

УДК 533.6.013.42

© 1991 г.

В. А. РОМАЩЕНКО

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ГАЗОГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ НА ИМПУЛЬСНУЮ НАГРУЗКУ

На сегодняшний день имеется ряд работ, посвященных вопросам высокоскоростного деформирования пластин и оболочек, граничащих с кавитирующей жидкостью [1-5]. Рассматриваемые длительности нагружения как правило во много раз превышали время распространения возмущений по толщине оболочки и были порядка 10^{-3} - 10^{-4} с и более. Однако иногда представляют практический интерес случаи, когда длительность нагрузки составляет 10^{-5} - 10^{-8} с. Столь короткие воздействия вызывают серьезные трудности при численном расчете таких конструкций. Проблема расчета газогидроупругих оболочечных систем на такие ультракороткие воздействия и посвящается данная статья.

1. Математическая постановка задачи и метод решения. Рассмотрим конструкцию, состоящую из двух соосных упругих бесконечнодлинных цилиндрических оболочек между которыми находится жидкость (фиг. 1). Жидкость считаем невязкой, движение ее потенциальным, перемещения оболочек — малыми. Используем цилиндрическую систему координат r, φ . В начальный момент времени $t=0$ на боковую внешнюю поверхность наружной оболочки начинает действовать импульсная нагрузка $P_H(\varphi, t)$ вида

$$P_H(\varphi, t) = \begin{cases} AtT^{-1} \cos \varphi, & |\varphi| \leq \pi/2, \quad 0 \leq t \leq T \\ A(2-tT^{-1}) \cos \varphi, & |\varphi| \leq \pi/2, \quad T \leq t \leq 2T \\ 0, & |\varphi| \geq \pi/2 \\ 0, & t \geq 2T \end{cases} \quad (1.1)$$

Уравнения движения оболочек имеют вид [4, 5]:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} = \frac{(1-v_i^2)R_i \rho_i}{E_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \varphi} + \frac{h_i^2}{12R_i^2} \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} + w_i \right) + w_i = \frac{(v_i^2-1)R_i^2}{E_i h_i} \left(P_i + \rho_i h_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) \quad (i=1, 2)$$

Здесь $i=1$ для внутренней, $i=2$ для внешней оболочки; w и v — радиальное и окружное смещения; R, h — радиус и толщина оболочки; E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки. Давление P_i на элементы конструкции определяется следующим образом: для внешней оболочки: $P_2 = P_H(\varphi, t) + \rho_0 \partial \psi / \partial t$, для внутренней оболочки: $P_1 = -\rho_0 \partial \psi / \partial t$, где ρ_0 и ψ — плотность жидкости и потенциал скорости.

Движение жидкости описывается волновым уравнением [5]:

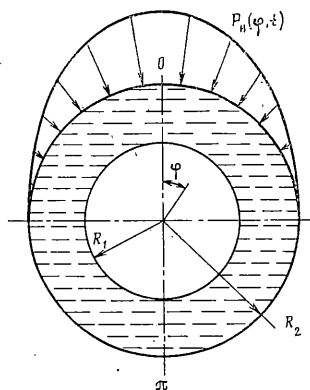
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial \psi}{r \partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{c_0^2 \partial t^2} + n \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1.3)$$

где c_0 — скорость звука в жидкости, n — количество пузырьков газа в единице объема жидкости, V — объем газового пузырька. Для беспузырьковой жидкости следует положить в (1.3) $n=0$. Изменение радиуса пузырька следует нелинейному уравнению Релея [5]:

$$a d^2 a / dt^2 + 3 (da / dt)^2 / 2 = [P_0 (a_0 / a)^{3\gamma} - P_0 + \rho_0 \partial \psi / \partial t] / \rho_0 \quad (1.4)$$

где a_0 и a — начальный и текущий радиусы пузырька, P_0 — давление, при котором пузырек находится в равновесии, γ — коэффициент адиабатического расширения газа в пузырьке (для воздуха $\gamma = 4/3$) [6], $V = 4\pi a^3 / 3$. Система уравнений (1.1) — (1.4) замыкается краевыми и начальными условиями. На смоченных поверхностях оболочек записывается равенство нормальных скоростей точек тела и прилегающих частиц

жидкости $\partial w_i / \partial t = \partial \psi / \partial r$ ($r = R_i$, $i = 1, 2$). Деформированное состояние оболочки и движение жидкости должно быть симметричным относительно плоскости $\varphi = 0$, π . Начальные условия полагаются нулевыми.



