

УДК 624.07 : 534.1

© 1991 г.

С. Д. АЛГАЗИН

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСОВ
В НЕКОТОРЫХ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

Исследуются задачи о продольных и поперечных колебаниях балки, с которой упруго связаны сосредоточенные массы (осцилляторы). К таким моделям сводятся многие задачи техники [1]. Оказывается, что в рассматриваемых колебательных системах возможны параметрические резонансы. Предлагаемый численный алгоритм обладает неожиданным свойством: его точность тем выше, чем ближе система к резонансу.

1. Математическая постановка задачи. Вначале рассмотрим задачу о продольных колебаниях стержня ($0 \leq x \leq l$) со свободными концами переменного сечения $F(x)$ и погонной массы $m(x)$ под действием периодической силы с амплитудой $f(x)$ и частотой λ . В точках $x=x_k, 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < l$ со стержнем упруго связаны сосредоточенные массы $m_k, k=1, 2, \dots, n$ (осцилляторы). Пусть $c_k, k=1, 2, \dots, n$ — жесткости невесомых связей, E — модуль Юнга. Если $f(x) \equiv 0$, то имеем задачу о свободных колебаниях стержня. Если же $f(x) \neq 0$, то рассматривается задача о вынужденных колебаниях.

Введем в рассмотрение функцию Грина $U=U(x, y)$, как решение задачи

$$\frac{d}{dx} EF(x) \frac{d}{dx} U(x, y) + \delta(x-y) - \frac{m(x)}{M} = 0$$

$$0 < y < l$$

$$EF(x) \frac{dU(x, y)}{dx} \Big|_{x=0, l} = 0, \quad \int_0^l m(x)U(x, y) dx = 0$$

Здесь M — масса стержня без осцилляторов. Задача о свободных колебаниях сводится к системе уравнений

$$u(x) + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k = \lambda \int_0^l U(x, \xi) m(\xi) u(\xi) d\xi + \lambda \sum_{k=1}^n m_k z_k U(x, x_k) \quad (1.1)$$

$$\lambda_k (u_k - z_k) + \lambda z_k = 0, \quad \lambda_k = c_k / m_k \quad (1.2)$$

$$u_k = u(x_k) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

Таким образом, для определения амплитуд свободных колебаний $u(x), z_1, z_2, \dots, z_n$ и соответствующей собственной частоты λ имеем систему однородных интегро-алгебраических уравнений (1.1), (1.2). Для случая вынужденных колебаний вместо уравнения (1.1) имеем неоднородное интегральное уравнение.

Рассмотрим теперь свободные колебания балки ($0 \leq z \leq l$) со свободными концами, к которой в точках $z=z_k, 0 < z_1 < \dots < z_n < l$ на невесомых штангах (в начальный момент параллельных оси балки) длины h_k при-

креплены сосредоточенные массы m_k (осцилляторы), но так, что при отклонении штанги с грузом на малый угол φ относительно касательной к оси балки в точке подвеса возникает момент, пропорциональный углу поворота с коэффициентом c_k и стремящийся вернуть груз в исходное положение.

Будем считать штанги с грузами твердыми телами, а балку упругой с жесткостью на изгиб $EI_x(z)$ и погонной массой $m(z)$. Также будем считать колебания бесконечно малыми, так что сосредоточенные грузы совершают колебания в плоскости, перпендикулярной оси балки.

Введем в рассмотрение функцию Грина $U=U(z, \xi)$ как решение задачи

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dz^2} EI_x(z) \frac{d^2}{d\xi^2} U(z, \xi) + c_0(\xi) + xc_1(\xi) = \delta(z - \xi) \\ EI_x(z) \frac{d^2}{dz^2} U(z, \xi) \Big|_{z=0, l} = 0, & \quad \frac{d}{dz} (EI_x(z) \frac{d^2}{d\xi^2} U(z, \xi) \Big|_{z=0, l} = 0 \\ & \int_0^l m(z) U(z, \xi) dz = 0, \quad \int_0^l zm(z) U(z, \xi) dz = 0 \end{aligned}$$

Функции $c_0=c_0(\xi)$ и $c_1=c_1(\xi)$ выберем так, чтобы система приложенных к балке сил была равновесной. Теперь аналогично рассмотренному выше случаю стержня получим соотношения

$$\begin{aligned} v(z) + (\beta_{21}z + \beta_{11}) \sum_{k=1}^n m_k a_k + (\beta_{22}z + \beta_{12}) \sum_{k=1}^n m_k a_k (z_k + h_k) = \\ = \lambda \int_0^l U(z, \xi) m(\xi) v(\xi) d\xi + \lambda \sum_{k=1}^n m_k a_k (U(z, z_k) + h_k U'_\xi(z, z_k)) \\ - \lambda a_k = \lambda_k (v_k - a_k + h_k v'_k), \quad \lambda_k = c_k / m_k h_k^2 \\ v_k = v(z_k), \quad v'_k = v'(z_k), \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $\beta_{11}, \beta_{12} = \beta_{21}, \beta_{22}$ — некоторые константы зависящие от распределения погонной массы балки.

