

УДК 624.07 : 534.1

© 1991 г.

М. ЭРГАШОВ

## НОРМАЛЬНЫЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР ПРЯМОУГОЛЬНЫМ БРУСОМ ПО НИТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

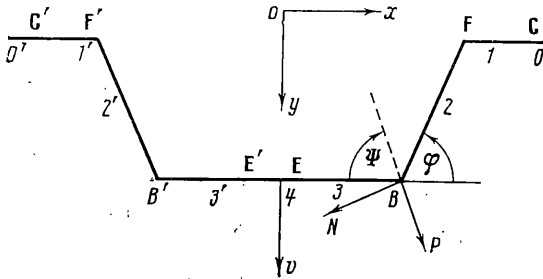
Теория абсолютно гибкой растяжимой нити используется в различных теоретических исследованиях и находит широкое применение на практике [1–7]. В [7] рассматривается задача о поперечном ударе абсолютно гладкой поверхностью прямоугольного бруса по линейно-упругой нити. В публикуемой работе предполагается, что в концах прямоугольного бруса на нить действуют сосредоточенные силы трения и давления. Исследуются параметры движения нити в зависимости от направлений действия силы трения и давления.

**1. Схема движения нити.** Пусть при  $t=0$  по прямолинейной и покоящейся первоначально гибкой нити бесконечной длины произведен нормальный поперечный удар прямоугольным брусом  $BB'$ , движущимся вертикально вниз с постоянной скоростью  $v$  (фиг. 1). В результате удара в нити возникают четыре продольные  $C, E, E', C'$  и две поперечные  $F, F'$  волны и два стационарных разрыва  $B, B'$  [1–3, 7]. Направления движения этих волн на фиг. 1 указаны стрелками. Области 0 и 0' нити являются областями покоя без деформации. Области 1-1' и 2-2' являются соответственно областями чисто продольного и продольно-поперечного движения. Деформация этих областей одинакова, так как на фронтах поперечных волн  $F, F'$  нет разрыва деформации (1–3). Область 4 является областью покоя относительно бруса. В областях 3 и 3' нить деформирована и частицы движутся в направлении фронтов стационарных разрывов  $B$  и  $B'$  соответственно. Деформация в областях 2 и 3 не равна так как в точке  $B$  имеет место трение.

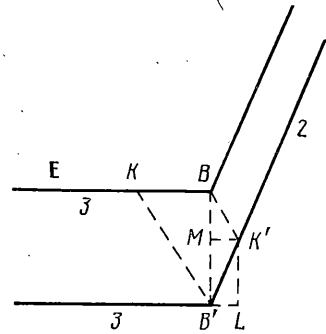
Предположим, что поверхности бруса абсолютно гладкие и трения  $N$  и давления  $P$  бруса на нить имеют место только в бесконечно малых окрестностях точек  $B$  и  $B'$ . Сила  $P$  с осью  $x$  образует некоторый угол  $\psi$ .

Указанная выше схема движения осуществляется до момента взаимодействия продольных волн  $E$  и  $E'$ . Очевидно, взаимодействие этих волн произойдет в момент времени  $t=l/a$  после удара. Здесь  $2l$  — длина бруса,  $a$  — скорость распространения продольной волны в нити. Ниже исследуются параметры движения нити при  $0 \leq t \leq l/a$ . Отдельные задачи о взаимодействии продольных и поперечных волн на различных участках нити рассмотрены в [1, 3, 7].

**2. Основные уравнения.** Пусть  $\epsilon$  — относительная деформация;  $\varphi$  — угол излома;  $\rho_0$  и  $\rho$  — соответственно начальная и текущая плотности нити;  $x, y, P_x, P_y, N_x, N_y$  — составляющие на оси  $x$  и  $y$  соответственно скорости частиц нити, силы давления и трения;  $f$  — коэффициент трения;  $ds$  — длина рассматриваемого элемента нити. Незвестные параметры движения рассматриваемых участков нити будем снабжать соответствующими индексами. Задача является симметричной относительно оси и поэтому в дальнейшем будем рассматривать правую от оси часть нити.



