

УДК 624.07 : 534.1

© 1991 г.

Ю. А. РОССИХИН, М. В. ШИТИКОВА

**ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕР
ПРОТЕКАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ВИСЯЧЕЙ КОМБИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ**

Известно [1, 2], что нелинейные свободные колебания висячей комбинированной системы с бисимметричной балкой жесткости в условиях внутреннего резонанса или близости частот двух собственных форм различного вида колебаний могут сопровождаться интенсивным энергообменом между этими формами, причем интенсивность и частота перекачки энергии существенным образом зависят от абсолютного уровня начальных амплитуд (абсолютный уровень начальных амплитуд определяется величиной полной механической энергии, сообщаемой системе в момент начала движения).

Однако на энергообмен влияет не только абсолютный уровень начальных амплитуд, но также и их относительный уровень (этот уровень не зависит от первоначальной энергии системы, а определяется отношением начальных амплитуд двух взаимодействующих форм колебаний).

Данная работа посвящена исследованию энергообмена между двумя взаимодействующими на основе внутреннего резонанса или близости частот собственными формами вертикальных и крутильных колебаний висячей комбинированной системы с бисимметричной тонкостенной балкой жесткости (модель «висячего моста»), в зависимости от величины относительного уровня их начальных амплитуд. Установлены два вида перекачки энергии — периодическая и аperiodическая.

Показано, что существуют такие относительные уровни начальных амплитуд (эти уровни соответствуют стационарным режимам), при переходе через которые меняется направление перекачки энергии из одной подсистемы в другую.

Сформулированы необходимые и достаточные условия существования стационарных режимов колебаний, а также предложен новый способ исследования этих режимов на устойчивость.

1. Рассмотрим нелинейные свободные колебания висячей комбинированной системы с бисимметричной балкой жесткости при двух неблагоприятных режимах: внутреннего резонанса и близости собственных частот вертикальных и крутильных колебаний.

Предположим, что в колебательном процессе доминируют только две моды: мода n вертикальных колебаний с собственной частотой ω_{0n} и мода m крутильных колебаний с собственной частотой Ω_{0m} , причем, $\omega_{0n} = 2\Omega_{0m} + \epsilon\sigma$ (случай внутреннего резонанса) или $\omega_{0n} = \Omega_{0m} + \epsilon^2\sigma$ (случай близости собственных частот колебаний), где σ — частотная расстройка, ϵ — малый параметр, имеющий порядок амплитуд. Тогда разрешающая система уравнений в безразмерном виде запишется так [2]:

$$x_{1n}'' + \omega_{0n}^2 x_{1n} + a_{11}^n x_{1n}^2 + a_{22}^{nm} x_{2m}^2 + (b_{11}^n x_{1n}^2 + b_{22}^{nm} x_{2m}^2) x_{1n} = 0 \quad (1.1)$$

$$x_{2m}'' + \Omega_{0m}^2 x_{2m} + a_{12}^{nm} x_{1n} x_{2m} + (c_{11}^{nm} x_{1n}^2 + c_{22}^m x_{2m}^2) x_{2m} = 0$$

$$a_{11}^n = \frac{3}{2} \mu_n^{-1} s_k q \int_L v_n dz \int_L (v_n')^2 dz, \quad a_{22}^{nm} = \mu_n^{-1} s_k q \left[\int_L \theta_m dz \int_L \theta_m' v_n' dz + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_L (\theta_m')^2 dz \int_L v_n dz \Big], \quad b_{11}^n = \mu_n^{-1} s_k \left[\int_L (v_n')^2 dz \right]^2 \\
& b_{22}^{nm} = \mu^{-1} s_k \left[\int_L (\theta_m')^2 dz \int_L (v_n')^2 dz + 2 \left(\int_L \theta_m' v_n' dz \right)^2 \right] \\
& a_{12}^{nm} = 1/4 \lambda_m^{-1} b_0^2 s_k q \left[\int_L v_n dz \int_L (\theta_m')^2 dz + 2 \left(\int_L v_n' \theta_m' dz \right)^2 \right] \\
& c_{11}^{nm} = 1/4 \lambda_m^{-1} b_0^2 s_k \left[\int_L (v_n')^2 dz \int_L (\theta_m')^2 dz + 2 \left(\int_L v_n' \theta_m' dz \right)^2 \right] \\
& c_{22}^m = 1/4 \lambda_m^{-1} b_0^2 s_k \left[\int_L (\theta_m')^2 dz \right]^2, \quad \mu_n = \int_L v_n^2 dz, \quad \lambda_m = \int_L \theta_m^2 dz
\end{aligned}$$

x_{1n}, x_{2m} — обобщенные перемещения, соответствующие линейным собственным формам $v_n(z), \theta_m(z)$ вертикальных и крутильных колебаний, z — пространственная координата, q — собственный вес единицы длины моста, b_0 , L — ширина и длина балки жесткости, s_k — жесткость кабеля, точка означает производную по времени, а штрих — производную по координате z .

Вертикальное перемещение центра тяжести $\eta(z, t)$ и угол поворота сечения вокруг оси z $\varphi(z, t)$ связаны с обобщенными координатами $x_{1i}(t), x_{2j}(t)$ следующими соотношениями

$$\eta(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(z) x_{1i}(t), \quad \varphi(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(z) x_{2j}(t)$$

Решение системы уравнений (1.1) для малых, но конечных перемещений точек системы может быть представлено путем разложения по разным временным масштабам $T_n = \varepsilon^n t$ ($n=0, 1, 2, \dots$) в следующей форме [3] (здесь и в дальнейшем индексы n, m опущены):

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \varepsilon x_{11}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_{12}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 x_{13}(T_0, T_1, T_2) + \dots \\
x_2(t) &= \varepsilon x_{21}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_{22}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 x_{23}(T_0, T_1, T_2) + \dots
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и учитывая, что

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{dT_2}{dt} \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\
d^2/dt^2 &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots
\end{aligned}$$

