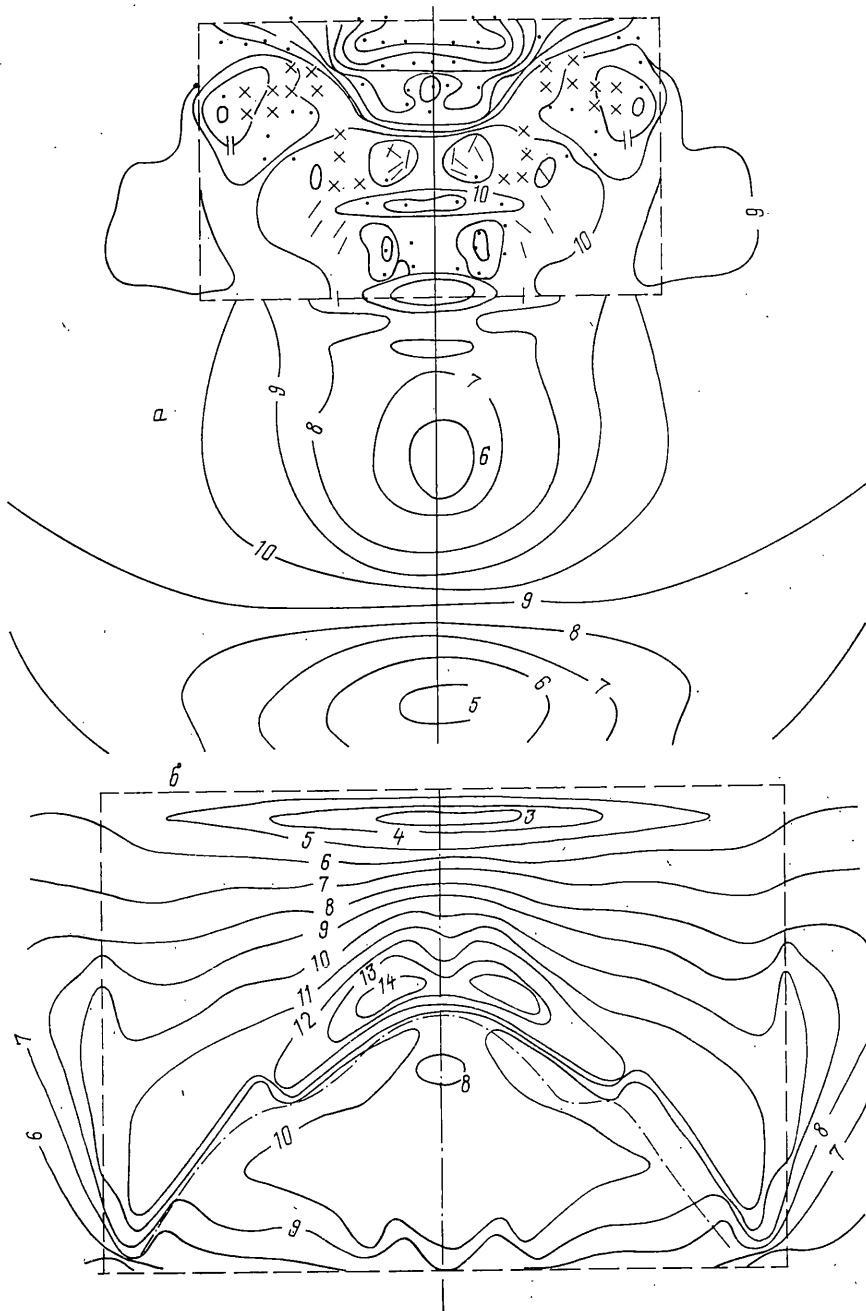
Обезразмеривание проводилось аналогично тому, как это делалось в [2].

Считается, что камень хрупкоразрушаемый, т. е. в нем могут происходить разрушения двух типов: откольные и на сдвиг (см., например, [7, 8]). Откольное разрушение учитывается при помощи простого критерия разрушения  $\sigma_1 \geq \sigma_V$  (соответствующая вычислительная процедура подробно описана в [7];  $\sigma_1$  — любое из трех главных напряжений). Сдвиговое разрушение происходит при выполнении критерия (1.2) (см., например, [7–9], т. е. при сжатии в теле, разрушенном на сдвиг, среда ведет себя как упругоэластическая с пределом текучести, зависящим от гидродинамического давления ([8, 9]), при растяжении —  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$  (т. е. среда не держит растягивающих напряжений, а критерием разрушения служит условие Мизеса — Шлейхера).

