

УДК 624.07 : 534.1

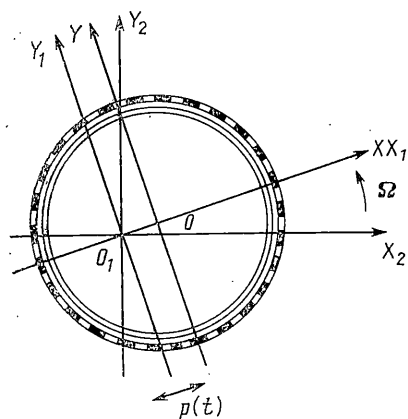
© 1991 г.

Е. П. КУБЫШКИН

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИИ НА ОРИЕНТАЦИЮ ВОЛНОВОГО ФРОНТА КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА

В работе изучается влияние высокочастотной поперечной вибрации на ориентацию волнового фронта кольцевого резонатора [1]. Показано, что высокочастотная вибрация выделяет два возможных положения волнового фронта, одно из которых устойчиво, другое неустойчиво. Получена формула для скорости прецессии волнового фронта кольцевого резонатора, вращающегося относительно инерциального пространства и подверженного направленной высокочастотной вибрации.

1. Постановка задачи. Рассматривается кольцевой резонатор, представляющий собой тонкое идеальное круговое нерастяжимое кольцо радиуса R , совершающее в своей плоскости незатухающие колебания. Для



Фиг. 1

поддержания колебаний кольца используется параметрический способ возбуждения колебаний [1], для чего на резонатор и внешний кольцевой электрод подается переменное напряжение $V(t) = V_0 \cos(\lambda_0 t)$. Кроме этого, система кольцо — электрод вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости колебаний кольца и совершает высокочастотные колебания (вибрацию) $p(t) = v \sin(\omega t)$ малой амплитуды вдоль одной из осей плоскости вращения. Схема рассматриваемой механической системы представлена на фиг. 1, где оси OX_1, OY_1, OX_2, OY_2 соответственно связаны с кольцом, плоскостью вращения и инерциальным пространством.

Материал кольца считаем вязкоупругим, подчиненным следующей модели материала

$$\sigma^\sim(t) = E(I^* - \Gamma^*) \varepsilon^\sim(t) \equiv E(\varepsilon^\sim(t) - \int_{-\infty}^0 R^\sim(\tau) \varepsilon(t + \tau) d\tau) \quad (1.1)$$

где $\sigma^\sim(t), \varepsilon^\sim(t), E, R^\sim(\tau) > 0$ соответственно напряжение, деформация, модуль Юнга и функция релаксации.

Обобщим нелинейные динамические уравнения упругого нерастяжимого кольца [1] на рассматриваемую механическую систему.

Положение точек средней линии кольца в плоскости OX_1Y_1 будем определять либо их декартовыми координатами $x = x(s, t), y = y(s, t)$, либо полярными $r = r(s, t), \theta = \theta(s, t)$ ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$). Здесь независимая переменная s , определяющая точку на кольце, представляет собой длину

дуги между рассматриваемой точкой и некоторой начальной точкой, t — время. В дальнейшем штрих обозначает производную по s , точка — по t .

Плотность кинетической энергии невибрирующего кольца в декартовых координатах $x_1=x$, $y_1=y$ имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \rho S [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + 2\Omega(-\dot{x}_1 y_1 + \dot{y}_1 x_1) + \Omega^2(x_1^2 + y_1^2)]$$

где ρ и S соответственно плотность материала и площадь сечения кольца. С учетом вибрации $x_1 = x + p(t)$, $y_1 = y$ это дает

$$T = \frac{1}{2} \rho S [\dot{x}^2 + 2\dot{p}(t)\dot{x} + \dot{p}^2(t) + \dot{y}^2 + 2\Omega(-\dot{x}y - \dot{p}(t)y + \\ + \dot{y}x + \dot{y}p(t)) + \Omega^2(x^2 + 2p(t)x + p^2(t) + y^2)]$$

Перейдя теперь к полярным координатам, будем иметь

$$T(\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}, t) = \frac{1}{2} \rho S [r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{p}(t)(r \cos \theta - \\ - r \sin \theta \dot{\theta}) + \dot{p}^2(t) + 2\Omega(r^2 \dot{\theta} - \dot{p}(t)r \sin \theta + p(t)r \times \\ \times \sin \theta + p(t)r \cos \theta \dot{\theta}) + \Omega^2(r^2 + 2p(t)r \cos \theta + p^2(t))]$$

Получим выражения для плотности потенциальной энергии кольца. Введем в рассмотрение угол Φ между нормалью к средней линии кольца и осью OX . Величина $\Phi' - \Phi_0'$, где $\Phi_0 = s/R$ — угол, определяющий положение нормали недеформированного кольца, характеризует приращение кривизны кольца в рассматриваемой точке. Отсюда с учетом (1.1) плотность потенциальной энергии имеет вид $\Pi(\Phi' - \Phi_0') = \frac{1}{2} EI (I^* - \Gamma^*) (\Phi' - \Phi_0')^2$, где I — момент инерции сечения кольца относительно средней линии. Для $\Phi - \Phi_0$ справедливо выражение [1]:

$$\Phi - \Phi_0 = \theta - \alpha - s/R, \quad \alpha = \arctg(r'/(r\theta'))$$

В итоге имеем следующую плотность функции Лагранжа:

$$L(\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}, \Phi', t) = T(\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}, t) - \Pi(\Phi' - \Phi_0')$$

