

УДК. 539.3

© 1991 г.

С. И. ДОМБРОВСКИЙ, Д. С. ЕЛЕНЕВСКИЙ, П. Д. КУЗНЕЦОВ,  
Л. И. ФРИДМАН, Ю. Н. ШАПОШНИКОВ

## ОБ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕОРИЙ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Изучение колебаний цилиндрических тел имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение. Почти все известные методы расчета колебаний колес и других дисковых элементов построены на классической теории колебаний круглых пластин, основанной на гипотезе Кирхгофа — Лява. Недостаточная точность стилизует развитие методов, основанных на более совершенных моделях (модель Тимошенко), либо отказ от всяких кинематических гипотез и переход к расчетам на основе уравнений динамической теории упругости [1]. В обоснование таких путей построения расчета колебаний колес лопаточных машин проведено исследование области применения теорий колебаний круглых пластин (модель Кирхгофа — Лява, модель Тимошенко) и решения динамической задачи теории упругости. В отличие от известных работ [2, 3], где сопоставляются результаты вычисления для осесимметричных колебаний сплошных цилиндров, проведенное исследование распространено на неосесимметричные колебания полых цилиндров. Достоверность вычислений подтверждается сопоставлением с экспериментом для двух вариантов размеров пластин.

**1. Расчетные методы определения частот.** Программа вычислений частот и форм собственных колебаний упругого цилиндра построена на основе решения динамической задачи теории упругости для конечного цилиндра [3]. Частотный определитель получен из условия разрешимости усеченной системы линейных однородных алгебраических уравнений порядка  $6N$ , где  $N$  — число удерживаемых слагаемых в рядах, в которых строится решение.

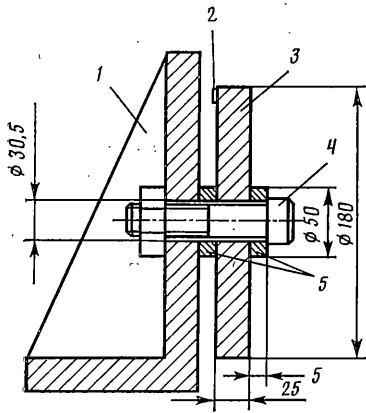
Сравнительная простота вычисления частот кругового цилиндра позволяет провести широкие исследования сходимости вычислений, сравнение с экспериментом и с результатами вычислений другими методами.

Реализована также программа вычисления собственных частот резонансным методом приложении на внешней боковой поверхности либо на торцевых поверхностях гармонической нормальной нагрузки. В безразмерных цилиндрических координатах  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  (координата  $z$  отсчитывается от одного из торцев), отнесенных к радиусу внешней граничной поверхности  $R$ , нагрузка на боковой поверхности задается в виде  $S_\rho = A \cos \mu_n z \cos m\varphi \cos \omega t$ , здесь  $\mu_n = n\pi/z_0$ ,  $n$  принимает поочередно  $N$  значений:  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $t$  — безразмерное время,  $\omega$  — безразмерная частота,  $z_0$  — безразмерная высота цилиндра, отнесенная к радиусу  $R$  внешней поверхности.

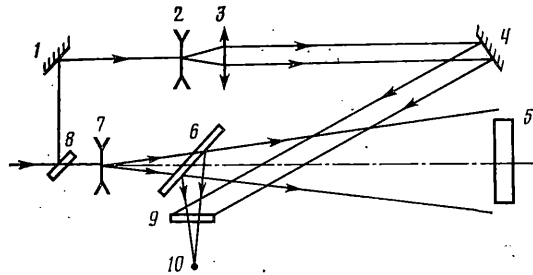
Рассматривалось также возбуждение цилиндра нагрузкой, приложенной к торцу  $S_z = BW_k(\rho h_k) \cos m\varphi \cos \omega t$ . Здесь  $w_k(\rho h_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) ортогональная система функций от  $\rho$  [4, 5],  $h_k$  — собственное значение. В правых частях соответствующих уравнений появляются числа  $A$  либо  $B$ . Решение системы и последующее вычисление перемещений в зависимости от частоты  $\omega$  возбуждения позволяет выявить резонансные частоты, совпадающие с собственными. Резонансный метод использовался как дополнительный, контрольный.