На фиг. 2, а–г показано распространение упругой и упругоэластической волн, соответственно, по камню (данные представлены для точек оси диска, направление распространения совпадает с осью  $Ox_2$ , размер диска ограничен осью и пунктирной линией), затем — волн сжатия в жидкости. На фиг. 2, а представлено распространение упругого импульса сжатия по камню; на фиг. 2, б импульс проходит в жидкость и образуется второй импульс — в результате взаимодействия радиальных волн сжатия, идущих к оси симметрии из жидкости; на фиг. 2, в видно, что в результате взаимодействия первого и второго импульсов с соответственно, нижней и верхней поверхностями камня, образовались волны разгрузки; на фиг. 2, г — что образование растягивающих напряжений приводит к отколам (в точках, отмеченных кружочками).

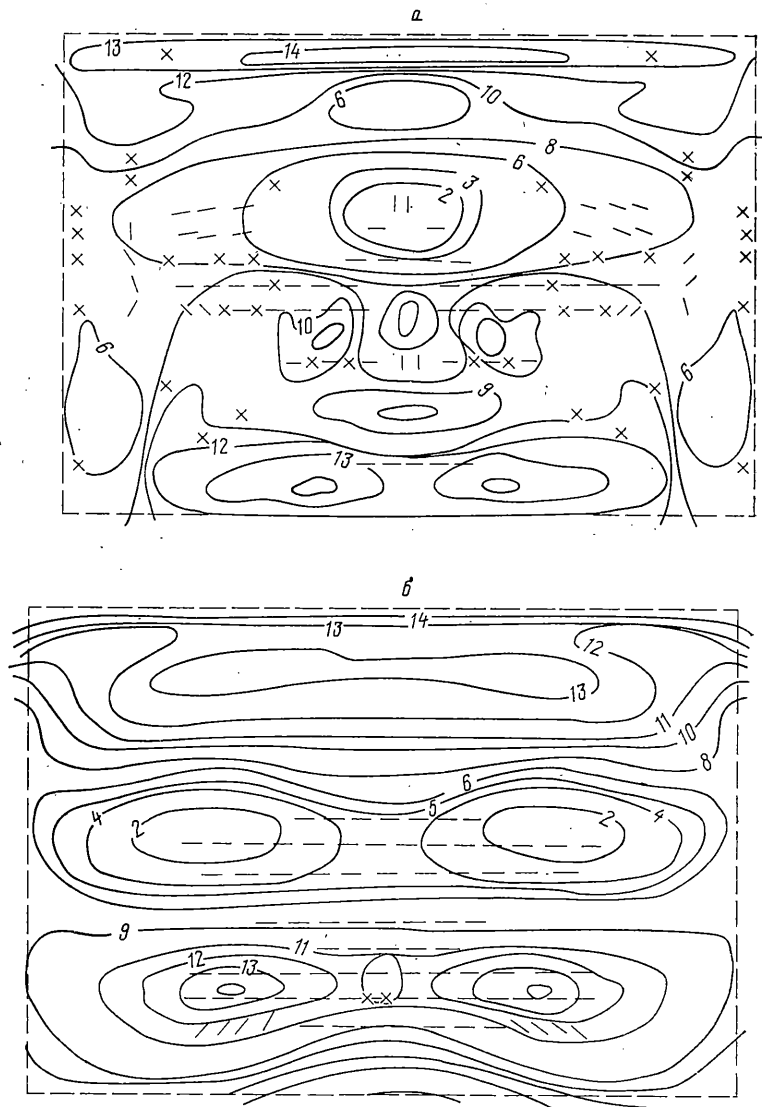
На фиг. 2, д, е показано распространение по камню импульса большой деятельности и интенсивности; в этом случае образуется упругий предвестник и волна сдвигового разрушения, следующего за ним. На фиг. 2, ж представлено распространение импульса сжатия через контактную поверхность камень — жидкость и образование волны разгрузки; на фиг. 2, и видно распространение «первичного» импульса и образование «вторичного» — в результате взаимодействия волн сжатия с границей камней. Отметим, что в первом случае реализуется механизм откольного разрушения (в волнах растяжения), во втором — сдвигового — в волнах сжатия.

Указанные механизмы являются причиной разрушения камня при всех рассмотренных режимах воздействия; в расчетах и экспериментах изменялись: форма фронта волны сжатия (плоская или сферическая; в эксперименте для этого использовались два вышеупомянутых концентратора), интенсивность и длительность импульсов, их количество.