Для получения уравнений динамики кольца воспользуемся вариационным принципом Гамильтона, для чего минимизируем функционал действия:

$$H = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} (L(\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}, \Phi', t) - \lambda f(\theta', r, r')) dt ds$$

где $\lambda = \lambda(s, t)$ — неопределенный множитель Лагранжа, функция $f(\theta', r, r')$ определяет уравнение связи $f(\theta', r, r') = \frac{1}{2}[(r')^2 + (r\theta')^2 - 1] = 0$, характеризующее условие нерастяжимости средней линии кольца.

В результате с учетом внешних электрических сил, приложенных к кольцу со стороны кольцевого электрода, плотность которых определяется выражением [1]: $Q(r, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 l V^2(t) / (d - R - r)^2$, где ϵ_0 — абсолютная электрическая постоянная вакуума, l — ширина электрода, d — расстояние между недеформированным кольцом и электродом, будем иметь следующую систему уравнений динамики изучаемого кольцевого резонатора

$$\rho S \left[\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - \dot{p}''(t) r \sin \theta + 2\Omega(r \dot{r} + \dot{p}(t) r \cos \theta) + \Omega^2 p(t) r \sin \theta \right] - \\ - EI(I^* - \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'' + \\ + EI[r r' (I^* - \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'''] - (\lambda r^2 \dot{\theta}')' = -Q(r, t) r \sin \alpha \quad (1.2) \\ \rho S [\ddot{r} + \dot{p}''(t) \cos \theta - r \dot{\theta}^2 - 2\Omega(r \dot{\theta} - \dot{p}(t) \sin \theta) - \\ - \Omega^2(r + p(t) \sin \theta)] - EI[r \dot{\theta}' (I^* - \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'''] -$$

$$-EI r' \theta' (I^* - \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'' + \lambda r \theta'^2 - (\lambda r')' =$$

$$= Q(r, t) \cos \alpha \quad (1.3)$$

$$(r')^2 + (r \theta')^2 - 1 = 0 \quad (1.4)$$

В отсутствие высокочастотной вибрации $\Omega=0$ электрические силы возбуждают в кольце стоячую волну, оси пучностей которой ориентируются случайным образом. Эта волна при $\Omega \neq 0$ прецессирует вдоль кольца в обратном направлении с некоторой угловой скоростью [1]. В настоящей работе изучается влияние высокочастотной вибрации на ориентацию волны и ее скорость прецессии. Как оказывается, при $\Omega=0$ высокочастотная вибрация выделяет два возможных расположения осей пучностей волны, одно из которых является асимптотически устойчивым, другое неустойчивым. В случае $\Omega \neq 0$ ситуация выглядит следующим образом. Существует пороговое значение $\Omega^* > 0$, величина которого определяется амплитудой и частотой вибрации. При $|\Omega| > \Omega^*$ указанные волны прецессируют вдоль кольца в обратном направлении с некоторой угловой скоростью, при $|\Omega| < \Omega^*$ прецессия отсутствует. Для скорости прецессии волны получена формула, обобщающая соответствующий результат из [1].

2. Переход в (1.2)–(1.4) к безразмерным переменным и постановка начально-краевой задачи. Положим

$$s = R\varphi, r = R(1+r_1), \theta = \varphi + \theta_1, t = T_* t_*$$

$$T_* = [S \rho R^4 / (EI)]^{1/2}, \lambda = EI / R^2 \lambda_*, a_* = \varepsilon_0 L V_0^2 R / (2EI)$$

$$d = R d_*, v = R v_*, \Omega = T_* \Omega_*, \omega = \omega_* / T_*$$

$$\lambda_0 = \lambda_{0*} / T_*, R_* \sim (\tau_*) \equiv R \sim (T_* \tau_*) T_*$$

Кроме того будем предполагать, что ядро релаксации $R_* \sim (\tau_*)$ в определенном смысле мало: $\Gamma_*^* 1 = \int_{-\infty}^0 R_* \sim (\tau_*) d\tau_* \ll 1$, что дает возможность ввести малый параметр $\varepsilon = \Gamma_*^* 1$.