получим

$$D_0^2 x_{11} + \omega_0^2 x_{11} = 0, \quad D_0^2 x_{21} + \Omega_0^2 x_{21} = 0 \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} &= -2D_0 D_1 x_{11} - a_{11} x_{11}^2 - a_{22} x_{21}^2 \\
D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} &= -2D_0 D_1 x_{21} - a_{12} x_{11} x_{21}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_{13} + \omega_0^2 x_{13} &= -2D_0 D_1 x_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{11} - \\
&\quad - 2a_{11} x_{11} x_{12} - 2a_{22} x_{21} x_{22} - b_{11} x_{11}^3 - b_{22} x_{21}^2 x_{11}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_{23} + \Omega_0^2 x_{23} &= -2D_0 D_1 x_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{21} - \\
&\quad - a_{12} (x_{11} x_{22} + x_{12} x_{21}) - c_{11} x_{11}^2 x_{21} - c_{22} x_{21}^3
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1.3) ищем в виде

$$\begin{aligned}
x_{11} &= A_1(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_1(T_1, T_2) \exp(-i\omega_0 T_0) \\
x_{21} &= A_2(T_1, T_2) \exp(i\Omega_0 T_0) + \bar{A}_2(T_1, T_2) \exp(-i\Omega_0 T_0)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где A_1, A_2 — неизвестные комплексные функции \bar{A}_1, \bar{A}_2 — сопряженные к ним функции. Подставляя выражения (1.6) в уравнения (1.4), находим

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = & -2i\omega_0 D_1 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - a_{11} [A_1^2 \exp(2i\omega_0 T_0) + \\ & + A_1 \bar{A}_1] - a_{22} [A_2^2 \exp(2i\Omega_0 T_0) + A_2 \bar{A}_2] + cc \\ D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = & -2i\Omega_0 D_1 A_2 \exp(i\Omega_0 T_0) - \\ & - a_{12} \{A_1 A_2 \exp[i(\omega_0 + \Omega_0) T_0] + A_1 \bar{A}_2 \exp[i(\omega_0 - \Omega_0) T_0]\} + cc \end{aligned} \quad (1.7)$$

где cc — комплексно-сопряженная часть к предыдущим членам.

2. Рассмотрим случай внутреннего резонанса. Предположим, что коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} из (1.1) отличны от нуля, т. е. в резонанс вступают две симметричные формы колебаний или симметричная форма вертикальных колебаний с кососимметричной формой крутильных колебаний.

Для построения решения в этом случае достаточно ограничиться членами порядка ε^2 и считать амплитуды A_1, A_2 функциями только T_1 .

Учитывая, что $\omega_0 = 2\Omega_0 + \varepsilon\sigma$, перепишем уравнения (1.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = & -[2i\omega_0 D_1 A_1 + a_{22} A_2^2 \exp(-i\sigma T_1)] \exp(i\omega_0 T_0) - \\ & - a_{11} A_1^2 \exp(2i\omega_0 T_0) - a_{11} A_1 \bar{A}_1 - a_{22} A_2 \bar{A}_2 + cc \\ D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = & -[2i\Omega_0 D_1 A_2 + a_{12} A_1 \bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1)] \exp(i\Omega_0 T_0) - \\ & - a_{12} A_1 A_2 \exp(i\sigma T_1) \exp(3i\Omega_0 T_0) + cc \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функции $\exp(i\omega_0 T_0), \exp(i\Omega_0 T_0)$, входящие в выражения (2.1), порождают вековые члены, и поэтому коэффициенты, стоящие при этих функциях, должны обращаться в нуль. В результате получим

$$\begin{aligned} 2i\omega_0 D_1 A_1 + a_{22} A_2^2 \exp(-i\sigma T_1) &= 0 \\ 2i\Omega_0 D_1 A_2 + a_{12} A_1 \bar{A}_2 \exp(i\sigma T_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если в уравнениях (2.2) функции A_1, A_2 заменить соответственно на $A_1 \exp(i\sigma T_1), A_2 \exp(i\sigma T_1)$, то можно исключить из этих уравнений $\exp(\pm i\sigma T_1)$. Представляя A_1, A_2 в полярной форме

$$A_1 = a_1 \exp(i\varphi_1), \quad A_2 = a_2 \exp(i\varphi_2) \quad (2.3)$$

и разделяя в системе (2.2) действительные и мнимые части, в результате некоторых алгебраических операций приходим к системе четырех дифференциальных уравнений относительно $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$:

$$\begin{aligned} \omega_0 (a_1^2)^{\cdot} + a_{22} a_2^2 a_1 \sin \gamma &= 0, \quad \Omega_0 (a_2^2)^{\cdot} - a_{12} a_2^2 a_1 \sin \gamma = 0 \\ \varphi_1^{\cdot} + \sigma^{-1/2} a_{22} \omega_0^{-1} a_2^2 a_1^{-1} \cos \gamma &= 0, \quad \varphi_2^{\cdot} + \sigma^{-1/2} a_{12} \Omega_0^{-1} a_1 \cos \gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\gamma = 2\varphi_2 - \varphi_1$, а точка означает дифференцирование по T_1 .

Из первых двух уравнений системы (2.4) находим

$$a_1 = (E\xi)^{1/2}, \quad a_2 = (a_{12} \omega_0 (a_{22} \Omega_0)^{-1} E (1 - \xi))^{1/2} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.5)$$

$$\xi^{\cdot} = -a_{12} \Omega_0^{-1} (1 - \xi) (E\xi)^{1/2} \sin \gamma \quad (2.6)$$

где ξ — пока неизвестная функция от T_1 , а E является начальной энергией системы и определяется так: $E = a_1^2 + a_{22} \Omega_0 (a_{12} \omega_0)^{-1} a_2^2$.