Фиг. 1

При интегрировании уравнения Релея вводится ограничение на величину максимального сжатия пузырька: считается, что пузырек может сжиматься пока газосодержание (отношение объема газа в жидкости к общему объему) не понизится до 10^{-4} . При газосодержании $\alpha = 10^{-4}$ газовые включения либо находятся в равновесии, либо расширяются.

Решение ведем методом конечных разностей по явной схеме. Область занятую средой разбиваем семейством плоских и цилиндрических поверхностей. Алгоритмы численного интегрирования и конечно-разностные аппроксимации всех приведенных выше уравнений представлены в [4, 5], поэтому здесь они не приводятся.

Однако алгоритмы, развитые в [4, 5], применимы в случае достаточно длительных нагрузок и не позволяют изучать случаи нагрузок длительностью порядка времени пробегания упругой волны толщины оболочки и короче. На последнем случае остановимся отдельно.

2. Алгоритм расчета на ультракратковременное импульсное воздействие. Пусть внешняя оболочка подвергается нагружению импульсом давления длительностью порядка 10^{-6} — 10^{-9} с. Возникающая упругая волна несколько раз укладывается по толщине оболочки, что создает серьезные трудности при численных расчетах, связанные с необходимостью использования очень малых шагов как по временной, так и по пространственным координатам.

Однако влияние такой нагрузки на конструкцию можно оценить приближенно, пользуясь основным законом динамики поступательного движения

$$m(c_2 - c_1) = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (2.1)$$

где m — масса тела, c_1 и c_2 — скорость его в моменты времени t_1 и t_2 соответственно, F — результирующая сила. Рассмотрим элемент цилиндрической оболочки толщиной h , раствора $\Delta\varphi$ и длиной Δl под действием внешнего давления $P(t)$. Применяя (2.1) к такому элементу и учитывая,

что $m = \rho R \Delta \varphi \Delta l h$, $F = -P(t) R \Delta \varphi \Delta l$, $c_1 = 0$, $t_1 = 0$ имеем

$$\rho h c(t) = - \int_0^t P(u) du, \quad c(t) = \frac{-1}{\rho h_0} \int_0^t P(u) du \quad (2.2)$$

$$w(t) = \int_0^t c(u) du$$

Оценим точность формул (2.2) на примере осесимметричного импульса вида

$$P(t) = \begin{cases} A \sin(t\pi T^{-1}/2), & 0 \leq t \leq 2T \\ 0, & t \geq 2T \end{cases} \quad (2.3)$$

По основному закону динамики имеем

$$c(2T) = -4AT/(\pi \rho h), \quad w(2T) = -4AT^2/(\pi \rho h) \quad (2.4)$$

Определим теперь те же величины используя оболочечный подход. Для осесимметричного нагружения уравнения (1.2) упрощаются и сводятся к одному

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \kappa^2 w = \frac{-P(t)}{\rho h}, \quad \kappa^2 = \frac{E(1+h^2/12R^2)}{(1-\nu^2)R^2 \rho} \quad (2.5)$$

Начальные условия нулевые

$$w(0) = (\partial w / \partial t) |_{t=0} = 0 \quad (2.6)$$

При нагрузке вида (2.3) дифференциальное уравнение (2.5) имеет аналитическое решение, которое с учетом (2.6) на промежутке $0 \leq t \leq 2T$ записывается в виде

$$w(t) = \frac{4AT^2}{\rho h(4T^2 \kappa^2 - \pi^2)} \left(\frac{\pi}{2\kappa T} \sin \kappa t - \sin \frac{\pi t}{2T} \right)$$

$$c(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{2\pi AT}{\rho h(\pi^2 - 4T^2 \kappa^2)} \left(\cos \frac{\pi t}{2T} - \cos \kappa t \right)$$