Фиг. 1



Фиг. 2

Динамические и кинематические условия, имеющие место на фронтах волн  $C, E, F$  приводятся к виду [1, 3, 6–7]:

$$x_1^* = -a\varepsilon_1, \quad x_2^* - x_1^* = a[(1 + \varepsilon_1)]^{1/2}(1 - \cos \varphi) \quad (2.1)$$

$$y_2^* = a[(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_1]^{1/2} \sin \varphi, \quad x_3^* = a\varepsilon_3, \quad y_3^* = v \quad (2.2)$$

Напишем закон сохранения массы и кинематические условия на фронте стационарного разрыва  $B$ . Пусть за время  $dt$  брус проходит расстояние  $dy = vdt$  (фиг. 2). За это же время некоторый элемент нити длиной  $ds_3$  переходит из области 3 в область 2 и приобретает новую длину  $ds_2$ . При этом закон сохранения массы элемента нити принимает следующий вид [1]:

$$\frac{ds_3}{1 + \varepsilon_3} = \frac{ds_2}{1 + \varepsilon_1}, \quad \rho_3(1 + \varepsilon_3) = \rho_2(1 + \varepsilon_1) = \rho_0 \quad (2.3)$$

Из треугольника  $BB'K'$  (фиг. 2), найдем  $B'L = B'K' \cos \varphi$ ,  $BM = BB' - B'K' \sin \varphi$ . Подставляя кинематические выражения соответствующих отрезков треугольника  $BB'K'$ , последние уравнения напомним в виде

$$y_2^* dt = vdt - \sin \varphi ds_2 \quad (2.4)$$

$$x_2^* dt = \cos \varphi ds_2, \quad ds_3 = x_3^* dt \quad (2.5)$$

Закон количества движения в применении к рассматриваемому элементу  $ds_3$  нити имеет вид [1]:

$$\rho_3 ds_3 (x_2^* - x_3^*) = (T_2 \cos \varphi - T_3 + P_x + N_x) dt \quad (2.6)$$

$$\rho_3 ds_3 (y_2^* - y_3^*) = (-T_2 \sin \varphi + P_y + N_y) dt \quad (2.7)$$

Предположим, что силы трения и давления связаны между собой с помощью закона Кулона. При этом (фиг. 1):

$$P_x = P \cos \psi, \quad N_x = -fP \sin \psi \quad (2.8)$$

$$P_y = P \sin \psi, \quad N_y = fP \cos \psi \quad (2.9)$$

Уравнения (2.1)–(2.9) совместно с линейным законом Гука

$$T_1 = T_2 = E\varepsilon_1 = \rho_0 a^2 \varepsilon_1, \quad T_3 = E\varepsilon_3 = \rho_0 a^2 \varepsilon_3$$

образуют систему для определения следующих неизвестных  $x_1^*$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $x_2^*$ ,  $\varphi$ ,  $y_2^*$ ,  $x_3^*$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $P$ ,  $y_3^*$ ,  $ds_3$ ,  $ds_2$ ,  $\rho_3$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $P_x$ ,  $P_y$ .

**3. Исследование решения задачи.** Из уравнения (2.1)–(2.5), найдем

$$y_2^* = v - a(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_3(1 + \varepsilon_3)^{-1} \sin \varphi \quad (3.1)$$

$$x_2^* = a[(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_1]^{1/2}(1 - \cos \varphi) - a\varepsilon_1 \quad (3.2)$$

$$x_2^* = a(1 + \varepsilon_1) \varepsilon_3 (1 + \varepsilon_3)^{-1} \cos \varphi \quad (3.3)$$