В дальнейшем следует иметь в виду, что форма цилиндра характеризуется безразмерной высотой цилиндра  $z_0$  и радиусом внутренней граничной поверхности  $\rho_1$ , отнесенными к внешнему радиусу  $R$  ( $\rho_2 = 1$ ). Форма колебаний и безразмерная частота  $\lambda_{i,m}$  характеризуется двумя числами  $i$  и  $m$ ,  $i$  — порядковый номер частоты (формы) при фиксированном  $m$ ,  $m$  — число узловых плоскостей (диаметров).

Программа вычислений собственных частот по теории колебаний пластин (модель Тимошенко) построена на основе зависимостей, приведенных в [6]. Задача сводится к системе линейных однородных алгебраических уравнений, но в отличие от решения динамической задачи теории упругости, система конечна: в случае неосесимметричных колебаний кольцевой пластины порядок системы равен шести, сплошной — трем, для осесимметричных колебаний соответственно четырем и двум. Условия разрешимости однородной системы дает частотное уравнение. Корректирующий коэффициент сдвига подсчитывается из уравнения [7]:  $16(1-\eta^2)(1-1/2(1-2\nu)\eta^2/(1-\nu)) = (2-\eta^2)^2$ , здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона.



Фиг. 1



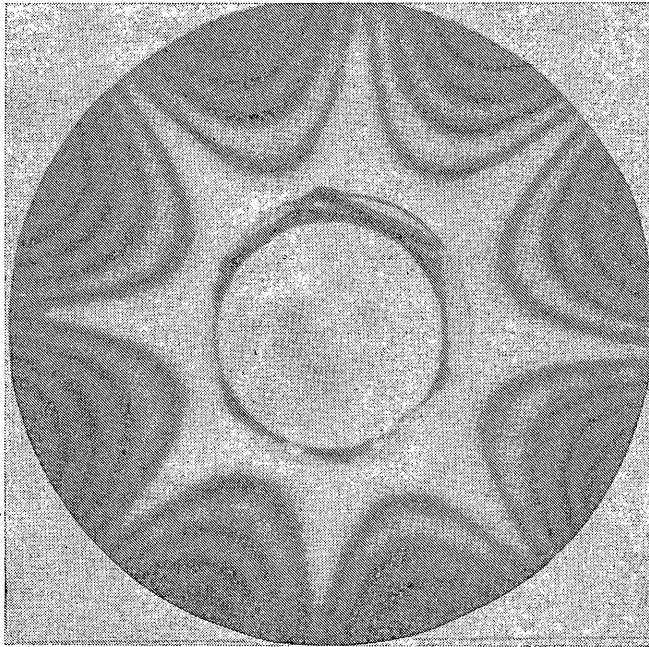
Фиг. 2

Если не принимать специальных мер, то при перерождении цилиндра в оболочку либо пластину возникают трудности при вычислениях по программе, реализующей решения динамической задачи теории упругости. Они связаны с ограниченными возможностями ЭВМ при вычислении модифицированных функций Бесселя (при перерождении в пластину) и гиперболических функций (при перерождении в оболочку) от больших значений аргументов. Эти трудности могут быть преодолены нормированием соответствующих величин методами, описанными (для подобных задач) в [8]. Там же дается физическая интерпретация возникающих при вычислении ситуаций, которая, благодаря наглядности, способствует разработке эффективных мер по преодолению вычислительных трудностей.