Фиг. 3

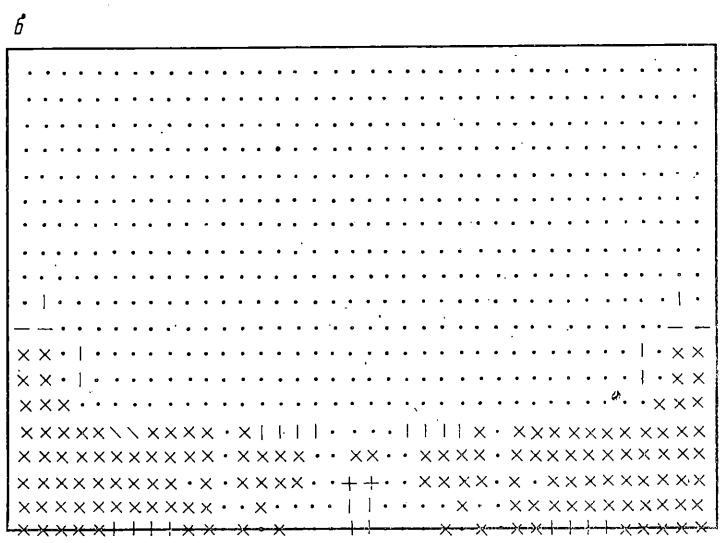
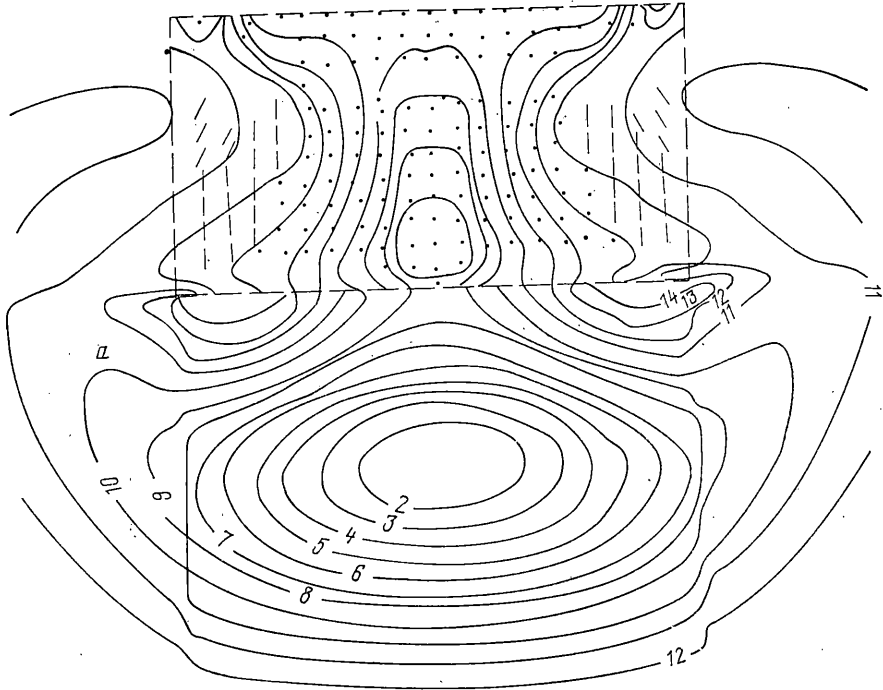
Нежелательными результатами воздействия импульсов на диск являются: образование фрагментов без разрушения или радиальных отколов, характерная особенность которых — также образование фрагментов (т. к. радиальные трещины расходятся от оси симметрии к краям диска). Желаемый результат — сдвиговые разрушения (т. е. дробление камня); т. к. в этом случае фрагменты имеют минимальные размеры. На фиг. 3—5 сдвиговые разрушения показаны точками, радиальные отколы — крестиками, другие отколы — черточками, указывающими ориентацию откола (см., например, [7]).



Фиг. 4

На фиг. 3а, б представлен результат разрушения камня после распространения по нему сферической волны с радиусом кривизны 0,015 м, длительностью 1 мкс и интенсивностями 50 МПа и 6 МПа ( $P_k$ ), соответственно. В момент времени  $t = 0,144 \cdot 10^{-4}$  с (фиг. 3) показаны изобары (кривые 1–10 соответствуют равномерно распределенным напряжениям от  $-0,615 \cdot 10^2$  до  $-2,52 \cdot 10^2$  МПа) и зоны разрушения. Видно, что в этом случае происходит образование фрагментов значительных размеров и довольно протяженных зон радиальных трещин; образование двух зон концентрации давления в жидкости объясняется прохождением волны сжатия из камня в жидкость и дифракционными явлениями (огнание камня волнами сжатия, распространяющимися в жидкости).