Заменим теперь $\Gamma_*^* \rightarrow \varepsilon \Gamma_*^*$, $a_* \rightarrow \varepsilon a_*$ и разрешим уравнения (1.2) относительно θ_1 , считая θ_1 и r_1 малыми. В результате, опустив звездочку, будем иметь следующую систему уравнений в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \theta_1'' + (1 + 2r_1 + r_1^2)^{-1} \{ 2(1 + r_1) r_1' \theta_1' + v \omega^2 \sin(\omega t) (1 + r_1) \times \\ \times \sin(\varphi + \theta_1) + 2\Omega [(1 + r_1) r_1' + v \omega \cos(\omega t) (1 + r_1) \cos(\varphi + \theta_1)] + \\ + \Omega^2 v \sin(\omega t) (1 + r_1) \sin(\varphi + \theta_1) + (I^* - \varepsilon \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'' + \\ + [(1 + r_1) r_1' (I^* - \varepsilon \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'']' - [\lambda (1 + r_1)^2 (1 + \theta_1')]' + \\ + \varepsilon a \cos^2(\lambda_0 t) (1 + r_1) \sin \alpha / (d - r_1)^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} r_1'' - v \omega^2 \sin(\omega t) \cos(\varphi + \theta_1) - (1 + r_1) \theta_1'^2 - 2\Omega [(1 + r_1) \theta_1' - \\ - v \omega \cos(\omega t) \sin(\varphi + \theta_1)] - \Omega^2 [(1 + r_1) + v \sin(\omega t) \times \\ \times \sin(\varphi + \theta_1)] - [(1 + r_1) (1 + \theta_1') (I^* - \varepsilon \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'']' - \\ - r_1' (1 + \theta_1') (I^* - \varepsilon \Gamma^*) (\Phi - \Phi_0)'' + \lambda (1 + r_1) (1 + \theta_1')^2 - \\ - (\lambda r_1')' - \varepsilon a \cos^2(\lambda_0 t) \cos \alpha / (d - r_1)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(r_1')^2 + [(1 + r_1) (1 + \theta_1')]^2 - 1 = 0 \quad (2.3)$$

$$\Phi - \Phi_0 = \theta - \alpha - \varphi, \quad \alpha = \arctg(r_1' / [(1 + r_1) (1 + \theta_1')])$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $u = \text{col}(\theta_1, r_1, \lambda)$ и запишем систему уравнений (2.1)–(2.3) в виде одного уравнения в операторной форме

$$A u'' + F(u', u; \varepsilon) + \varepsilon \cos^2(\lambda_0 t) P(u) + v \sin(\omega t) \times \\ \times Q(\varphi, u) + 2\Omega Q_1(\varphi, u', u, \omega t; v) + \Omega^2 Q_2(\varphi, u, \omega t; v) = 0 \quad (2.4)$$

Здесь матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

нелинейные операторы $F(*)$, $P(*)$, $Q(*)$, $Q_j(*)$ ($j=1, 2$) легко выписываются в явном виде по системе уравнений (2.1)–(2.3). Отметим лишь, что $F(u', u; \varepsilon) = F_1(u; \varepsilon) + F_2(u', u; \varepsilon) + \dots$, где $F_1(*)$, $F_2(*)$, ... соответственно линейный, квадратичный и т. д. операторы. Индекс τ подчеркивает наличие функциональной (интегральной) зависимости.

Уравнение (2.4) является согласно (1.1) уравнением с бесконечным запаздыванием. Остановимся кратко на постановке начально-краевой задачи для уравнения (2.4).

Наложим на функцию $R^\sim(\tau)$ следующие ограничения: $R^\sim(\tau)$, $R^{\sim\sim}(\tau) > 0$ при $-\infty < \tau < 0$, $R^\sim(\tau) = O(\exp(\gamma_0 \tau))$ ($\gamma_0 > 0$) при $\tau \rightarrow -\infty$, $R^\sim(\tau) = O(|\tau|^{\beta_0})$ ($-1 < \beta_0 < 0$) при $\tau \rightarrow -0$.

Ниже L_2 , W_2^j ($j=1, 2, 3, 4$) пространства 2π -периодических функций, принадлежащих на каждом отрезке длины 2π -пространствам $L_2(0, 2\pi)$ и

$W_2^j(0, 2\pi)$ соответственно, $L_2^* W_2^{j*} = \left\{ v(\varphi) \in L_2, W_2^j: \int_0^{2\pi} v(\varphi) d\varphi = 0 \right\}$. По-

ложим далее $H = L_2 \otimes L_2 \otimes L_2$, $H_0 = W_2^4 \otimes W_2^{4*} \otimes W_2^2$, $H_0^\sim = W_2^2 \otimes W_2^{2*} \otimes W_2^2$. Скалярное произведение $(*, *)_H$ и нормы в H и H_0 определяются как суммы скалярных произведений и норм составляющих пространств.

Введем теперь пространство D_τ ($0 < \gamma < \gamma_0$) начальных условий, состоящее из вектор-функций $v(\varphi, \tau) = \text{col}(\theta_1(\varphi, \tau), r_1(\varphi, \tau), \lambda(\varphi))$ ($-\infty < \varphi < \infty$, $-\infty < \tau \leq 0$), удовлетворяющих следующим условиям: $v(\varphi, \tau) \in H_0$ (по φ),

$$\|v(\varphi, \tau)\|_D = \sup_{-\infty < \tau \leq 0} (\exp(\gamma \tau) \|v(\varphi, \tau)\|_H) < \infty.$$

Под решением уравнения (2.4) будем понимать вектор-функцию $u(\varphi, t+\tau)$, удовлетворяющую уравнению (2.4) и начальным условиям $u(\varphi, t+\tau)|_{t=0} = u_0(\varphi, \tau) \in D_\tau$, $u'(\varphi, 0) \in H_0^\sim$.