Сходимость вычислений зависит от формы рассматриваемого цилиндра и рассматриваемой частоты. Хуже других сходится вычисление низшей частоты, какой является  $\lambda_{1,2}$ . Так, например, для  $z_0=0,2$  и  $\rho_1=0,3$  при удержании  $N=5$  слагаемых  $\lambda_{1,2}=0,349297$ , при  $N=8-\lambda_{1,2}=0,299787$ , при  $N=10$   $\lambda_{1,2}=0,29059$ . При  $z_0>0,3$  сходимость улучшается: для  $z_0=0,7$  при  $\rho_1=0,3$  при  $N=2$   $\lambda_{1,2}=0,8923$ , а при  $N=5$   $\lambda_{1,2}=0,891556$ . Область применения теории колебаний пластин (модель Тимошенко и модель Кирхгофа – Лява) может быть определена из сравнения с результатами, получаемыми методами теории упругости.

**2. Экспериментальные методы определения частот.** Исследования частот круглых пластин проводились методом усредненной во времени голографической интерферометрии [9]. Исследовались колебания пластин как свободных, так и закрепленных по внутреннему диаметру. Схема крепления и геометрические размеры пластины и элементов крепления показаны на фиг. 1. Исследуемая пластина 3 через центральное отверстие с помощью болта 4 и шайб 5 крепилась к массивному треугольнику 1, который устанавливался на платформе голографического стенда. Возбуждение колебаний осуществлялось пьезоэлектрическим элементом 2 (диаметр 20 мм, толщина 0,8 мм), выполненным из материала ЦТС-19, наклеенным на периферии пластины. Масса пьезоэлемента, равная 1,4 грамма, ввиду своей малости не должна оказывать заметного влияния на собственные частоты и формы колебаний пластин. Момент резонанса определялся по методике, подробно описанной в [10]. На каждой резонансной частоте методом усреднения по времени регистрировались голограммы. Оптическая схема записи голограмм приведена на фиг. 2. Голограммы записывались в скрещенных пучках. Опорный пучок, формируемый светоделителем 8, зеркалами 1 и 4, коллимировался линзами 2 и 3. Исследуемая пластина 5 освещалась с помощью линзы 7 расходящимся пучком. Ось пластины совмещалась с оптической осью пучка освещения. Точка наблюдения 10, устанавливаемого из голограммы 9 изображения, также располагалась на оси освещающего пучка и совпадала с точкой освещения до объекта значительно превышало диаметр объекта, с тем чтобы можно было пренебречь изменением вектора чувствительности к оптической схеме в зависимости от расположения наблюдаемой точки изображения относительно оптической оси.

Интенсивность при восстановлении голограмм интерференционных картин, вибрирующих по синусоидальному закону объектов, описывается выражением  $J_0^2[D(\rho, \varphi)k]$ , где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, аргументом которой является скалярное произведение вектора вибро смещения  $D(\rho, \varphi)$  и вектора чувствительности  $k$  [10]. Типичная интерференционная картина, наблюдаемая при регистрации колеблющейся на резонансной частоте круглой пластины приведена на фиг. 3. Наиболее яркие полосы на этой картине соответствуют узловым плоскостям.



Фиг. 3

Эта картина позволяет четко идентифицировать форму колебаний, определив число узловых плоскостей.

Следует отметить, что любой реальный объект обладает асимметрией из-за неоднородности материала, неточности изготовления и т. п., которая приводит к некоторому расслоению собственных частот и форм колебаний. Если величина этого расслоения достаточно велика (достигает долей процента), то фиксируются обе частоты. В случае малого расслоения при возбуждении колебаний объекта на частоте, лежащей в интервале между расслоившимися частотами, возбуждаются одновременно обе расслоившиеся формы колебаний, и регистрируемая интерференционная картина, не всегда позволяет установить этот факт. С учетом изложенного выше замечания необходимо отметить, что при малом расслоении точность экспериментального определения резонансных частот круговых пластин находится в пределах величины расслоения частот.