На фиг. 3, в при  $t = 0,225 \cdot 10^{-4}$  с представлены изобары (кривые 1–14 соответствуют значениям  $-0,186$ – $0,123 \cdot 10^2$  МПа, количество импульсов – 10), и зона образования радиальных трещин – между нижней поверхностью диска и штрихпунктирной кривой. Как видно, эти режимы считать приемлемыми нельзя. Отметим, что расчеты показали образование радиальных отколов при действии сферической волны сжатия на камень, при всех реально достижимых амплитудах импульсов (до 100 МПа) и длительностях до «резонансной» ( $\tau_i = T$ ,  $T$  – время распространения упругой волны по толщине камня).



Фиг. 5

На фиг. 4, а показаны изобары и картины разрушения камня в случае воздействия аналогичного, представленному на фиг. 3, б, но с плоским фронтом волны, действующим на всю верхнюю поверхность камня. В этом случае в основном образуются сдвиговые разрушения, образовавшиеся в волнах положительных напряжений (они не показаны точками, чтобы не загромождать рисунок); они произошли во всех узлах сетки, кроме тех, в которых произошли отколы; этот режим можно считать приемлемым для реализации.

В расчете, результаты которого приведены на фиг. 4, б, искусственно «отключен» механизм разрушения на сдвиг (что можно сделать только при математическом моделировании процесса), чтобы было видно, как действует откольный механизм в «чистом виде»; видно образование тонких дисков — тыльных отколов (число импуль-

сов - 10), между которыми на границе диска происходит (при «включении» механизма сдвиговых разрушений) дробление ( $t=40$  мкс).

На фиг. 5, а показаны изобары (для камня - изоповерхности  $\sigma_{22} = \text{const}$ ) после распространения по диску импульса сжатия длительностью 5 мкс, интенсивностью 15 МПа (кривые 1-14 соответствуют значениям  $-0,97 \cdot 10^2 - 0,549 \cdot 10^{-1}$  МПа) и зоны разрушения, основную часть которых составляют сдвиговые; реализуются также кольцевые отколы (вертикальные черточки), не являющиеся столь опасными, как радиальные. На этом же рисунке видно образование дифракционных явлений (огибание диска волнами сжатия); данный режим также можно рекомендовать к реализации в медицинской практике.

Существенно отличается картина разрушений в случае воздействия на диск серии из 10-ти микросекундных импульсов той же интенсивности - фиг. 5, б (интервал между импульсами тот же). В основном, как и ранее, образуются сдвиговые разрушения, однако по краям ввиду видно образование зоны радиальных отколов, что может привести к образованию небольших фрагментов (радиальные трещины, расположенные ближе к оси симметрии, не опасны, т. к. там же реализуются сдвиговые разрушения и другие отколы). Еще лучшие результаты показал расчет, проведенный для импульса той же интенсивности с плоской формой фронта, но большей длительностью - 20 мкс - в этом случае диск оказывается полностью раздробленным (или разрушенным на сдвиг); аналогичный результат получен при расчете действия короткого (1 мкс), но мощного (50 МПа) плоского импульса (случай сферического импульса той же амплитуды рассмотрен ранее - см. фиг. 3, а).

В эксперименте на ранее описанной установке были реализованы режимы, представленные на фиг. 3, а, 4, а; в первом случае, как и в расчете, наблюдалось образование фрагментов значительных размеров (т. е. режим нежелательный), во втором - образовались мелкие фрагменты, приемлемые для медицинской практики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических отношений. Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1963. Т. 9. № 2. С. 373-386.
2. Петров И. Б., Холодов А. С. Численные исследования некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом. Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24. № 5. С. 722-739.
3. Кондауров В. И., Петров И. В. Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуального разрушения. ДАН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1344-1347.
4. Петров И. Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины. Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 118-124.
5. Короткин П. Н., Петров И. Б., Пирогов В. Б., Холодов А. С. О численном решении связанных задач сверхзвукового обтекания деформируемых оболочек конечной толщины. Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 8. С. 1233-1243.
6. Петров И. Б., Гормасов А. Г., Холодов А. С. О численном изучении процессов в деформируемых средах многослойной структуры. Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 89-95.
7. Майнчен Д., Сак С. Метод расчета «Тензор». Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 185-211.
8. Замышляев В. В., Евгерев Л. С., Вовк А. А. и др. Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок. Киев: Наук. думка, 1984. 279 с.
9. Григорян С. С. Об основных представлениях механики грунтов. ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057-1072.

Москва

Поступила в редакцию  
7.IV.1988