Приравнивая правые части уравнения (2.2), (3.1) и (3.2)–(3.3), получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\lambda_1 (1 - \cos \varphi) - \varepsilon_1}{(1 + \varepsilon_1) \cos \varphi - \lambda_1 (1 - \cos \varphi) + \varepsilon_1} \quad (3.4)$$

$$\lambda_1 \sin \varphi = v^* - (1 + \varepsilon_1) \varepsilon_3 (1 + \varepsilon_3)^{-1} \sin \varphi \quad (3.5)$$

$$\lambda_1 = [(1 + \varepsilon_1) \varepsilon_1]^{1/2}, \quad v^* = v/a$$

Умножим обе части уравнения (3.4) на  $\sin \varphi$ , а уравнение (3.5) на  $\cos \varphi$  и результаты сложим. При этом получим

$$\lambda_1 = v^* \operatorname{ctg} \varphi + \varepsilon_1 \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.6), найдем

$$\varepsilon_1 = v^2 \gamma, \quad \gamma = [\operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \varphi - 2v)]^{-1} \quad (3.7)$$

$$\lambda_1 = v (\operatorname{tg} \varphi - v) \gamma, \quad 1 + \varepsilon_1 = (\operatorname{tg} \varphi - v)^2 \gamma \quad (3.8)$$

Здесь и в дальнейшем звездочку над  $v$  будем опускать. Подставляя (3.7)–(3.8) в уравнение (3.4), найдем

$$\varepsilon_3 = \frac{v (\operatorname{tg} \varphi - v) (1 - \cos \varphi) - v^2}{(\operatorname{tg} \varphi - v)^2 \cos \varphi - v (\operatorname{tg} \varphi - v) (1 - \cos \varphi) + v^2} \quad (3.9)$$

Из уравнений (2.6)–(2.7), найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 [\lambda_1 (1 - \cos \varphi) - \varepsilon_1 - \varepsilon_3] &= (\varepsilon_1 \cos \varphi - \varepsilon_3) (1 + \varepsilon_3) - \\ &- [\varepsilon_3 (v - \lambda_1 \sin \varphi) - \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_3) \sin \varphi] Q(\psi) \quad (3.10) \\ Q(\psi) &= (\cos \psi - f \sin \psi) (\sin \psi + f \cos \psi)^{-1} \end{aligned}$$

Уравнения (3.7), (3.9) и (3.10) образуют систему относительно неизвестных  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3$  и  $\varphi$ . Исключая  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$  из уравнения (3.10), найдем

$$\begin{aligned} v\theta^2 (\eta - \gamma^{-1}) &= (v\eta \cos \varphi - \theta \gamma^{-1}) \alpha^2 \cos \varphi - \\ &- [v\theta (\gamma^{-1} - \alpha \sin \varphi) - \xi] \eta Q(\psi) \quad (3.11) \\ \alpha &= \operatorname{tg} \varphi - v, \quad \theta = \alpha (1 - \cos \varphi) - v \\ \eta &= \alpha^2 \cos \varphi - v\theta, \quad \xi = v \sin \varphi \cos \varphi \alpha^2 \end{aligned}$$

Таким образом задача сводится к решению трансцендентного уравнения (3.11), имеющего общий вид  $F(v, \varphi) = 0$ . Уравнение (3.11) напишем в следующем удобном для дальнейшего теоретического анализа и численного расчета виде

$$v^5 A_5 + v^4 A_4 + v^3 A_3 + v^2 A_2 + v A_1 + A_0 = 0 \quad (3.12)$$

$$A_0 = \operatorname{tg}^3 \varphi \cos \varphi (1 - \cos \varphi)$$

$$A_1 = \operatorname{tg}^4 \varphi [2 \cos^2 \varphi - 3 \cos \varphi - 1 + Q(\psi) \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi (1 - 2 \cos \varphi)]$$

$$A_2 = \operatorname{tg}^3 \varphi [5 + 3 \cos^2 \varphi + Q(\psi) \operatorname{tg} \varphi (8 \cos^2 \varphi - 3 \cos \varphi - 1)]$$

$$A_3 = \operatorname{tg}^2 \varphi [-2 (\cos^3 \varphi + 2 \cos^2 \varphi + 3) + Q(\psi) \operatorname{tg} \varphi (-10 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 6)]$$

$$A_4 = 4 \operatorname{tg} \varphi [\cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 1 + Q(\psi) \operatorname{tg} \varphi (\cos^2 \varphi + 3 \cos \varphi - 3)]$$

$$A_5 = 8 (1 - \cos \varphi) (1 + Q(\psi) \operatorname{tg} \varphi)$$

Численные расчеты удобно вести обратным способом — задавая  $\varphi$ , определяя  $v$ ,  $\varepsilon_1$  и так далее. Подставляя в уравнение (3.12)  $v=0$ , получаем  $\varphi=0$ , т. е. приходим к случаю отсутствия удара.