Из третьего и четвертого уравнений системы (2.4) получаем

$$\cos \gamma = -\frac{\sigma \Omega_0 \xi^{1/2}}{a_{12} \sqrt{E} (1 - \xi)} + \frac{G}{\xi^{1/2} (1 - \xi)} \quad (2.7)$$

$$\gamma^{\cdot} = -1/2 a_{12} \Omega_0^{-1} E (1 - 3\xi) (E\xi)^{-1/2} \cos \gamma - \sigma \quad (2.8)$$

где G — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий. Исключая из (2.6), (2.7) величину γ и интегрируя по T_1 , имеем

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi - l^2)^{1/2}} = -\frac{a_{12}E^{1/2}T_1}{\Omega_0}, \quad l = G - \frac{\sigma\Omega_0}{a_{12}E^{1/2}}\xi \quad (2.9)$$

где ξ_0 — величина, определяющая относительный уровень начальных амплитуд.

Можно показать, что интеграл в (2.9) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода [4]. Предположим, что $a_1^* = a_2^* = 0$. Тогда из соотношений (2.4) получаем

$$\sin \gamma = 0; \quad \varphi_1^* = 2\omega = \text{const}, \quad \varphi_2^* = \omega = \text{const} \quad (2.10)$$

$$(2\omega + \sigma)(\omega + \sigma) - a_{12}a_{22}(4\Omega_0\omega_0)^{-1}a^2 = 0$$

$$a = a_2 = \text{const}$$

Покажем, что если ξ_0 соответствует стационарному режиму (2.10), то ξ_0 является корнем уравнения $dG/d\xi_0 = 0$ (необходимое условие стационарности режима).

Прежде всего отметим эквивалентность условий стационарности колебательного режима и кратности корня ξ_0 подкоренного выражения в интеграле (2.9). Далее, если выполняются соотношения (2.10) при $\xi = \xi_0$, то ξ_0 является корнем уравнения (2.7). Дифференцируя равенство (2.7) по ξ и полагая в нем $\cos \gamma = \pm 1$, $\xi = \xi_0$, приходим к требуемому условию.

Для исследования устойчивости стационарных колебаний, определяемых условием $dG/d\xi_0 = 0$, положим в соотношениях (2.6), (2.8) $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$, $\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$, где ξ_0 , γ_0 — значения величин ξ , γ в стационарном режиме, $\Delta\xi$, $\Delta\gamma$ — малые добавки, зависящие от T_1 .

Разлагая правые части уравнений (2.6), (2.8) по степеням $\Delta\xi$, $\Delta\gamma$ и сохраняя только линейные члены, приходим к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно величин $\Delta\xi$, $\Delta\gamma$. Предполагая, что $\Delta\xi$, $\Delta\gamma$ пропорциональны $\exp(mT_1)$, из полученной системы уравнений определяем коэффициент m

$$m_{1,2} = \pm i(a_{12}^2 E \Omega_0^{-2} \xi_0^{1/2} (\mp d^2 G / d\xi_0^2) (1 - \xi_0))^{1/2} \quad (2.11)$$

где верхний знак перед $d^2 G / d\xi_0^2$ соответствует $\cos \gamma_0 = 1$, а нижний — $\cos \gamma_0 = -1$, величина $\mp d^2 G / d\xi_0^2 = \xi_0^{-1/2} [3/4 + 1/4 \xi_0^{-1}] > 0$, т. е. стационарный колебательный режим в условиях внутреннего резонанса всегда устойчив.

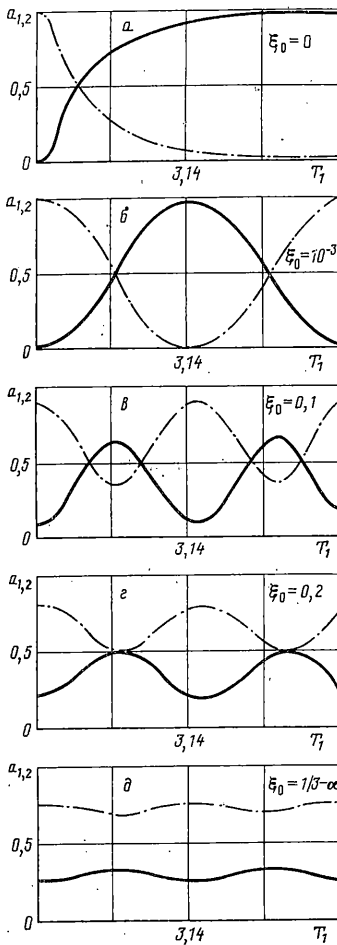
Проанализируем соотношение (2.9) при различных значениях величин ξ_0 , σ , G .

Пусть в начальный момент времени $\cos \gamma = \pm 1$, $\xi = \xi_0$. Для простоты положим сначала $\sigma = 0$. Необходимое условие стационарности режима дает значение величины $\xi_0 = 1/3$. Вблизи значения $1/3$, т. е. при $\xi_0 = 1/3 \pm \alpha$ ($\alpha > 0$ — малая величина) удается найти аналитическое решение

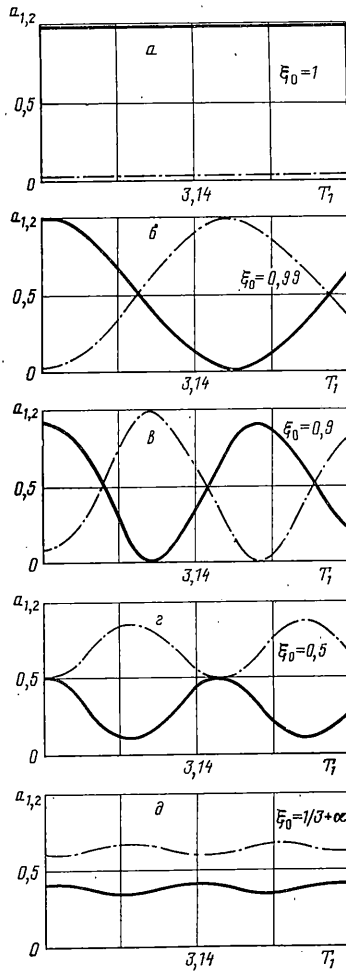
$$\xi = 1/3 \pm \alpha \cos(bt_1), \quad b = a_{12} \sqrt{E} \Omega_0^{-1}$$

$$\varphi_1 = 3/2 G b t_1, \quad \varphi_2 = 3/4 G b t_1, \quad \gamma = 0$$

которое показывает, что при переходе через $1/3$ периодическая перекачка энергии в соответствующие моменты времени меняет свое направление на противоположное.