**3. Сравнение частот, полученных разными методами.** В таблице 1 приводятся результаты первой серии экспериментов и результаты расчетов. В первом столбце приведены замеренные частоты  $\nu_{1,m}$  в Гц, во втором столбце — эти же частоты в безразмерной форме, подсчитанные по формуле:  $\lambda_{1,m} = \nu_{1,m} 2\pi R/c$ , здесь  $c = (E_d g / \gamma)^{1/2}$ ,  $R$  — внешний радиус цилиндра,  $E_d$  и  $\gamma$  — соответственно модуль упругости и удельный вес материала,  $g$  — ускорение земного притяжения. Известно, что модуль упругости, определенный динамическим методом ( $E_d$ ) отличается от модуля упругости, определенного статическим методом  $E$ . Статистические справочные данные для сталей дают  $E_d/E = 1,036$ . Для материала исследуемого цилиндра (сталь 30)  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $E_d = 2,072 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $\gamma = 0,00785$  кг/см<sup>3</sup>. При расчете внутренний радиус цилиндра принимался равным радиусу шайбы, безразмерные характеристики цилиндра равны  $z_0 = 0,27778$ ,  $\rho_1 = 0,27778$ ,  $\rho_2 = 1$ . При расчете методами теории упругости рассматривается свободный цилиндр, при расчете методами теории колебаний пластин рассматривается свободная пластина и пластина заземленная по внутреннему краю. В третьем столбце приведены результаты расчета методами теории упругости (число удерживаемых слагаемых  $N=5$ ), в четвертом и пятом столбцах приведены результаты расчета методами теории пластин для модели Тимошенко, в шестом и седьмом столбцах — для модели Кирхгофа — Лява. В четвертом и шестом столбцах приведены результаты для свободной пластины, в пятом и седьмом — для пластины с заземленным внутренним краем. Из сравнения четвертого и пятого столбцов, а также шестого и седьмого следует, что граничные условия на внутреннем крае почти не влияют на величину частот  $\lambda_{1,4}$  и  $\lambda_{1,5}$ . Значения этих частот, определенных экспериментально и расчетом методами теории упругости почти не отличаются (отличие менее 0,5%). Расчет методом теории колебаний пластин (модель Тимошенко)

Таблица 1

$m$	$\nu_{1,m}$		$\lambda_{1,m}$				
2	3 811	0,42351	0,41067	0,37862	0,51839	0,39837	0,63466
3	8 220	0,91348	0,86494	0,88208	0,91405	1,0315	1,098
4	13 327	1,481	1,4809	1,4438	1,4503	1,8321	1,8485
5	18 790	2,0881	2,0746	2,0428	2,044	2,8148	2,8185

Таблица 2

$m$	$\nu_{1,m}$	$\lambda_{1,m}$		
0	11 168	0,86187	0,86588	0,8448
2	6 850	0,52864	0,53242	0,51776
3	15 131	1,1677	1,1772	1,1419
4	23 730	1,8313	1,8105	1,7899

отличается от замеренных на 2,5%, модель Кирхгофа – Лява дает неприемлемые отличия (25% и 35%). Несколько большее отличие (в пределах 5%) дает расчет методами теории упругости для  $\lambda_{1,2}$  и  $\lambda_{1,3}$ , что является следствием различий граничных условий в расчете и эксперименте.

Вторая серия экспериментов проведена на свободном цилиндре, относительные размеры которого равны:  $z_0=0,4$ ,  $\rho_1=0,244$ ,  $\rho_2=1$ . Так как из предыдущего эксперимента следует, что модель Кирхгофа – Лява дает неприемлемые результаты уже при  $z_0=0,27778$ , для больших  $z_0$  не имеет смысла ее рассматривать. В таблице 2 приведены результаты эксперимента (первые два столбца) и результаты расчета (два следующие столбца). В третьем столбце приведены результаты расчета методами теории упругости, в четвертом методами теории пластин для модели Тимошенко. Вычисления проводились:  $\lambda_{1,0}$  при  $N=9$  (при  $N=5$   $\lambda_{1,0}=0,90477$ ),  $\lambda_{1,2}$  при  $N=3$ ,  $\lambda_{1,4}$  и  $\lambda_{1,5}$  при  $N=5$ . Из таблицы 2 следует хорошее совпадение результатов экспериментов с результатами расчета методами теории упругости и вполне приемлемое совпадение с результатами расчета методами теории колебаний пластин (модель Тимошенко).