В описанных выше колебательных системах возможны свободные колебания, когда часть балки (стержня) и часть осцилляторов неподвижны. При возмущении параметров системы описанное явление исчезает. В случае вынужденных колебаний стержня под действием сосредоточенной силы возможно погасить колебания на заданном участке определенной длины. Для этого необходимо в концы нужного участка подвесить осцилляторы с частотой $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, т. е. совпадающей с частотой вынужденной силы.

2. Численный алгоритм. Для численного исследования описанных выше резонансов, перейдем от системы интегро-алгебраических уравнений (1.1), (1.2) к конечномерной задаче. Введем на рассматриваемом отрезке $[0, l]$ сетку $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_N < l$. Причем узлы сетки необходимо содержат точки крепления осцилляторов $x_k, k=1, 2, \dots, n$, а также точки излома или разрыва $EF(x)$ и $m(x)$. Для приближенного вычисления интегрального слагаемого в (1.1) применим квадратурную формулу второго порядка точности с узлами в точках сетки

$$\int_0^l U(x, \xi) m(\xi) u(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^N U(x, y_k) d_k + r(x, U) \tag{2.1}$$

Здесь $r(x, U)$ — погрешность квадратурной формулы, d_k — коэффициенты квадратурной формулы. Пусть в соотношении (1.1) и (2.1) $x=y_p$, $p=1, 2, \dots, N$, т. е. пробегает узлы сетки. В результате получим систему соотношений

$$\begin{bmatrix} I_N & m \\ J & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} A & U \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} r \\ o \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Здесь I_N — единичная матрица размера $N \times N$; m — матрица размера $N \times n$ ($m_{pk} = m_k/M$, $p, k=1, 2, \dots, n$); J — матрица размера $n \times n$, $J_{pk} = -\lambda_k$, где $k=1, 2, \dots, n$ — номер узла, в котором подвешен k -й осциллятор, а остальные элементы p -й строки нулевые; $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица размера $n \times n$; A — матрица размера $N \times N$ ($A_{pk} = U(y_p, y_k)d_k$, $p, k=1, 2, \dots, n$); U — матрица размера $N \times n$ ($U_{pk} = U(y_p, x_k)$, $p, k=1, 2, \dots, n$); $m = \text{diag}(m(y_1) \dots m(y_n))$ — диагональная матрица; O — нулевая матрица размера $n \times n$; I_n — единичная матрица размера $n \times n$; $u = (u(y_1) \dots u(y_n))'$ — вектор столбец длины N , элементы которого содержат значения собственной формы в узлах сетки; $z = (z_1 \dots z_n)'$ — вектор столбец длины n , элементы которого содержат амплитуды осцилляторов; $r = (r(y_1, U), \dots, r(y_N, U))'$ — вектор столбец длины N (погрешность дискретизации); o — нулевой вектор-столбец длины n .

Отбрасывая в (2.2) погрешность дискретизации, получим приближенную конечномерную задачу

$$E \begin{bmatrix} u^\sim \\ z^\sim \end{bmatrix} - \lambda^\sim D \begin{bmatrix} u^\sim \\ z^\sim \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

вид матриц E и D размера $(N+n) \times (N+n)$ приведен в (2.2). Здесь векторы u^\sim и z^\sim содержат приближенное значение амплитуд, а λ^\sim приближенное собственное значение. Заметим, что матрицу E нетрудно обратить аналитически (используя ее блочное представление) и свести тем самым задачу к алгебраической проблеме собственных значений для матрицы $E^{-1}D$.