Фиг. 1



Фиг. 2

Направление перекачки энергии будем связывать со знаком величины $dG/d\xi_0$: если $dG/d\xi_0 > 0$, то направление перекачки энергии считается положительным, если $dG/d\xi_0 < 0$ — отрицательным. Так, при $\xi_0 < 1/3$ $dG/d\xi_0 > 0$, а при $\xi_0 > 1/3$ $dG/d\xi_0 < 0$ ($\cos \gamma_0 = 1$); если $\cos \gamma_0 = -1$, то в рассмотренных интервалах ξ_0 $dG/d\xi_0$ имеет противоположные знаки.

Если при тех же начальных условиях $\sigma \neq 0$, то необходимое условие стационарности дает значение

$$\xi_0 = \frac{1}{3} + \frac{2\sigma^2}{9b^2} + \frac{2\sigma}{3b} \left(\frac{1}{3} \left(1 + \frac{\sigma^2}{3b^2} \right) \right)^{1/2}$$

которое при $\sigma \rightarrow 0$ стремится к $1/3$.

Исследуем теперь граничные точки области $0 \leq \xi_0 \leq 1$. При $\xi_0 = 0$, $\sigma = 0$ получаем аналитическое решение

$$(1 - \sqrt{\xi}) / (1 + \sqrt{\xi}) = \exp(-bT_1), \quad \cos \gamma = 0 \quad (2.12)$$

определяющее аperiodическую перекачку энергии, которая при $T_1 \rightarrow \infty$ приводит к полному переходу энергии из крутильных колебаний в вертикальные. Если при $\xi_0 = 0$, $\cos \gamma_0 = 0$ $\sigma \neq 0$, то наблюдается периодический

Таблица 1

ξ	T_1	ξ	T_1	ξ	T_1
0,021	-0,302	0,034	-0,917	0,002	-1,796
0,046	-0,135	0,123	-0,584	0,113	-1,448
$\xi=0,1$ ($\varphi_0=-18^\circ$)	0	0,226	-0,409	0,394	-1,058
0,362	0,403	0,351	-0,223	0,714	-0,961
0,639	0,848	$\xi_0=0,5$ ($\varphi_0=-51^\circ$)	0	$\xi=0,9$ ($\varphi_0=76^\circ,5$)	0
0,820	1,417	0,713	0,445	0,923	0,173
0,845	1,743	0,803	0,997	0,951	0,656

энергообмен между вертикальными и крутильными колебаниями, который описывается уравнением

$$\int_0^{\xi^{1/2}} \frac{du}{((u^2-1+d)(u^2-1-d))^{1/2}} = -\frac{b}{2} T_1, \quad d = \frac{\sigma \Omega_0}{a_{12} \sqrt{E}} \quad (2.13)$$

При $\sigma=0$ формула (2.13) переходит в формулу (2.12).

Полагая $\xi_0=1-\alpha$, где α — малая величина, из соотношения (2.9) при $\sigma=0$ и произвольном γ_0 имеем

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{(\xi(1-\xi)^2 - \alpha^2 \cos^2 \gamma_0)^{1/2}} - \int_0^{1-\alpha} \frac{d\xi}{(\xi(1-\xi)^2 - \alpha^2 \cos^2 \gamma_0)^{1/2}} = -b T_1 \quad (2.14)$$

При $\alpha \rightarrow 0$ выражение (2.14) определяет стационарный режим $\xi = \xi_0 = 1$, $\cos \gamma = 0$.

Заметим, что наличие расстройки $\sigma \neq 0$ при $\xi_0 = 1$ не нарушает стационарности данного режима.

На фиг. 1, 2 показаны зависимости величин ξ , $1-\xi$, пропорциональных квадратам амплитуд a_1 , a_2 , от T_1 при различных значениях ξ_0 . При расчетах использовались параметры всячего моста «Золотые ворота» в Сан-Франциско, взятые из [2], при резонансном взаимодействии шестой симметричной формы вертикальных колебаний ($\omega_{06}^c = 2,62$ рад/с) с первой симметричной формой крутильных колебаний ($\Omega_{01}^c = 1,33$ рад/с). Сплошные линии здесь и в дальнейшем соответствуют ξ , штрих-пунктирные — $(1-\xi)$. Величина b принималась равной единице. Из графиков видно, что взаимное расположение двух кривых меняется с изменением ξ_0 , а именно: при $0 < \xi_0 < 0,2$ и $0,5 < \xi_0 < 1$ кривые ξ , $1-\xi$ пересекают друг друга (расположение внахлест); при $\xi_0 = 0,2$, $\xi_0 = 0,5$ касаются друг друга, а при $0,2 < \xi_0 < 0,5$ находятся на некотором расстоянии друг от друга; это расстояние увеличивается при приближении ξ_0 к $1/3$ и при $\xi_0 = 1/3$ достигает наибольшего значения.

В том случае, когда $\sigma = 0$, а в начальный момент времени $\cos \gamma \neq \pm 1$, например, $\cos \gamma = 0,5$, стационарный режим не реализуется и перекачка энергии из одной подсистемы в другую не меняет своего направления (табл. 1). В табл. 1 сведены значения периодической величины ξ за время, равное половине ее периода. Эта таблица иллюстрирует тот факт, что начальная фаза φ_0 амплитуд a_1 , a_2 зависит от ξ_0 , т. е. начало отсчета для зависимостей ξ , $1-\xi$ от T_1 как бы сдвигается вправо с увеличением ξ_0 .

3. Для сравнения рассмотрим колебания в случае взаимодействия двух форм вертикальных и крутильных колебаний с близко расположенными частотами, т. е. при $\omega_0 = \Omega_0 + \sigma \varepsilon^2$.