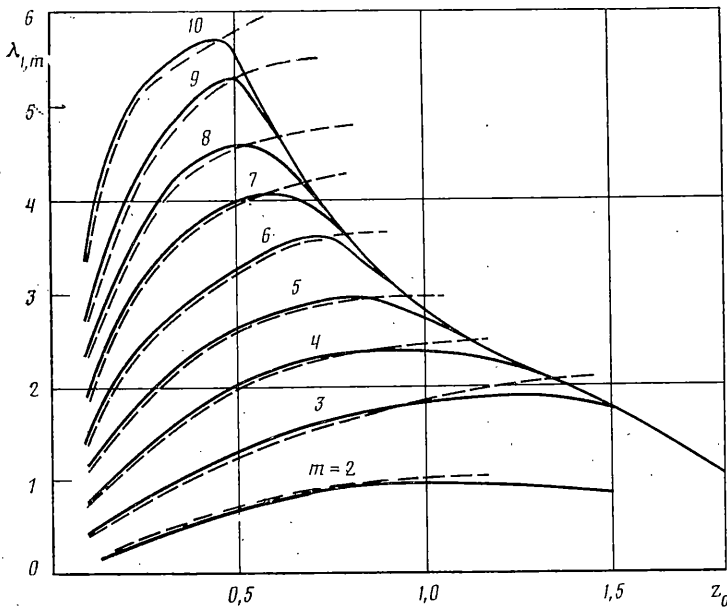
На фиг. 4 приведены частоты  $\lambda_{1,m}$  ( $m=2 \dots 10$ ) в зависимости от  $z_0$  при  $\rho_1=0,3$ , подсчитанные по программе, реализующей решение динамической задачи теории упругости (сплошные линии) и по программе, реализующей решение динамической задачи теории пластин (модель Тимошенко) (штриховые линии).

Из фиг. 4 следует, что существует обширная область изменения  $z_0$ , где частоты, полученные двумя методами, совпадают. Область эта уменьшается с возрастанием  $m$ .

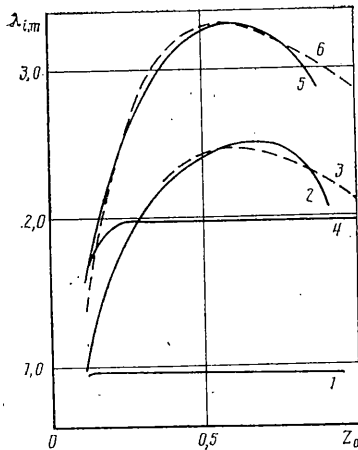
На фиг. 5 приведены частоты  $\lambda_{2,2}$  (кривая 1),  $\lambda_{3,2}$  (кривая 2),  $\lambda_{2,3}$  (кривая 4) и  $\lambda_{3,3}$  (кривая 5), подсчитанные методами теории упругости, а также частоты  $\lambda_{2,2}$  и  $\lambda_{2,3}$  (штриховые кривые соответственно 3 и 6), подсчитанные по теории колебаний пластин (модель Тимошенко). Из приведенных кривых видно, что начиная с  $z_0=0,12$  для  $\lambda_{2,2}$  и  $z_0=0,2$  для  $\lambda_{2,3}$  результаты расчетов по теории упругости не зависят от  $z_0$ . Область независимости частот  $\lambda_{2,2}$  и  $\lambda_{2,3}$  ограничена также при возрастании  $z_0$ , граница ее выходит за пределы графика на фиг. 5. Формы колебаний упругих цилиндров, частоты которых не зависят от  $z_0$ , известны и описаны, например, в [11] для осесимметричных колебаний. Однако, эти формы не описываются теорией колебаний пластин (модель Тимошенко), а частоты  $\lambda_{2,2}$  и  $\lambda_{2,3}$ , полученные по этой теории, совпадают с частотами  $\lambda_{3,2}$  и  $\lambda_{3,3}$  из решения динамической задачи теории упругости (фиг. 5). Аналогичные зависимости прослежены до  $m=6$ .