В такой постановке начальная задача для уравнения (2.4) однозначно разрешима [2].

3. Методика исследования системы уравнений (2.4). Рассмотрим сначала линейное уравнение

$$A u'' + F_1(u; 0) = 0 \quad (3.1)$$

Поведение решений (3.1) определяется спектром квадратичного пучка операторов

$$L(p)e \equiv \begin{pmatrix} p^2 e_1 - e_1'' + e_2''' - e_3' \\ -e_1''' + p^2 e_2 + e_2^{IV} + e_3 \\ -e_1' - e_2 \end{pmatrix} (e = \text{col}(e_1, e_2, e_3)) \quad (3.2)$$

действующего в пространстве H с областью определения H_0 . Спектр (3.2) состоит, как легко видеть, из множества точек

$$i\sigma_{\pm n} = \pm i\sigma_n = \pm in(n^2 - 1)/(n^2 + 1)^{1/2} \quad (i = \sqrt{-1}, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

кратность которых равна двум, при $n \neq 1$, и четырем при $n = 1$. При этом, каждой точке спектра $\pm i\sigma_n$ ($n > 1$) отвечают две собственные вектор-функ-

$$\begin{aligned} L(\pm i\sigma_n) e_{\pm nj} &= 0, \quad e_{\pm nj}(\varphi) = g(\pm i\sigma_n (-1)^{j-1}, \pm n) \times \\ &\times \exp(\pm in\varphi) \quad \overline{e_{nj}}(\varphi) = e_{-nj}(\varphi) \quad (j=1, 2); \\ g(i\sigma_n, n) &= \text{col}((n\sigma_n)^{-1}, -i\sigma_n^{-1}, i2\sigma_n(n^2-1)^{-1}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Точки спектра $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$, отвечают три собственные функции и три присоединенные, явный вид которых в работе не используется.

Отметим, что сопряженным с (3.2) в $\mathbf{H}$ пучком операторов будет пучок операторов

$$L^*(p) h \equiv \begin{pmatrix} p^2 h_1 - h_1'' + h_2''' + h_3' \\ -h_1''' + p^2 h_2 + h_2^{IV} - h_3 \\ h_2' + h_3 \end{pmatrix} \quad (h = \text{col}(h_1, h_2, h_3))$$

спектр которого состоит также из точек (3.3, а собственные вектор-функции, отвечающие точкам спектра $\pm i\sigma_n$ ($n > 1$) имеют вид

$$\begin{aligned} h_{\pm nj}(\varphi) &= g^*(\pm i\sigma_n (-1)^{j-1}, \pm n) \exp(\pm in\varphi) \\ \overline{h_{nj}}(\varphi) &= h_{-nj}(\varphi) \quad (j=1, 2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$g^*(i\sigma_n, n) = \text{col}(n\sigma_n, -in^2\sigma_n, 2n^2\sigma_n^2/(n^2-1))/(n^2+1)$$

Между (3.4) и (3.5) выполняются следующие условия ортогональности $(Ae_{nj_1}(\varphi), h_{nj_2}(\varphi))_{\mathbf{H}} = \delta_{n_1 n_2}^{ij_2} \quad (n_1, n_2 = \pm 2, \pm 3, \dots, j_1, j_2 = 1, 2), \delta_{n_1 n_2}^{ij_2}$ — символ Кронекера.

Положим теперь $\lambda_0 = \sigma_n + \varepsilon\delta$ и будем считать в дальнейшем $\omega \gg 1$; $\nu\omega^2, |\Omega| \ll 1$. Для анализа колебательных решений уравнения (2.4) воспользуемся методикой работы [3].

Введем для этого в рассмотрение выражение

$$\begin{aligned} U(\varphi, \lambda_0 t, \omega t, z_n; \varepsilon, \nu, \Omega) &= \nu u_0(\varphi, \omega t; \nu) + \sum_{\substack{h_1, h_2, h_3 = \pm n \\ j_1, j_2, j_3 = 1, 2}} (u_{h_1 j_1}(\varphi, \lambda_0 t; \varepsilon, \Omega) z_{h_1 j_1} + \\ &+ u_{h_1 j_1 h_2 j_2}(\varphi) z_{h_1 j_1} z_{h_2 j_2} + u_{h_1 j_1 h_2 j_2 h_3 j_3}(\varphi) z_{h_1 j_1} z_{h_2 j_2} z_{h_3 j_3}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь $z_n = (z_{n1}, z_{-n1}, z_{n2}, z_{-n2})$, где z_{hj} — комплексные величины ($\overline{z_{hj}} = z_{-hj}$), $u_*(*)$ вектор-функции со значениями в C^3 , являющиеся по $\varphi, \lambda_0 t, \omega t$ — периодическими тригонометрическими многочленами. При этом

$$u_0(\varphi, \omega t, \nu) u_{01}(\varphi, \omega t) - \nu u_{02}(\varphi, \omega t) - \dots$$

$$u_{h_1 j_1}(\varphi, \lambda_0 t; \varepsilon, \Omega) = e_{h_1 j_1}(\varphi) + \varepsilon u_{h_1 j_1}^1(\varphi, \lambda_0 t) + \Omega u_{h_1 j_1}^2(\varphi)$$