При анализе этого случая будем использовать системы уравнений (1.3)–(1.5), при этом A_1, A_2 являются функциями T_1, T_2 .

Чтобы решение, удовлетворяющее этим системам, не содержало вековых членов, необходимо, чтобы A_1, A_2 не зависели от T_1 и удовлетворяли следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} -iA_1 \dot{} - \lambda_1 A_1^2 \bar{A}_1 - \lambda_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + \frac{1}{4} \Gamma_1 \bar{A}_1 A_2^2 \exp(-2i\sigma T_2) &= 0 \\ -iA_2 \dot{} - \lambda_3 A_1 \bar{A}_1 A_2 - \lambda_4 A_2^2 \bar{A}_2 + \frac{1}{4} \Gamma_2 A_1^2 \bar{A}_2 \exp(2i\sigma T_2) &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{3}{2} b_{11} \omega_0^{-1} - \frac{5}{3} a_{11}^2 \omega_0^{-3}, \quad \lambda_2 = b_{22} \omega_0^{-1} - 2a_{11} a_{22} \omega_0^{-3} - \frac{2}{3} a_{12} a_{22} \omega_0^{-1} \Omega_0^{-2} \\ \lambda_3 &= c_{11} \Omega_0^{-1} - \frac{1}{3} a_{12}^2 \Omega_0^{-3} - a_{11} a_{12} \Omega_0^{-1} \omega_0^{-2}, \quad \lambda_4 = \frac{3}{2} c_{22} \Omega_0^{-1} - \frac{5}{6} a_{12} a_{22} \Omega_0^{-1} \omega_0^{-2} \\ \Gamma_1 &= 4a_{12} a_{22} \omega_0^{-1} \Omega_0^{-2} - \frac{4}{3} a_{11} a_{22} \omega_0^{-3} - 2b_{22} \omega_0^{-1}, \\ \Gamma_2 &= 2a_{12}^2 \Omega_0^{-3} - \frac{2}{3} a_{11} a_{12} \omega_0^{-2} \Omega_0^{-1} - 2c_{11} \Omega_0^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь точка означает производную по T_2 .

Если в уравнениях (3.1) функцию A_2 заменить на $A_2 \exp(i\sigma T_2)$, то исчезнут $\exp(\pm 2i\sigma T_2)$. Представляя A_1, A_2 в полярной форме (2.3), разделяя в системе (3.1) действительные и мнимые части, в результате некоторых алгебраических операций приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (a_1^2) \dot{} - \frac{1}{2} \Gamma_1 a_1^2 a_2^2 \sin \delta &= 0, \quad (a_2^2) \dot{} + \frac{1}{2} \Gamma_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta &= 0 \\ \varphi_1 \dot{} - \lambda_1 a_1^2 - \lambda_2 a_2^2 + \frac{1}{4} \Gamma_1 a_2^2 \cos \delta &= 0 \\ \varphi_2 \dot{} - \lambda_3 a_1^2 - \lambda_4 a_2^2 + \frac{1}{4} \Gamma_2 a_1^2 \cos \delta + \sigma &= 0, \quad \delta = 2(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из первых двух уравнений системы (3.2) находим

$$a_1 = (E\xi)^{1/2}, \quad a_2 = (\Gamma_2 \Gamma_1^{-1} E(1-\xi))^{1/2} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3.3)$$

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2} \Gamma_2 E \xi (1-\xi) \sin \delta \quad (3.4)$$

где ξ — пока неизвестная функция от T_2 , а $E = a_1^2 + \Gamma_1 \Gamma_2^{-1} a_2^2$ — начальная энергия системы.

Из двух других уравнений системы (3.2) получаем

$$\cos \delta = \frac{4\sigma}{\Gamma_2 E(1-\xi)} + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_3)\xi}{\Gamma_2(1-\xi)} - \frac{2(\lambda_2 - \lambda_4)(1-\xi)}{\Gamma_2 \xi} + \frac{G}{\xi(1-\xi)} \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2} \delta \dot{} = \frac{1}{4} \Gamma_2 E(1-2\xi) \cos \delta - (\lambda_1 - \lambda_3) E \xi - \Gamma_2 \Gamma_1^{-1} (\lambda_2 - \lambda_4) E(1-\xi) - \sigma \quad (3.6)$$

где G — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий. Исключая из (3.4) и (3.5) величину δ и интегрируя по T_2 , имеем

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \int_0^\xi \frac{d\xi}{((\xi^2 + p_1 \xi + q_1)(\xi^2 + p_2 \xi + q_2))^{1/2}} = \frac{E}{2\Gamma_1} T_2 \quad (3.7)$$

$$m_1 = -\Gamma_1 \Gamma_2 - 2(\lambda_1 - \lambda_3) \Gamma_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_2$$

$$m_2 = -\Gamma_1 \Gamma_2 + 2(\lambda_1 - \lambda_3) \Gamma_1 - 2(\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_2$$

$$p_1 = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 - 4\sigma E^{-1} \Gamma_1 - 4(\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_2}{m_1}, \quad q_1 = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_2 - G \Gamma_1 \Gamma_2}{m_1}$$

$$p_2 = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 + 4\sigma E^{-1} \Gamma_1 + 4(\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_2}{m_2}, \quad q_2 = \frac{-2(\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_2 + G \Gamma_1 \Gamma_2}{m_2}$$

Интеграл в выражении (3.7) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода [4].

Предположим, что $a_1^* = a_2^* = 0$. Тогда из соотношений (3.2) получаем

$$\sin \delta = 0, \quad \varphi_1^* = \varphi_2^* = \kappa = \text{const} \quad (3.8)$$

$$\sigma + \frac{\lambda_1 - \lambda_3 - 0,25\Gamma_2}{\lambda_1} \kappa - \frac{\lambda_1 \lambda_4 + (\lambda_3 - 0,25\Gamma_2)(\lambda_2 - 0,25\Gamma_1)}{\lambda_1} a^2 = 0$$

Можно показать, что в данном случае необходимое условие стационарности колебательного режима остается прежним.