Для свободного цилиндра, на котором проведено экспериментальное определение частот ( $z_0=0,4$ ,  $\rho_1=0,244$ ), частота, соответствующая форме, независимой от  $z_0$ , по расчету методами теории упругости, равна  $\lambda_{2,2}=1,06853$  ( $\nu_{2,2}=13846$  Гц). Как видно из таблицы 2, такая частота и форма при проведении эксперимента не зафиксирована. Объяснение этому факту дает численный эксперимент, проведенный на этом цилиндре. При приложении к одному или двум торцам цилиндра нагрузки  $S_z$ , перемещения, соответствующие частоте  $\lambda_{2,2}$  на 3–4 порядка меньше, чем при возбуждении этой же формы нагрузкой  $S_p$ , приложенной к боковой поверхности, т. е. форма, соответствующая  $\lambda_{2,2}$ , могла быть получена при возбуждении на боковой поверхности.

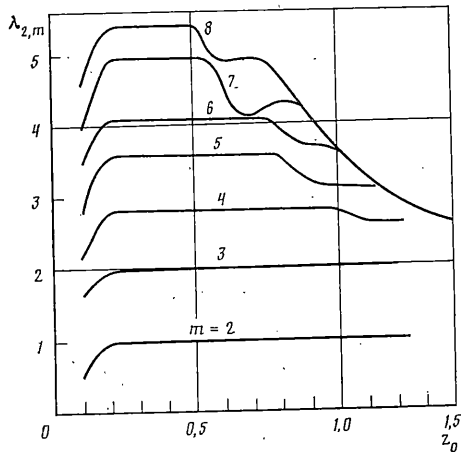
В [12] экспериментально получены формы, частоты которых в определенном диапазоне изменения  $z_0$  не зависят от  $z_0$ . Заметим, что результаты эксперимента, приведенные в [12], совпадают с расчетами, проведенными на основе реализации задачи теории упругости по программе, применяемой в предлагаемой работе, с точностью, допускаемой графическим изображением результатов эксперимента в [12].



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Зависимости низших (по числу  $i$ ) частот  $\lambda_{i,m}$  от  $z_0$  (кроме форм с преимущественно радиальными движениями) при фиксированном  $\rho_1$  различны для пластины (модель Тимошенко) и упругого цилиндра тех же размеров. При малых  $z_0$  частоты  $\lambda_{i,m}$  растут как для пластины так и для цилиндра до некоторого значения  $z_0$ , которое для  $\rho_1=0,3$   $i=1$  и  $m \leq 10$  (фиг. 4) в зависимости от  $m$  находится в пределах от 0,5 до 1,0. Область роста  $\lambda_{i,m}$  является областью совпадения частот для пластины и цилиндра. При дальнейшем увеличении  $z_0$  частоты пластины продолжают расти, хотя и значительно медленнее чем в области малых  $z_0$ , а частоты цилиндра — уменьшаются.

Уменьшение частот с ростом  $z_0$  характерно также для форм с преимущественно радиальными движениями. Этому уменьшению предшествуют значительные горизонтальные участки. На фиг. 6 показаны частоты  $\lambda_{2,m}$  ( $m \leq 8$ ) для  $\rho_1=0,3$ . Уменьшение частот при больших  $z_0$  подтверждается также экспериментально [12].

Ниспадающие ветви кривых  $\lambda_{i,m}=f(z_0)$  для различных  $m$  сливаются в одну кривую (фиг. 4, 6), что является проявлением определенных свойств частот  $\lambda_{i,m}$  как функции  $m$  при фиксированных  $i$ ,  $z_0$  и  $\rho_1$ .

Напомним, что для произвольного упругого тела частота и форма характеризуются одним числом  $i$ , появление второго числа  $m$  обусловлено периодичностью собственных форм по угловой координате для любого тела вращения.