Наряду с (3.7) введем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n1} &= \lambda_n(\varepsilon) z_{n1} + i\Omega k_n z_{n1} + i\varepsilon A_n \exp(i2\lambda_0 t) \bar{z}_{n2} + \\ &+ iz_{n1} (d_{n1} |z_{n1}|^2 + d_{n2} |z_{n2}|^2) + \nu^n \omega^{2n-1} B_n \exp(in\omega t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_{n2} &= \bar{\lambda}_n(\varepsilon) \bar{z}_{n2} + i\Omega k_n z_{n1} - i\varepsilon A_n \exp(-i2\lambda_0 t) z_{n1} - \\ &- iz_{n2} (d_{n2} |z_{n1}|^2 + d_{n1} |z_{n2}|^2) + \nu^n \omega^{2n-1} \bar{B}_n \exp(-in\omega t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\sigma_n + \varepsilon(\tau_n^1 + i\sigma_n^1)$$

Выражение (3.6) совместно с системой (3.7) — (3.8) приближенно описывают множество решений уравнения (2.4), в которых ведущей является n -форма.

Вычисление коэффициентов системы (3.7)–(3.8) осуществляется по следующей схеме. Вычисляются сначала производные $dU(*)/dt$ и $d^2U(*)/dt^2$ в силу системы уравнений (3.7)–(3.8). Затем эти выражения совместно (3.6) подставляются в уравнения (2.4). В результате получаем равенство, связывающее функции $u_*(*)$. Приравнявая теперь последовательно коэффициенты при $v, \varepsilon z_{n1}, \varepsilon \bar{z}_{n2}, \Omega z_{n1}, \Omega \bar{z}_{n2}, z_{n1}^2, \dots$ и т. д. и учитывая периодическую структуру коэффициентов выражения (3.6) по переменным $\varphi, \lambda_0 t, \omega t$, получим рекуррентную последовательность операторных уравнений в пространстве H вида

$$\text{либо } L(il_1\omega)u=f_1, \text{ либо } L(il_2\sigma_n)u=f_2 \quad (3.9)$$

где l_1, l_2 – некоторые целые числа. При этом оператор $L^*(il_1\omega)$ имеет точку спектра $p_{l_1\omega} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Обозначим через $h_{l_1\omega}(\varphi)$ собственный вектор $L^*(il_1\omega)h_{l_1\omega}=p_{l_1\omega}h_{l_1\omega}$. При $l_2 \neq \pm 1$ второе уравнение (3.9), очевидным образом, однозначно разрешимо. Условия разрешимости $(f_1, h_{l_1\omega})_H=0$ и $(f_2, h_{\pm n_j})_H=0$ ($j=1, 2$) при $l_2=\pm 1$ позволяют однозначно определить коэффициенты системы уравнений (3.7)–(3.8), которые имеют следующий вид:

$$\tau_n^4 + i\sigma_n^4 = -R_s(\sigma_n)\sigma_n/2 - i\{R_c(\sigma_n)\sigma_n/2 + a(d^{-1}-1/2)[d^2(n^2+1)^{1/2}(n^2-1)]^{-1/2}\},$$

$$R_c(\sigma) = \int_0^\infty R^\sim(-\tau) \cos(\sigma\tau) d\tau, \quad R_s(\sigma) = \int_0^\infty R^\sim(-\tau) \sin(\sigma\tau) d\tau$$

составляющие нормированного комплексного модуля упругости $E^*(\sigma) = (1 - \varepsilon R_c(\sigma) + i\varepsilon R_s(\sigma))$ ($R_s(\sigma) > 0$) материала кольца, который определяется экспериментально, $k_n = 2n/(n^2+1)$, $A_n = a(d^{-1}-1/2)[d^2(n^2+1)^{1/2}(n^2-1)]^{-1/2}$. Коэффициенты d_{n1}, d_{n2} вычислялись по изложенной схеме на ЭВМ. В результате имеем: $d_{21} = 0,1169 \cdot 10^4$, $d_{22} = -0,7965$, $d_{31} = 0,9006$, $d_{32} = -0,9949 \cdot 10^4$. Значения B_n при этом равны: $B_2 = 3\sigma_2/64$, $B_3 = -i\sigma_3/256$.

Как оказывается [3], экспоненциально устойчивым (неустойчивым) установившимся решением (периодическим, многочастотным и т. д.) $z_{n1}^*(t; \varepsilon, v, \Omega)$, $\bar{z}_{n2}^*(t; \varepsilon, v, \Omega)$ системы уравнений (3.7)–(3.8) в уравнении (2.4) соответствует такой же установившийся режим и того же характера устойчивости. При этом, асимптотическая формула этого режима получается подстановкой $z_{n1}^*(*)$, $\bar{z}_{n2}^*(*)$ в (3.6).