Для анализа устойчивости стационарных колебаний положим в соотношениях (3.4), (3.6) $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$, $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$, где ξ_0 , δ_0 — значения величин ξ , δ в стационарном режиме, $\Delta\xi$, $\Delta\delta$ — малые добавки, зависящие от T_2 .

Проведя линеаризацию правых частей уравнений (3.4), (3.6), приходим к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно $\Delta\xi$, $\Delta\delta$. Выбирая решение в виде $\Delta\xi = A \exp(nT_2)$, $\Delta\delta = B \exp(nT_2)$, где A , B — некоторые постоянные коэффициенты, из полученной системы уравнений находим

$$n_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2} E (\xi_0 (1 - \xi_0) \Gamma_2^2 (\pm d^2 G / d\xi_0^2))^{1/2}} \quad (3.9)$$

$$\pm d^2 G / d\xi_0^2 = 4\Gamma_2^{-2} [-\sqrt[4]{\frac{1}{2} \Gamma_2^2 \mp (\lambda_1 - \lambda_3) \Gamma_2 \pm (\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_2^2 \Gamma_1^{-1}}]$$

верхний знак, стоящий перед величиной $d^2 G / d\xi_0^2$ и в квадратных скобках, соответствует $\cos \delta_0 = 1$, а нижний — $\cos \delta_0 = -1$.

Из (3.9) следует, что если величина $\pm d^2 G / d\xi_0^2$ меньше нуля, то стационарный режим устойчив, если больше нуля — неустойчив.

Так как выражение, стоящее в квадратных скобках и определяющее знак второй производной от функции G , зависит только от вида двух вступающих во взаимодействие собственных форм колебаний, то для исследования устойчивости стационарных режимов необходимо задаться реальной висячей комбинированной системой.

Проанализируем соотношения (3.7) — (3.9) при различных значениях ξ_0 , G для висячего моста «Золотые ворота» в четырех случаях: 1) $\omega_{05}^c = \Omega_{03}^c = 2,61$ рад/с, $\sigma = 0$; 2) $\omega_{04}^c = 1,80$ рад/с, $\Omega_{02}^c = 1,83$ рад/с, $\sigma < 0$; 3) $\omega_{02}^{ac} = 1,14$ рад/с, $\Omega_{01}^{ac} = 1,17$ рад/с, $\sigma < 0$; 4) $\omega_{03}^c = 1,60$ рад/с, $\Omega_{01}^c = 1,33$ рад/с, $\sigma > 0$ (индекс c указывает на симметричную моду колебаний, а индекс ac — на антисимметричную моду). Числовые данные взяты из [2].

Пусть в начальный момент времени $\cos \delta = \pm 1$, $\xi = \xi_0$. Необходимое условие стационарности дает значение величины ξ_0 , равное

$$\xi_0^{\pm} = \frac{1}{2} \left[\pm 1 - \frac{4\sigma}{\Gamma_2 E} - \frac{4(\lambda_2 - \lambda_4)}{\Gamma_1} \right] \left[\pm 1 + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_3)}{\Gamma_2} - \frac{2(\lambda_2 - \lambda_4)}{\Gamma_1} \right]^{-1} \quad (3.10)$$

Здесь верхний знак соответствует $\cos \delta_0 = 1$, а нижний — $\cos \delta_0 = -1$.

Используя формулу (3.10), подсчитаем ξ_0 для четырех указанных выше случаев. В результате получим:

при $\cos \delta_0 = 1$: $\xi_{01}^+ = -0,75$, $\xi_{02}^+ = -2,89$, $\xi_{03}^+ = 0,174$, $\xi_{04}^+ = 0,669$;

при $\cos \delta_0 = -1$: $\xi_{01}^- = 0,046$, $\xi_{02}^- = 2,73$, $\xi_{03}^- = 0,398$, $\xi_{04}^- = 1,05$.

Для первого и второго случаев при $\cos \delta_0 = 1$ и для второго и четвертого случаев при $\cos \delta_0 = -1$ значения ξ_0 не попадают в область определения $0 \leq \xi_0 \leq 1$, и следовательно, в этих случаях стационарный режим отсутствует. Для третьего и четвертого случаев при $\cos \delta_0 = 1$ и для первого и третьего случаев при $\cos \delta_0 = -1$ формула (3.9) позволяет решить вопрос об устойчивости или неустойчивости каждого из этих стационарных режимов, а именно: $\xi_{03}^+ = 0,174$ — режим неустойчив (G_{\min}), $\xi_{04}^+ = 0,669$ — устойчив (G_{\max}), $\xi_{01}^- = 0,05$ — режим устойчив (G_{\min}), $\xi_{03}^- = 0,398$ — устойчив (G_{\min}).

$\omega_{05}^c = \Omega_{03}^c, \sigma = 0$		$\omega_{04}^c = \Omega_{02}^c - 0,124 \cdot 10^{-4}, \sigma = -0,06E$	
ξ	T_2	ξ	T_2
$\xi_0 = 0,1$	0	$\xi_0 = 0,1$	0
0,104	0,360	0,097	0,748
0,117	0,721	0,089	1,523
0,138	1,081	0,080	2,347
0,166	1,442	0,073	3,220
0,182	1,622	0,071	3,667
$\xi_0 = 0,9$	0	$\xi_0 = 0,9$	0
0,901	0,124	0,896	0,778
0,904	0,248	0,885	1,595
0,908	0,372	0,872	2,483
0,913	0,497	0,861	3,449
0,916	0,559	0,860	3,952

Кроме стационарных точек, задаваемых формулой (3.10), существуют стационарные точки на границах области изменения ξ_0 . Действительно, если $\xi_0 = 0$ ($\xi_0 = 1$), то $G = 2(\lambda_2 - \lambda_4) \Gamma_1^{-1}$ ($G = -4\sigma \Gamma_2^{-1} E^{-1} - 2(\lambda_1 - \lambda_3) \Gamma_2^{-1}$), и, как следует из (3.7), ξ_0 в этих случаях является кратным корнем выражения, стоящего под корнем в левой части формулы (3.7).