Если некоторые закономерности протекания  $\lambda_{i,m}$  с изменением  $i$  и распределение частот по  $i$  являются общими для всех упругих тел и описаны, например, в [13], то зависимости частот от числа  $m$  мало исследованы. Проведенные вычисления по программе, реализующей решение динамической задачи теории упругости, показывают, что при фиксированном  $i$  с увеличением  $m$  частота  $\lambda_{i,m}$  растет до некоторого значения  $m=m_0$ , после чего, с дальнейшим ростом ( $m>m_0$ ) частота  $\lambda_{i,m}=\lambda_{i,m_0}$ .

Например для  $\rho_1=0,3$ ,  $z_0=0,84$ ,  $m \leq 8$  вычисления, проведенные с точностью  $10^{-16}$  дают  $\lambda_{1,5}=3,089483386235784$ ,  $\lambda_{2,6}=3,758671464451$ ,  $\lambda_{1,6}=\lambda_{1,7}=\lambda_{1,8}=3,280189478110397$ ,  $\lambda_{2,7}=\lambda_{2,8}=4,33983190392593$ , т. е. для  $m \geq 6$   $\lambda_{1,m}=\lambda_{1,6}$ , для  $m > 7$   $\lambda_{2,m}=\lambda_{2,7}$ .

Значение  $m_0$  зависит от  $\rho_1$ ,  $z_0$ . Для  $\rho_1=0,3$  зависимости  $\lambda_{1,m_0}$  от  $z_0$  приведены на фиг. 4, а  $\lambda_{2,m_0}$  от  $z_0$  на фиг. 6. Эти зависимости описываются плавным слиянием ниспадающих ветвей кривых  $\lambda_{i,m}=f(z_0)$ .

Для дисков современных лопаточных машин диапазон изменения относительных размеров ( $z_0 \leq 0,5$ ,  $\rho \leq 0,6$ ) лежит в области совпадения низших частот, полученных двумя описанными выше методами, кроме форм колебаний, частоты которых в исследованном диапазоне не зависят от  $z_0$ . При колебаниях по этим формам, определяющими являются радиальные движения.

Проведенные исследования показывают, что расчеты колебаний дисков недопустимо строить на основе гипотезы Кирхгофа — Лява. Низшие формы колебаний, где преобладающими являются осевые движения, могут быть получены из расчетов на основе гипотезы Тимошенко, при этом время счета практически не превышает время счета при расчетах на основе гипотезы Кирхгофа — и на порядок меньше, чем при расчетах на основе теории упругости. Однако, полная картина частотного спектра может быть получена только при расчетах на основе теории упругости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Н. Д. Прочность деталей турбины ГТД в условиях сложного нагружения и связанные с ней проблемы // Проблемы прочности. 1982. № 3. С. 10—14.
2. Головач В. Т., Кубенко В. Д., Шульга Н. А., Газь А. Н., Гринченко В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности, т. 5. Динамика упругих тел. Киев: Наук. думка, 1986. 288 с.
3. Фридман Л. И. Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 3. С. 37—43.
4. Фридман Л. И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // ДАН СССР. 1986. Т. 289. № 4, С. 825—828.
5. Фридман Л. И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 12. С. 102—108.
6. Фридман Л. И. Поперечные колебания круглых пластин с учетом инерции вращения и деформаций сдвига // В кн.: Проектирование и доводка авиационных ГТД/Под ред. ак. Кузнецова Н. Д. // Тр. КуАИ. Вып. 67. Куйбышев. 1974. С. 140—149.
7. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир. 1971. 553 с.
8. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
9. Вест Ч. Голографическая интерферометрия. М.: Мир. 1982. 504 с.
10. Еленевский Д. С., Бекбулатов Р. С., Шапошников Ю. Н., Ерышев В. А., Буренкин А. М., Юртаев Ю. Г. Применение строболографического метода для исследования вибраций // Проблемы прочности. 1976. № 5. С. 95—99.
11. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
12. McMahon G. W. Experimental study of the vibrations of solid isotropic, elastic cylinders // J. Acoust; Soc. Amer. 1964. N 1. P. 87—94.
13. Бологин В. В. Теория распределения собственных частот упругих тел и ее применение к задачам случайных колебаний // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 4. С. 3—29.

Куйбышев

Поступила в редакцию  
3.VI.1988