При $t = 2T$ имеем

$$w(2T) = \frac{2\pi AT}{\kappa \rho h(4T^2 \kappa^2 - \pi^2)} \sin 2\kappa T$$

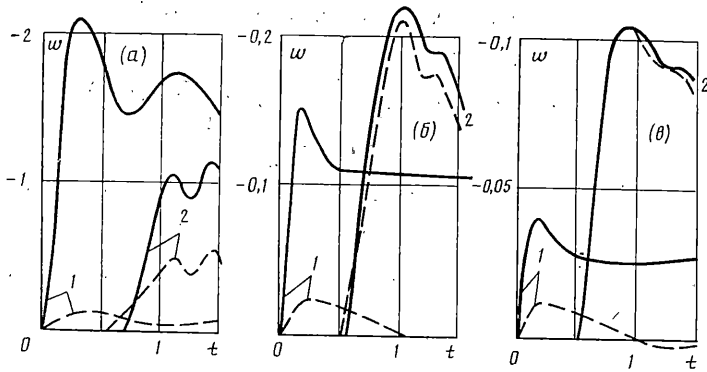
$$c(2T) = \frac{2\pi AT}{\rho h(4T^2 \kappa^2 - \pi^2)} (1 + \cos 2\kappa T) \quad (2.7)$$

При $\beta = 2\kappa T \rightarrow 0$ формулы (2.7) при предельном переходе полностью совпадают с (2.4). При $\beta = 0,3$ относительная погрешность формул (2.4) по сравнению с (2.7) составляет 1% для w и 2% для c . Для $\beta = 0,5$ эти погрешности составляли 5% и 6% соответственно. Используя выражение для κ легко получить следующую приближенную формулу, оценивающую степень применимости выражений (2.2) в численных расчетах:

$$\beta \leq 4T(E/\rho)^{1/2}/R \quad (2.8)$$

Учитывая, что для металлов величина $(E/\rho)^{1/2}$ близка к скорости распространения продольных волн c_M , для таких материалов можно написать

$$\beta \leq 4T c_M / R \quad (2.9)$$



Фиг. 2

Таким образом, при малых временах нагружения $2T$ действие импульса на оболочку можно с достаточно высокой степенью точности учесть путем задания ненулевых начальных условий: отсчет времени начинать с момента $t=2T$, при этом $w(2T)$ и $\partial w/\partial t$ при $t=2T$ определять по формулам (2.2), а внешнюю нагрузку считать нулевой.

Применимость разработанной методики оценивалась путем численных экспериментов на конкретных примерах. Рассматривалась конструкция, изображенная на фиг. 1. Внутренняя и внешняя оболочки имели толщины 0,002 м и 0,003 м, радиусы — 0,2 м и 1 м соответственно. Обе они были выполнены из материала с такими характеристиками: $E=7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu=0,25$, $\rho=2870$ кг/м³. Между оболочками находится вода ($\rho_0=1000$ кг/м³, $c_0=1500$ м/с). Полагалось, что вода содержит пузырьки воздуха, начальное газосодержание α составляло 10^{-4} . Начальный радиус пузырьков определяли из условия, что в 1 м³ воды содержится $n=10^9$ пузырьков по формуле: $a_0=(3\alpha/4\pi n)^{1/3}$. Внешняя оболочка нагружалась неосесимметричным импульсом давления вида (1.1) с амплитудой $A=1$ МПа. Рассматривалось три варианта нагрузки: длинный импульс ($T=1,3 \cdot 10^{-4}$ с), средний ($T=3,25 \cdot 10^{-5}$ с) и короткий ($T=1,625 \cdot 10^{-5}$ с).

