

УДК 531.39

© 1991 г.

Ю. Г. МАРРОВ, И. С. МИНЯЕВ

**О ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
СО СЛАБОЙ ДИССИПАЦИЕЙ**

Работа посвящена изучению динамических эффектов в механических системах со слабой диссипацией энергии [1–4] на примере двух задач. В первой рассмотрена эволюция взаимного вращательного движения двух твердых динамически симметричных тел под действием момента сил вязкого трения, пропорционального разности их угловых скоростей. Рассматривается случай слабой вязкости. Методом усреднения в канонических переменных Андуайе [5] получены уравнения, описывающие эволюцию движения двух тел, вращающихся вокруг неподвижной точки. В случае динамического подобия тел рассмотрены резонансные вращения.

Во второй задаче изучается движение вокруг центра масс неоднородного шара, содержащего массу сплошной вязкоупругой среды (материал Кельвина – Фойгта), а диссипация энергии происходит за счет сил внутреннего трения в материале. Диссипативная эволюция вращения динамически симметричного вязкоупругого тела приводит его во вращение вокруг главной оси инерции с наибольшим моментом инерции.

**1. О взаимном вращении двух твердых тел вокруг неподвижной точки.** Рассмотрим взаимное вращательное движение двух твердых динамически симметричных тел вокруг неподвижной точки  $C$ . Движение происходит под действием момента сил, пропорционального разности их угловых скоростей

$$M_1 = -M_2 = -\kappa(\Omega_1 - \Omega_2) \quad (1.1)$$

где  $M_i$  – момент сил, действующий на  $i$ -е тело;  $\Omega_i$  – угловая скорость  $i$ -го тела ( $i=1, 2$ );  $\kappa$  – положительная постоянная, характеризующая вязкость среды в зазоре между сферической поверхностью внутреннего тела (вкладыша) и стенками полости внешнего тела. Рассматривается случай слабой вязкости, то есть численное значение коэффициента  $\kappa$  мало. В [4] отмечено, что помимо найденных стационарных вращений в рассматриваемой задаче могут существовать другие стационарные движения – регулярные прецессии динамически подобных тел с одинаковыми угловыми скоростями. Выяснение характера поведения системы в этом резонансном случае является предметом исследований данной работы.

Введем в точке  $C$ , являющейся центром сферической поверхности вкладыша, следующие системы координат:  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  – неподвижная, а системы координат  $Cx_1x_2x_3$  и  $Cy_1y_2y_3$  жестко связаны с внешним и внутренним телами, причем оси  $Cx_3$  и  $Cy_3$  направлены по осям симметрии соответствующих эллипсоидов инерции. Для описания вращения подвижных систем координат  $Cx_1x_2x_3$  и  $Cy_1y_2y_3$  относительно неподвижной введем две группы канонических переменных Андуайе:  $(I_i, \varphi_i)$ ,  $(J_i, \psi_i)$ , ( $i=1, 2, 3$ ), соответственно для первого и второго тела.

Работа момента сил (1.1) на возможных перемещениях системы определяется следующим образом

$$\delta A = -\kappa(\Omega_1 - \Omega_2)(\delta\alpha_1 - \delta\alpha_2) \quad (1.2)$$

$$\Omega_1 = O_1(t)\omega_1, \quad O_1(t) = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)$$

$$\Omega_2 = O_2(t)\omega_2, \quad O_2(t) = \Gamma_3(\psi_3)\Gamma_1(\beta_1)\Gamma_3(\psi_2)\Gamma_1(\beta_2)\Gamma_3(\psi_1)$$

где  $\omega_i$  ( $i=1, 2$ ) — вектор угловой скорости  $i$ -го тела в проекциях на оси связанной системы координат;  $O_1(t)$  и  $O_2(t)$  — ортогональные операторы, задающие переход от подвижных систем координат к неподвижной.

$$\Gamma_1(\delta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\cos \delta_1 = I_3 I_2^{-1}, \quad \cos \delta_2 = I_1 I_2^{-1}, \quad \cos \beta_1 = J_3 J_2^{-1}, \quad \cos \beta_2 = J_1 J_2^{-1}$$

$$\delta \alpha_1 = \sum_{i=1}^3 \left( e_{\varphi_i} \delta \varphi_i + \sum_{k=1}^2 e_{\delta_k} \partial \delta_k / \partial I_i \delta J_i \right)$$

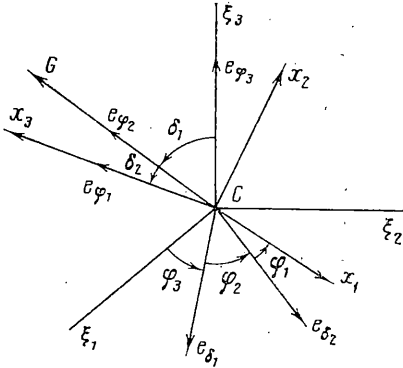
$$\delta \alpha_2 = \sum_{i=1}^3 \left( e_{\psi_i} \delta \psi_i + \sum_{k=1}^2 e_{\beta_k} \partial \beta_k / \partial J_i \delta J_i \right)$$

Здесь  $e_{\varphi_i}$ ,  $e_{\delta_k}$ ,  $e_{\psi_i}$ ,  $e_{\beta_k}$  — единичные векторы по осям, относительно которых осуществляются повороты на углы  $\varphi_i$ ,  $\delta_k$ ,  $\psi_i$ ,  $\beta_k$  соответственно (фигура).