4. Анализ установившихся решений системы уравнений (3.7)–(3.8). Выполним в (3.7)–(3.8) полярную замену переменных $z_{nj} = r_{nj} \exp(i\tau_{nj})$ ($r_{nj} \geq 0, j=1, 2$) и перейдем к «медленным» r_{n1}, r_{n2} , $\omega_{n1} = \lambda_0 t - (\tau_{n1} + \tau_{n2})/2$, $\omega_{n2} = \tau_{n1} - \tau_{n2}$ и «быстрым» $\alpha_n = n\omega t - \tau_{n1}$, $s_n = \lambda_0 t = (\sigma_n + \varepsilon\delta)t$ переменным. В результате будем иметь систему уравнений медленных

$$\begin{aligned} r_{n1}^* &= \varepsilon(\tau_n^4 r_{n1} - A_n \sin(2\omega_{n1})r_{n2}) + v^n \omega^{2n-1} |B_n| \times \\ &\times \cos(\alpha_n + \beta_n) \equiv R_{n1}(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \alpha_n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} r_{n2}^* &= \varepsilon(\tau_n^4 r_{n2} - A_n \sin(2\omega_{n1})r_{n1}) + v^n \omega^{2n-1} |B_n| \times \\ &\times \cos(\alpha_n + \omega_{n2} + \beta_n) \equiv R_{n2}(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}, \alpha_n) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \omega_{n1}^* &= \varepsilon[\delta - \sigma_n^4 - A_n \cos(2\omega_{n1})(r_{n2}/r_{n1} + r_{n1}/r_{n2})/2] - \\ &- (d_{n1} + d_{n2})(r_{n1}^2 + r_{n2}^2)/2 - v^n \omega^{2n-1} |B_n| (\sin(\alpha_n + \beta_n)/r_{n1} + \\ &+ \sin(\alpha_n + \omega_{n2} + \beta_n)/r_{n2})/2 \equiv \Omega_{n1}(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}, \alpha_n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_{n2}^* &= \Omega_{n2} K_n - \varepsilon A_n \cos(2\omega_{n1})(r_{n2}/r_{n1} - r_{n1}/r_{n2}) + \\ &+ (d_{n1} - d_{n2})(r_{n1}^2 - r_{n2}^2) + v^n \omega^{2n-1} |B_n| (\sin(\alpha_n + \beta_n)/r_{n1} - \\ &- \sin(\alpha_n + \omega_{n2} + \beta_n)/r_{n2}) \equiv \Omega_{n2}(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}, \alpha_n) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и быстрых переменных

$$\begin{aligned} \alpha_n^* &= n\omega - \sigma_n - \varepsilon \sigma_n^4 - \varepsilon A_n \cos(2\omega_{n1}) r_{n2}/r_{n1} - \\ &- d_{n1} r_{n1}^2 - d_{n2} r_{n2}^2 - \nu^n \omega^{2n-1} |B_n| \sin(\alpha_n + \beta_n)/r_{n1} = \\ &= n\omega - Y_n(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}, \alpha_n) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$s_n^* = \sigma_n + \varepsilon \delta, \quad B_n = |B_n| \exp(i\beta_n) \quad (4.6)$$

При $\nu=0$ (отсутствие вибрационного воздействия) переменная α_n исчезает. Остается одно уравнение быстрых переменных (4.6). Рассмотрим сначала этот случай.

Система уравнений (4.1)–(4.4) будет иметь глобально устойчивую инвариантную гиперплоскость $r_{n1}=r_{n2}$. Глобальная устойчивость доказывается посредством функции Ляпунова $V^*(r_{n1}, r_{n2})=r_{n1}^2-r_{n2}^2$. На инвариантной плоскости (4.1)–(4.4) сводится к системе уравнений

$$r_n^* = \varepsilon (\tau_n^4 - A_n \sin(2\omega_{n1})) r_n \quad (4.7)$$

$$\omega_{n1}^* = \varepsilon (\delta - \sigma_n^4 - A_n \cos(2\omega_{n1}) - c_n r_n^2) \quad (4.8)$$

$$\omega_{n2}^* = \Omega \cdot 2k_n \quad (4.9)$$

$$\varepsilon^{1/2} r_n = r_{n1} = r_{n2}, \quad c_n = d_{n1} + d_{n2}.$$

Система (4.7)–(4.8) легко анализируется. Предельных циклов она иметь не может. Ненулевое по r_n состояние равновесия существует лишь при условии $|A_n| > -\tau_n^4$ (порог параметрического возбуждения колебаний) и определяется равенством

$$r_n = r_n(\delta) = [c_n^{-1}(\delta - \sigma_n^4 \pm \sqrt{|A_n|^2 - (\tau_n^4)})]^{1/2} \quad (4.10)$$