**4. Частные случаи.** Пусть удар произведен шероховатой поверхностью бруса и скольжение нити в области три отсутствует. Подставляя в уравнения (2.2), (2.3) — (2.5)  $\varepsilon_3=0$ , получим

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0, \quad \dot{y}_2 = v, \quad ds_2 = ds_3 = 0 \quad (4.1)$$

При этом из уравнения (3.4) — (3.5) получаем следующее решение

$$v = (1 - \cos \varphi) \sin \varphi [1 - (1 - \cos \varphi)^2]^{-1}$$

$$\varepsilon_1 = (1 - \cos \varphi)^2 [1 - (1 - \cos \varphi)^2]^{-1}$$

Это решение совпадает с решением задачи о нормальном точечном ударе по нити с постоянной скоростью [1.7].

В случае  $P=N=0$  будем иметь  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $ds_2 = ds_3 = ds$ ,  $\dot{x}_3 = -\dot{x}_1$ . При этом уравнения (2.1) — (2.5) оказываются замкнутыми. Решение задачи в этом случае имеет вид [7]:

$$v = (1 - \cos \varphi) \sin \varphi (2 \cos \varphi)^{-1}$$

$$\varepsilon = (1 - \cos \varphi)^2 (4 \cos \varphi)^{-1}.$$

Предположим, что бесконечно малые окрестности точек  $B$  и  $B'$  имеют криволинейную форму и угол  $\psi$  может принимать значения от 0 до  $\pi/2$ . Рассмотрим случаи, когда в области три скольжение нити отсутствует. Подставляя в уравнения (2.6) — (2.7)  $\varepsilon_3=0$  и учитывая (4.1), найдем  $\operatorname{tg} \psi = (1 + \operatorname{tg} \varphi) [f (\operatorname{tg} \varphi - 1)]^{-1}$ .

Как видим, при  $f=0$  случай  $\varepsilon_3=0$  имеет место, если  $P \rightarrow \infty$ .

В случае  $\varepsilon_3=0$ ,  $f \neq 0$ ,  $\psi = \pi/2$  уравнения (2.6) — (2.7) принимают следующий вид

$$Pf - \varepsilon_1 \cos \varphi \rho_0 a^2 = 0, \quad P - \varepsilon_1 \sin \varphi \rho_0 a^2 = 0$$

Таким образом, в случае  $\varepsilon_3=0$ ,  $\psi = \pi/2$  будем иметь  $P \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow \infty$ .

Анализ проведенных числовых расчетов показал, что при  $f \neq 0$  и  $0 < \psi \leq \pi/2$  деформация области три меньше, чем в областях 1—2. С ростом угла  $\psi$  деформация  $\varepsilon_3$  и угол излома убывают, а  $\varepsilon_1$  — возрастает. С ростом коэффициента трения  $\varepsilon_3$  — убывает,  $\varepsilon_1$  — возрастает.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
2. Рахматулин Х. А. Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы // ПММ. Т. 16. Вып. 1. 1952. С. 23—24.
3. Максимов В. Ф. Взаимодействие поперечной волны с геометрическим изломом линейно-упругой нити // В кн.: Труды кафедры газовой и волновой динамики МГУ. М.: Изд-во МГУ. 1975. Вып. 1. С. 116—120.
4. Ленский Э. В. Вынужденное движение поперечной волны в гибкой растяжимой нити // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 128—131.
5. Ленский Э. В. Удар клином по упругой нити // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 2. С. 104—106.
6. Павленко А. Л. О распространении разрывов в гибкой нити // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 112—122.
7. Эргашов М. Исследование деформаций, возникающих при ударе прямоугольным бруском по нити // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 159—163.

Ташкент

Поступила в редакцию  
7.II.1989