Расчеты велись двумя способами: 1. Задавалась внешняя нагрузка при нулевых начальных условиях (алгоритм монографий [4, 5]); 2. При отсутствии внешнего силового воздействия задавались ненулевые начальные условия при $t=2T$ по формулам

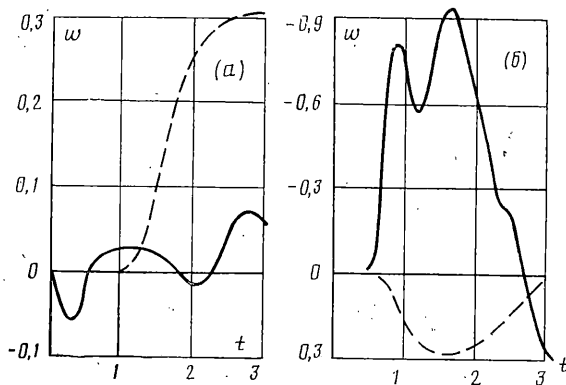
$$\frac{\partial w}{\partial t}(\varphi, 2T) = \frac{-1}{\rho h} \int_0^{2T} P_H(\varphi, t) dt,$$

$$w(\varphi, 2T) = \int_0^{2T} \frac{\partial w}{\partial t}(\varphi, t) dt, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(\varphi, 2T) = v(\varphi, 2T) = 0$$

При этом вводились некоторые допущения, связанные, во-первых, с обнулением окружного перемещения и его скорости. Однако многочисленные расчеты показали, что при кратковременных нагружениях типа (1.1) эти величины по крайней мере на порядок меньше чем w и $\partial w/\partial t$ соответственно. Во-вторых здесь также допускается некоторая ошибка, связанная с неучетом влияния заполнителя. Но так как заполнитель, как правило, во много раз мягче материала оболочки, то за такой короткий промежуток времени как $2T$ его влиянием можно пренебречь. Правомочность вышеуказанных допущений будет в дальнейшем подтверждена численными экспериментами.

Шаги по соответствующим пространственным координатам были такими: $h_r=0,03$ м, $h_\varphi=\pi/50$. Шаг по времени выбирался автоматически следующим образом: начальный шаг определялся по формуле $\tau=h_r c_0^{-1}/20$. Если в процессе счета нарушалась устойчивость, шаг τ делился на 1,2 и задача начинала просчитываться сначала уже при уменьшенном τ и так до тех пор, пока не обеспечивали устойчивость численного решения.

Анализ полученных численных результатов показал, что при длинном импульсе волны сжатия, формирующиеся в жидкости, различаются примерно в 2,5 раза по амплитуде в зависимости от использованного подхода. Более высокую амплитуду



Фиг. 3

давал способ 2. При этом наблюдалось значительное запаздывание волн в жидкости, рассчитанных вторым способом, по сравнению с волнами, полученными при использовании первого: обе волны двигались с одинаковой скоростью c_0 , однако одна шла впереди другой. При среднем импульсе рассогласование в амплитудах составляло всего 7%, запаздывание также было несущественным, а при коротком эти расхождения практически исчезли.