которое является амплитудно-частотной характеристикой уравнения (2.4). Равенство (4.10) определяет одно, либо два значения r_n в зависимости от δ , т. е. справедлив эффект затягивания амплитуды колебаний. Устойчивым, в чем легко убедиться простой линеаризацией, является то состояние равновесия (r_n^*, ω_{n1}^*) системы (4.7)–(4.8), которое имеет большее значение r_n^* . При этом ω_{n1}^* определяется из (4.7). Каждому состоянию равновесия системы (4.7)–(4.8) в системе (3.7)–(3.8) соответствует однопараметрическое семейство решений

$$\begin{aligned} z_{n1}^*(t; \varepsilon, \Omega) &= \varepsilon^{1/2} r_n^* \exp(i(\sigma_n^* t + \Omega k_n t + \omega_{n2}^*/2)) \\ \bar{z}_{n2}^*(t; \varepsilon, \Omega) &= \varepsilon^{1/2} r_n^* \exp(-i(\sigma_n^* t - \Omega k_n t + \omega_{n2}^*/2)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

зависящих от ω_{n2}^* как от параметра и того же характера устойчивости, где $\sigma_n^* = \sigma_n + \varepsilon \sigma_n^4 + \varepsilon A_n \cos(2\omega_{n1}^*) + \varepsilon c_n (r_n^*)^2$.

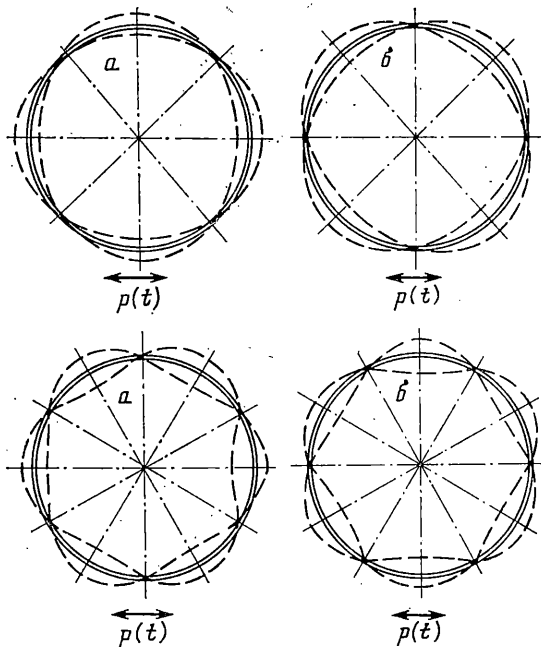
Решения (4.11) определяют в свою очередь однопараметрическое семейство прецессирующих волн уравнения (2.4), имеющих следующее асимптотическое представление

$$\begin{aligned} u(\varphi; t; \varepsilon, \Omega) &= \varepsilon^{1/2} r_n^* (u_n^*(\varphi, t) \exp(i(\Omega k_n t - \omega_{n2}^*/2)) + \\ &+ \bar{u}_n^*(\varphi, t) \exp(-i(\Omega k_n t + \omega_{n2}^*/2))) + O((\varepsilon^2 + \Omega^2)^{1/2}) \\ u_n^*(\varphi, t) &= e_{n1}(\varphi) \exp(i\sigma_n^* t) + e_{n2}(\varphi) \exp(-i\sigma_n^* t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Отметим, что при этом угол поворота волнового фронта $\theta_n(t)$ решений (4.12) и функция $\omega_{n2}(t)$ связаны соотношением:

$$\theta_n(t) = -\omega_{n2}(t)/(2n) \quad (4.13)$$

Это дает возможность определять по (4.12) величину угла поворота относительно инерциального пространства Ωt [1].



Фиг. 2

Рассмотрим теперь случай $\nu \neq 0$. Для анализа системы уравнений (4.1)–(4.5) воспользуемся методом усреднения. Будем использовать специальную схему метода усреднения [4, с. 394], позволяющую строить усредненные уравнения в виде разложения по ω^{-1} . В результате будем иметь следующую систему усредненных уравнений

$$\dot{r}_{nj} = R_{nj}^{\circ}(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}) + \omega^{-2} R_{nj}^2(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}) + \dots \quad (4.14)$$

$$\dot{\omega}_{nj} = \Omega_{nj}^{\circ}(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}) + \omega^{-2} \Omega_{nj}^2(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}) + \dots$$

$$(j=1, 2) \quad (4.15)$$

$$\dot{\alpha}_n = n\omega - Y_n^{\circ}(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}) - \omega^{-2} Y_n^2(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}) + \dots \quad (4.16)$$

$$R_{nj}^{\circ}(\ast) = \langle R_{nj}(\ast, \alpha_n) \rangle, \quad \Omega_{nj}^{\circ}(\ast) = \langle \Omega_{nj}(\ast, \alpha_n) \rangle,$$

$$Y_n^{\circ}(\ast) = \langle Y_n(\ast, \alpha_n) \rangle \quad \left(\langle g(\alpha_n) \rangle = \int_0^{2\pi} g(\alpha_n) d\alpha_n \right)$$