Исследуем погрешность предложенного численного метода. Пусть u — вектор столбец длины N , элементы которого содержат значения собственной формы в узлах сетки, а λ — соответствующее собственное значение, $R_\lambda(E, D) = (E - \lambda D)^{-1}$ — резольвента пучка матриц $E - \lambda D$. Построим выражение для R_λ в блочном виде

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

аналогичном выражению для матриц E и D . Проводя вычисления, получим, что

$$d_{11} = (I_N - \lambda A - (m^\sim - \lambda U_m)(\Lambda - \lambda I_n)^{-1} J)^{-1} \quad (2.4)$$

Введем в рассмотрение матрицу $A^\sim = A + (u^* u)^{-1} r u^*$. Здесь u^* обозначена матрица комплексносопряженная к одностолбцовой матрице u . Легко видеть, что $A^\sim u = A u + r$.

Обозначим D^\sim матрицу, получающуюся из матрицы D заменой A на A^\sim , и обозначим $R_\lambda^\sim(E, D^\sim) = (E - \lambda D^\sim)^{-1}$. Заметим, что λ — полюс R_λ^\sim , а λ^\sim — полюс R_λ . Таким образом, для исследования возмущения, вносимого в собственные значения, отбрасывая погрешность дискретизации r следует оценить близость резольвент R_λ и R_λ^\sim . В формулируемом ниже предложении конкретный вид матриц D и D^\sim не имеет значения.

Предложение 1. Пусть Γ — спрямляемый замкнутый контур, содержащий внутри себя m собственных значений пучка матриц $E - \xi D^\sim$, сосчитанных с их алгебраической кратностью, и пусть выполнено условие

$$r_0^{-1} = \sup_{\zeta \in \Gamma} \text{spr}(I - R_\zeta(E - \xi D^\sim)) < 1 \quad (2.5)$$

k	λ_k	m_k	α_k
1	4,929318	0,11317073	4,281639·10 ⁻²
2	4,7148136	3,804878	7,2640041·10 ⁻²
3	0,40658889	0,15853658	7,2665975·10 ⁻²
4	1,2126908	0,29902439	7,26919·10 ⁻²
5	4,929318	0,58536585	7,2717842·10 ⁻²
6	4,929318	0,34726829	7,2743775·10 ⁻²
7	4,929318	0,14936585	0,3101919
8	1,5117943·10 ⁻²	9,1946341	0,33667012
9	0,12631676	1,0365853	0,33669605
10	0,31552071	0,9409756	0,33672199
11	4,929318	0,21682926	0,33674792
12	4,929318	5,0341463·10 ⁻²	0,78425829
13	4,929318	0,092	0,83016078
14	4,929318	8,8487604·10 ⁻²	0,91849066

Тогда внутри Γ лежит ровно m собственных значений пучка матриц $E - \xi D$, считая каждое собственное значение столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Доказательство этого предложения получим простым обобщением результатов [2], используя теорию обобщенной резольвенты для пучка операторов, построенную, например, в [3].

В рассматриваемом конкретном случае соотношение (2.5) принимает вид

$$\text{Spr}(I - R_{\xi}(E - \xi D)) = |(u^*u)|^{-1} |\xi| \times \text{Spr } d_{11}(\xi) r u^* \quad (2.6)$$

Предположим, что точное собственное значение рассматриваемой задачи (1.1), (1.2) λ лежит в окрестности Γ некоторой осцилляторной частоты λ_h , т. е. мы хотим исследовать поведение колебательной системы вблизи резонанса. Легко видеть, (см. (2.6)), что если контур Γ стягивается к точке $\lambda = \lambda_h$, то $r_0^{-1} \rightarrow 0$ вне зависимости от величины погрешности дискретизации r .

Предложение 2. Пусть выполнены условия предложения 1. В качестве контура выберем выпуклый контур Γ_λ , который содержит внутри себя собственное значение λ пучка матриц $E - \xi D$ алгебраической кратности m и не содержит других точек спектра этого пучка. Обозначим

$$\rho = \max_{\xi \in \Gamma_\lambda} |\lambda - \xi|, \quad \lambda^* = \frac{1}{m} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m)$$