На фиг. 2 показано изменение во времени ($t, c \cdot 10^{-3}$) радиальных прогибов ($w, m \cdot 10^{-3}$) лобовых точек ($\varphi=0$) внешней (кривые 1) и внутренней (кривые 2) оболочек. Штриховые линии соответствуют первому, сплошные — второму способам. Прогиб считается положительным, если радиус оболочки при нем увеличивается. Наблюдается сильное различие в прогибах обеих оболочек в случае длинного импульса (фиг. 2, а). В случае среднего импульса (фиг. 2, б) прогибы внешней оболочки, посчитанные различными способами, также существенно различаются, однако имеется явно выраженная тенденция к сближению результатов по мере уменьшения длительности воздействия. Если в случае длинного импульса прогиб внешней оболочки превышал прогиб внутренней, рассчитанные вторым способом, и наоборот, был существенно меньше прогиба внутренней оболочки при использовании первого способа, то при среднем воздействии в обоих случаях прогиб внутренней оболочки был больше прогиба наружного цилиндра. Прогибы же внутренней оболочки при более кратковременном воздействии, полученные по двум вышеупомянутым различным алгоритмам, отличаются несущественно. Заметим, что величина β в выражениях (2.8)–(2.9) для внешней оболочки даже в случае среднего импульса была довольно велика — порядка 0,7. При коротком воздействии ($\beta \approx 0,35$) прогибы внутренней оболочки для первого и второго способов практически совпали (фиг. 2, в), а разница в прогибах внешней уменьшилась в 2 раза по сравнению с импульсом средней длительности. Численными экспериментами для вышеописанной газогидроупругой системы была установлена приближенная зависимость $w^*/w = 1 + \epsilon T$, где $\epsilon \approx 2 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$, w и w^* — прогибы внешней оболочки, посчитанные первым и вторым способами соответственно. Таким образом $w^* \rightarrow w$ при $T \rightarrow 0$, т. е. при уменьшении длительности нагружения хотя бы на порядок с высокой степенью точности можно при расчетах пользоваться разработанным здесь подходом.

Был также рассмотрен случай ультракороткого импульсного воздействия на ту же конструкцию. Параметры нагрузки были таковы: $A = 2 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $T = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. Расчет проводили по разработанной выше методике, использующей основной закон динамики поступательного движения, так как при таком времени нагружения величина $\beta \approx 10^{-3} \ll 1$. Численные результаты показали, что пройдя внешнюю оболочку амплитуда импульса сгладилась примерно в 1000 раз, т. е. в жидкость прошла волна давления с амплитудой около 2 МПа. При этом длина волны возросла также приблизительно в 1000 раз. На фиг. 3 изображено изменение во времени прогибов лобовых точек (сплошные линии) и противоположных им точек с угловой координатой $\varphi = \pi$ (штриховые линии) в тех же единицах измерения, что и на фиг. 2. Видно что максимальные прогибы при таком нагружении получает внутренняя оболочка (фиг. 3, б), причем ее лобовая точка прогибается внутрь значительно больше, чем точка $\varphi = \pi$ выпячивается наружу. Перемещение лобовой точки внешней оболочки (фиг. 3, а) оказалось незначительным — прогиб точки $\varphi = \pi$ противоположен ему по знаку и на много превосходит по абсолютной величине. Заметим, что данный пример был просчитан с временным шагом $\tau = 6 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, в то время как применение первого подхода потребовало бы использования τ по крайней мере на два порядка меньше, что в свою очередь неизбежно повлекло бы за собой соответствующее дробление и пространственной координатной сетки.

Таким образом в данной работе разработана приближенная численно-аналитическая методика расчета оболочечных систем, содержащих жидкость, на ультракороткое импульсное воздействие. При расчете внешней оболочки этот подход в первые моменты времени допускает некоторую ошибку, в частности связанную с неучетом окружных смещений и влияния заполнителя. Однако надо иметь в виду, что обычно уровень напряжений и деформаций внешней оболочки гидроупругой системы намного меньше, чем внутренней, прочность которой представляет особую заботу. При расчете внутренней оболочки вполне оправданной становится замена действия ультракороткого импульса давления его интегральными характеристиками.

Предложенная методика существенно расширяет область задач газогидроупругости, которые можно решать с привлечением уравнений теории оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буйвол В. Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев: Наук. думка, 1975, 189 с.
2. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979, 320 с.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Теория нестационарной аэроупругости оболочек. Киев: Наук. думка, 1982, 399 с. (Методы расчета оболочек. Т. 5).
4. Галиев Ш. У. Динамика гидроупругопластических систем. Киев: Наук. думка, 1981, 276 с.
5. Галиев Ш. У. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. Киев: Наук. думка, 1988, 263 с.
6. Рождественский В. В. Кавитация. Л.: Судостроение, 1977. 245 с.

Киев

Поступила в редакцию
26.VII.1988