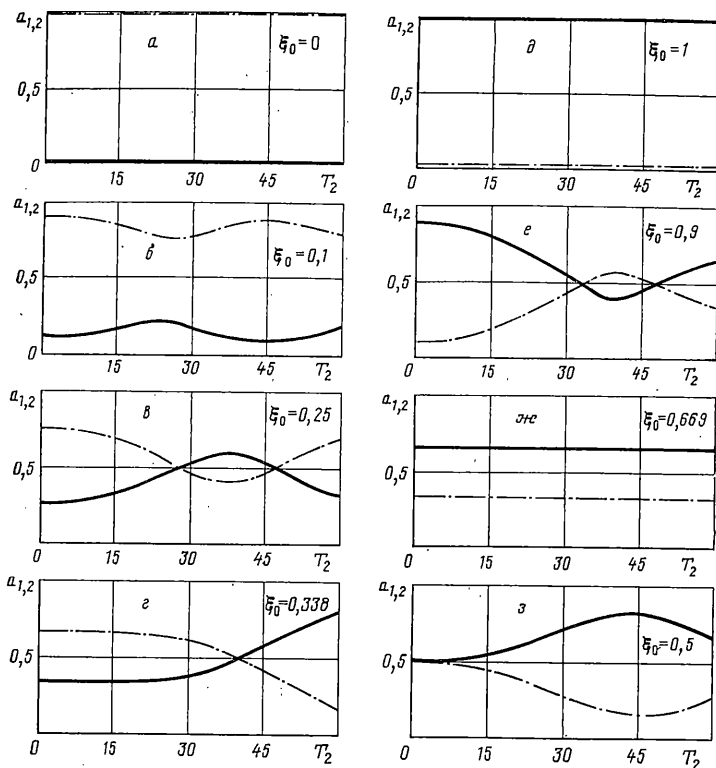
Результаты расчета, проведенного для первых двух случаев при $\cos \delta_0 = 1$ на основе формулы (3.7) за время, равное половине периода величины ξ , приведены в табл. 2, из которой видно, что при изменении $0 < \xi_0 < 1$, энергообмен между двумя подсистемами происходит в одном направлении (для первого случая $dG/d\xi_0 > 0$, для второго $dG/d\xi_0 < 0$). При стремлении ξ_0 к нулю или единице размах амплитуд уменьшается и в пределе равен нулю, т. е. при $\xi_0 = 0$ или $\xi_0 = 1$ реализуется стационарный режим.

Результаты расчетов величины ξ , $1 - \xi$ в зависимости от T_2 для четвертого случая при $\cos \delta_0 = 1$, $\sigma E^{-1} = 0,083$ приведены на фиг. 3. Из графиков видно, что при переходе ξ_0 через стационарную точку, находящуюся внутри области изменения ξ , направление перекачки энергии меняется на противоположное в соответствующие моменты времени, а при переходе через апериодический режим ($\xi_0 = 0,338$) направление энергообмена остается неизменным; при стремлении ξ_0 к нулю или единице энергообмен убывает до нуля.

Таким образом, определенное направление перекачки энергии связано с постоянством знака величины $dG/d\xi_0$: изменение направления перекачки энергии, что как раз и наблюдается при переходе через стационарную точку, приводит к перемене знака $dG/d\xi_0$, т. е. знак $d^2G/d\xi_0^2$ должен оставаться постоянным при переходе через стационарную точку. Следовательно, если в точке $\xi = \xi_0$ величина $dG/d\xi_0 = 0$ (необходимое условие стационарности), а $d^2G/d\xi_0^2 \neq 0$, то при $\xi = \xi_0$ реализуется стационарный режим (необходимое и достаточное условия стационарности колебательного режима); знак величины $d^2G/d\xi_0^2$ характеризует устойчивость или неустойчивость данного процесса.

Если рассматривать G как функцию двух переменных δ_0 , ξ_0 , то точки с координатами δ_0^+ , ξ_0^+ и δ_0^- , ξ_0^- , где $\delta_0^+ = 0$, $\delta_0^- = \pi$, являются точками, подозрительными на экстремум, т. е. $\partial G(\delta_0^\pm, \xi_0^\pm) / \partial \xi_0 = 0$, $\partial G(\delta_0^\pm, \xi_0^\pm) / \partial \delta_0 = 0$. Достаточное условие экстремума дает

$$\Delta = \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \delta_0^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \xi_0 \partial \delta_0} \right)^2 = \mp 2 \left[\mp 1 - \frac{2(\lambda_1 - \lambda_3)}{\Gamma_2} + \frac{2(\lambda_2 - \lambda_4)}{\Gamma_1} \right] \xi_0^\pm (1 - \xi_0^\pm) > 0$$



Фиг. 3

так что при $+\partial^2 G(0; \xi_0^+)/\partial \xi_0^2 < 0$ и $-\partial^2 G(\pi, \xi_0^-)/\partial \xi_0^2 < 0$ это условие действительно реализуется. Иначе говоря, если стационарные режимы являются устойчивыми, то в точках с координатами $0, \xi_0^+$ и π, ξ_0^- функция $G(\delta_0, \xi_0)$ достигает соответственно максимума и минимума; если же стационарные колебательные режимы неустойчивы, то $\Delta < 0$ и функции $G(\delta_0, \xi_0)$ не имеет в этих точках ни максимума ни минимума (седлообразные точки).

В заключение рассмотрим частное аналитическое решение, которое получается при $q_1 = q_2 = 0$, что соответствует

$$\bar{\xi}_0 = \frac{\cos \delta_0 - 4\sigma E^{-1} \Gamma_2^{-1} - 4\Gamma_1^{-1} (\lambda_2 - \lambda_4)}{\cos \delta_0 + 2\Gamma_2^{-1} (\lambda_1 - \lambda_3) - 2\Gamma_1^{-1} (\lambda_2 - \lambda_4)}$$

При $\cos \delta_0 = \pm 1$ значения параметров, входящих в формулу (3.7), имеют следующий вид: $\bar{\xi}_0 = 2\xi_0^\pm$, $p_1 = -\xi_0^+$, $p_2 = -\xi_0^-$.