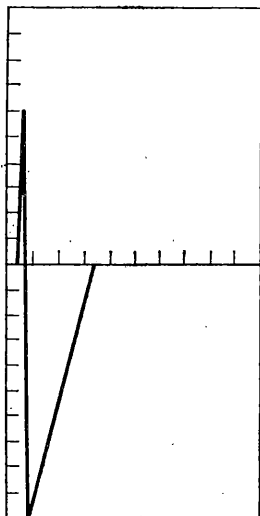
λ^* — среднее арифметическое собственных значений пучка матриц $E - \xi D$, лежащих внутри Γ_λ . Тогда выполняется неравенство

$$|\lambda - \lambda^*| \leq \rho r_0^{-1} / (1 - r_0^{-1}) \quad (2.7)$$

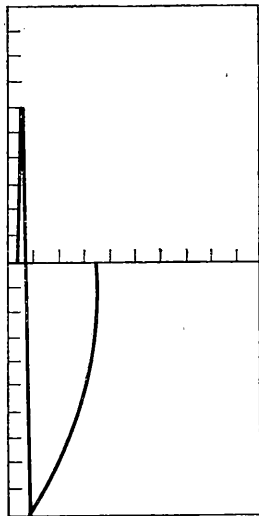
где величина r_0 определена в (2.5). Доказательство следует из результатов работы [2].

Неравенство (2.7) и проведенные выше рассуждения объясняют полученный экспериментально факт о том, что исследование поведения колебательной системы вблизи резонанса можно проводить на редкой сетке.

Численный алгоритм для задачи (1.3), (1.4) строится аналогично. Дополнительные соотношения для $v'(x)$ получаем дифференцированием интегрального уравнения (1.3). Применяя для вычисления интегралов ту же квадратурную формулу и отбрасывая погрешность дискретизации получим приближенную конечномерную задачу вида (2.3), от которой, аналитически обратив матрицу E , перейдем к стандартной алгебраической проблеме собственных значений.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Численный пример. В конкретных расчетах применялась безразмерная форма выписанных выше уравнений. Причем за характерную длину и массу принималась длина стержня и масса стержня без осцилляторов. За характерное время принималась величина $1/\omega_{\max}$, где ω_{\max} — характерная частота в герцах (конец расчетного диапазона).

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях стержня с 14 осцилляторами при $EF(x) \equiv 1$, $m(x) \equiv 1$. Конфигурация системы приведена в таблице.

В расчетах на сетке $N=68$ получены следующие значения для первых 16 собственных частот: 0,029580084; 0,140261; 0,333193; 0,421456; 1,2488; 1,83; 3,948; 9,00; 4,807; 4,84174; 4,88855; 4,89690; 4,92918; 4,87522; 30,0; 67,0.

На фиг. 1 приведена собственная форма, соответствующая частоте $\lambda=4,89690$. Часть стержня до точки подвеса первого осциллятора с частотой $\lambda=4,929318$ и часть стержня за точкой подвеса седьмого осциллятора с той же частотой $\lambda=4,929318$ неподвижны. Между точками x_1 и x_7 подвешены две близко расположенные группы осцилляторов (2, 3, 4 и 5, 6) они дают два графически различных излома у собственной формы.

Максимальную амплитуду имеет 12-й осциллятор, и если ее принять равной $-1,000$, то амплитуды остальных осцилляторов суть: $-0,234 \cdot 10^{-3}$; $-0,572 \cdot 10^{-4}$; $-0,203 \cdot 10^{-6}$; $-0,748 \cdot 10^{-6}$; $0,350 \cdot 10^{-3}$; $0,351 \cdot 10^{-3}$; $-0,141 \cdot 10^{-4}$; $-0,528 \cdot 10^{-6}$; $-0,452 \cdot 10^{-5}$; $-0,418 \cdot 10^{-4}$; $0,260 \cdot 10^{-1}$; $-1,000$; $0,654$; $-0,1342$.

Таким образом, последние осцилляторы 12–14 подвижны, амплитуды остальных осцилляторов пренебрежимо малы.

Второй расчет проводился при кусочно-линейных функциях $EF(x)$ и $m(x)$ и с той же конфигурацией расположения осцилляторов. Резонансная частота $\lambda=4,92866$ немного изменилась по сравнению с первым расчетом, но качественно картина колебания осталась такой же. На фиг. 2 представлена соответствующая собственная форма.

В заключение автор благодарит Д. М. Климова и А. Л. Гольденвейзера за полезные обсуждения работы, Г. А. Кузьмичеву и Т. В. Андрееву за помощь в программировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пархомовский Я. М. Крутильные колебания крыла, несущего сосредоточенный груз (асимптотика) // Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 3. С. 69–82.
2. Алладин С. Д. О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов // Сиб. мат. ж. 1983. Т. 24. № 2. С. 3–9.
3. Stummel F. Diskrete konvergenz linearer operatoren II // Math. Z. 1971. Bd. 120. S. 231–264.

Москва

Поступила в редакцию
3.II.1987