точками обозначены члены, имеющие по ω^{-1} более высокий порядок малости. При этом

$$\Omega_{n2}^2(r_{n1}, r_{n2}, \omega_{n1}, \omega_{n2}) = \nu^{2n} \omega^{4n-2} \frac{|B_n|^2}{2n^2} \left(-\frac{\partial R_{n1}^{\circ}}{\partial r_{n2}} \frac{1}{r_{n1}^2} - \frac{\partial R_{n2}^{\circ}}{\partial r_{n1}} \frac{1}{r_{n2}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Omega_{n2}^{\circ}}{\partial \omega_{n1}} \frac{1}{r_{n1} r_{n2}} + \frac{\partial^2 \Omega_{n2}^{\circ}}{\partial \omega_{n1} \partial r_{n2}} \frac{1}{r_{n1}} - \frac{\partial^2 \Omega_{n2}^{\circ}}{\partial \omega_{n1} \partial r_{n1}} \frac{1}{r_{n2}} - \frac{\partial Y_n^{\circ}}{\partial \omega_{n1}} \frac{1}{r_{n1} r_{n2}} \right) \sin \omega_{n2}$$

Явный вид остальных функций, входящих в (4.14)–(4.16), использоваться не будет. Определяя теперь из первых трех уравнений системы (4.14)–(4.15) состояния равновесия

$$\begin{aligned} r_{nj}^*(\omega_{n2}) &= r_n^* + \omega^{-2} r_{nj}^2(\omega_{n2}) + \dots \quad (j=1, 2) \\ \omega_{n1}^*(\omega_{n2}) &= \omega_{n1}^* + \omega^{-2} \omega_{n1}^2(\omega_{n2}) + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

и подставляя их в четвертое уравнение, получим с учетом равенства $\Omega_{n2}^2(r_n^*, r_n^*, \omega_{n1}^*, \omega_{n2}) = -v^{2n} \omega^{4n-2} 2|B_n|^2 \tau_n^1 / (nr_n^*)^2 \sin(\omega_{n2})$ следующее уравнение для определения $\omega_{n2}(t)$:

$$\omega_{n2}^* = \Omega 2k_n - v^{2n} \omega^{4(n-1)} 2|B_n|^2 \tau_n^1 / (nr_n^*)^2 \sin(\omega_{n2}) + O(v^{2n} \omega^{4n-6}) \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) совместно с (4.17) определяют динамику установившегося решения системы (4.1)–(4.6) и тем самым уравнения (2.4). Отметим, что установившимся решением (2.4) будет в зависимости от Ω стоячая или прецессирующая двухчастотная волна, полученная наложением на параметрически возбуждаемый периодический режим высокочастотной вибрационной составляющей. Согласно (4.13), (4.18) угол прецессии волнового фронта определяется уравнением

$$\theta_n^* = -\Omega \frac{2}{n^2+1} - v^{2n} \omega^{4(n-1)} \frac{|B_n|^2 \tau_n^1}{n^3 (r_n^*)^2} \sin(2n\theta_n) + O(v^{2n} \omega^{4n-6}) \quad (4.19)$$

Из (4.19) следует, что при $\Omega=0$ возможны лишь два установившихся значения θ_n : $\theta_n=0$, $\theta_n=\pi/(2n)$. Первое, как легко видеть, неустойчивое, второе — устойчивое. На фиг. 2, а, б для $n=2, 3$ приведены соответственно неустойчивое и устойчивое положения стоячей волны относительно оси вибрации. Величина порогового значения угловой скорости определяется равенством

$$\Omega^* = -v^{2n} \omega^{4(n-1)} (n^2+1) |B_n|^2 \tau_n^1 / [n^3 (r_n^*)^2] \quad (4.20)$$

В заключение для $n=2$ приведем формулы (4.19)–(4.20) в размерных величинах, используя соотношения: $-T_* \varepsilon \tau_n^1 = \lambda_0 / (2Q)$, $\lambda_0 = T_* \sigma_n$, $r_n^{*v} = R \varepsilon^{1/2} r_n^*$. Здесь Q — добротность резонатора, r_n^{*v} — амплитуда колебаний резонатора по n -форме.

$$\begin{aligned} \theta_2^* &= -\frac{2}{5} \Omega + \frac{9}{65 \cdot 536} \frac{v^4 \omega^4 \lambda_0^3 (\rho S)^3 R^{10}}{(r_2^{*v})^2 Q (EI)^3} \sin(4\theta_2) \\ \Omega^* &= \frac{45}{131 \cdot 072} \frac{v^4 \omega^4 \lambda_0^3 (\rho S)^3 R^{10}}{(r_2^{*v})^2 Q (EI)^3} \end{aligned}$$

Автор благодарит В. Ф. Журавлева за весьма полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. Schumacher K. Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay // Arch. Reaction. Mech. and Analysis. 1979. V. 67. № 4. P. 315–335.
3. Кубышкин Е. П. Автоколебательные решения одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 4. С. 674–685.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Ярославль

Поступила в редакцию
5.VII.1989