Проведенный анализ этого решения позволяет сформулировать необходимое условие, приводящее к аperiodическому движению, а именно: или величины $+d^2 G/d\xi_0^2$ при ξ_0^+ и $-d^2 G/d\xi_0^2$ при ξ_0^- одного знака или эти же величины разных знаков, но при этом $\xi_0^+ \xi_0^- < 0$ (см. ниже первый пример).

Построение частного решения проведем на примерах первого и третьего из рассмотренных выше случаев. В результате получим:

первый случай ($\cos \delta_0 = -1$, $\bar{\xi}_0 = 0,093$):

$$\exp(0,43ET_2) = (1,26(-0,14\xi^2 - 0,19\xi + 0,02)^{1/2} - 0,88\xi + 0,18) \xi^{-1}$$

$$\varphi_1 = -0,75 \arcsin(1,26\xi + 0,88) + 0,39ET_2 + 1,18$$

$$\varphi_2 = 1,11 \arcsin(1,26\xi + 0,88) - 0,11ET_2 - 0,18$$

третий случай ($\cos \delta_0=1, \xi_0=0,348$):

$$\xi=1,23[2,55+\cos(0,06ET_2)]^{-1},$$

$$\varphi_1=0,77 \arcsin(-4,46\xi+2,55)-1,93 \arcsin(2,55-1,24\xi^{-1})-4,24,$$

$$\varphi_2=-0,33 \arcsin(-4,46\xi+2,55)-2,60 \arcsin(2,55-1,24\xi^{-1})-3,57$$

Заметим, что аналитическое решение существует не только в первом и третьем случаях, но и в четвертом случае при $\xi_0=0,338, \cos \delta_0=1,$

$$G=-4\sigma\Gamma_2^{-1}E^{-1}-2(\lambda_1-\lambda_3)\Gamma_2^{-1}:$$

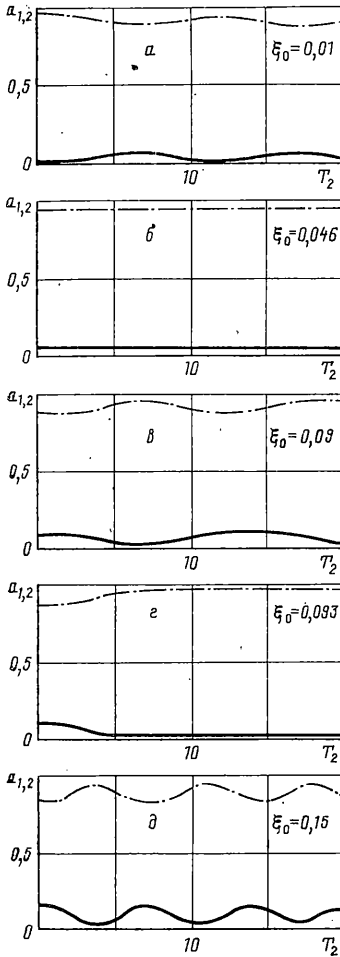
$$\exp(0,04ET_2)=[2,56(-0,07(1-\xi)^2+0,04(1-\xi)+0,01)^{1/2}+0,17+0,72(1-\xi)](1-\xi)^{-1}$$

$$\varphi_1=0,17 \arcsin(-2,62\xi+1,88)-0,5 \arcsin(1,88-0,97\xi^{-1})+0,02ET_2+0,48$$

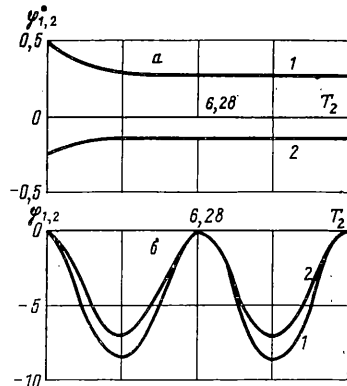
$$\varphi_2=-1,53 \arcsin(-2,62\xi+1,88)-0,94 \arcsin(1,88-0,97\xi^{-1})-0,02ET_2+0,92$$

На фиг. 4 приведены зависимости $\xi, 1-\xi$ от T_2 для первого случая при $\cos \delta_0=-1, E=1$ для различных значений ξ_0 .

Из графиков следует, что при



Фиг. 4



Фиг. 5

$\xi_0=0,046$ наблюдается стационарный режим колебаний, а при $\xi_0=0,093$ колебательный процесс переходит в аperiodическое движение, при котором $\xi \rightarrow 0$ при $T_2 \rightarrow \infty$, т. е. начиная с некоторого момента времени, свободные крутильные колебания преобладают над вертикальными. При переходе через стационарный режим направление перекачки энергии в соответствующие моменты времени меняется на противоположное, а при переходе через аperiodический режим направление энергообмена остается неизменным.

Фиг. 5, а, б иллюстрирует соответственно зависимости $\varphi_{1,2}$ для первого случая при $E=1$ и $\varphi_{1,2}$ для третьего случая при $0,06E=1$ от T_2 . Из графика

ков видно, что частоты $\varphi_{1,2}$ (кривые 1, 2) при $T_2 \rightarrow \infty$ стремятся к постоянным величинам 0,39 и -0,11, а фазы $\varphi_{1,2}$ (кривые 1, 2) меняются по гармоническому закону с увеличением T_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1948. 60 с.
2. Abdel-Ghaffar A. M., Rubin L. I. Nonlinear free vibrations of suspension bridges: theory and application // Amer. Soc. Civil Eng., J. Eng. Mech. 1983. V. 109. № 1. P. 313-345.
3. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 445 с.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1968. 344 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
11.VII.1989