Координаты векторов  $G_1$  и  $G_2$  кинетических моментов первого и второго тела в подвижных осях будут  $G_1 = ((I_2^2 - I_1^2)^{1/2} \sin \varphi_1, (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} \cos \varphi_1, I_1)$ ,  $G_2 = ((J_2^2 - J_1^2)^{1/2} \sin \psi_1, (J_2^2 - J_1^2)^{1/2} \cos \psi_1, J_1)$ .

Гамильтониан системы имеет вид:  $H = (I_2^2 - I_1^2) / 2A_1 + I_1^2 / 2C_1 + (J_2^2 - J_1^2) / 2A_2 + J_1^2 / 2C_2$ , где  $A_i$ ,  $C_i$  ( $i=1, 2$ ) — экваториальный и осевой моменты инерции  $i$ -го тела. В случае динамического подобия тел:  $A_1 C_1^{-1} = A_2 C_2^{-1} = \mu$ .

Уравнения движения системы получим из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского, используя выражение (1.2) для работы диссипативных сил



$$I_i = -\kappa (\Omega_1 - \Omega_2) e_{\varphi_i},$$

$$J_i = -\kappa (\Omega_2 - \Omega_1) e_{\psi_i} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\dot{\varphi}_i = \partial H / \partial I_i +$$

$$+\kappa (\Omega_1 - \Omega_2) \sum_{k=1}^2 e_{\delta_k} \partial \delta_k / \partial I_i \quad (1.3)$$

$$\dot{\psi}_i = \partial H / \partial J_i + \kappa (\Omega_2 - \Omega_1) \sum_{k=1}^2 e_{\beta_k} \partial \beta_k / \partial J_i,$$

$$\partial H / \partial I_3 = \partial H / \partial J_3 = 0$$

Здесь  $\kappa = \kappa_1 I_2(0)$ , где  $\kappa_1 \ll 1$  — безразмерный малый параметр задачи,  $I_2(0)$  — значение модуля кинетического момента внешнего тела в начальный момент времени. При  $\kappa_1 = 0$  (диссипация энергии в зазоре отсутствует), уравнения движения системы будут

$$\begin{aligned} I_i \dot{} &= 0, \quad J_i \dot{} = 0, \quad \varphi_3 \dot{} = \psi_3 \dot{} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \\ \varphi_{10} \dot{} &= (A_1 - C_1) A_1^{-1} C_1^{-1} I_1, \quad \varphi_{20} \dot{} = A_1^{-1} I_2 \\ \psi_{10} \dot{} &= (A_2 - C_2) A_2^{-1} C_2^{-1} J_1, \quad \psi_{20} \dot{} = A_2^{-1} J_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из (1.4) видно, что в невозмущенном движении тела совершают регулярные прецессии вокруг векторов  $G_1$  и  $G_2$ . В возмущенном движении (при

$\kappa_1 \neq 0$ ) угловые переменные  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  считаются быстрыми. В процессе эволюции вращения системы угловые скорости тел  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  стремятся выровняться по величине и направлению. Вследствие этого могут возникнуть резонансные движения, когда частоты собственного вращения тел вокруг осей симметрии и частоты прецессий осей симметрии совпадают, то есть  $\dot{\varphi}_1/\dot{\psi}_1 = 1, \dot{\varphi}_2/\dot{\psi}_2 = 1$ . Разность  $\Delta = \dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}_2$  является медленной угловой переменной (сдвигом фаз). Далее следует усреднить правые части уравнений (1.3) по быстрым переменным  $\varphi_2$  и  $\psi_2$ . Предварительно выпишем следующие выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\varphi_3} &= \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_{\varphi_2} = \Gamma_3(\varphi_3) \Gamma_1(\delta_1) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_{\varphi_1} = O_1(t) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \\ \mathbf{e}_{\delta_1} &= \Gamma_3(\varphi_3) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_{\delta_2} = \Gamma_3(\varphi_3) \Gamma_1(\delta_1) \Gamma_3(\varphi_2) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_x = (1, 0, 0) \\ \omega_1 &= J_0^{-1} \mathbf{G}_1, \quad J_0^{-1} = \text{diag} \{A_1^{-1}, A_1^{-1}, C_1^{-1}\} \\ \Omega_1 &= \varphi_{10} \dot{\mathbf{e}}_{\varphi_1} + \varphi_{20} \dot{\mathbf{e}}_{\varphi_2}, \quad \partial \delta_1 / \partial I_3 = -1 / (I_2 \sin \delta_1) \\ \partial \delta_i / \partial I_2 &= \cos \delta_i / (I_2 \sin \delta_i) \quad (i=1, 2) \\ \partial \delta_2 / \partial I_1 &= -1 / (I_2 \sin \delta_2), \quad \partial \delta_2 / \partial I_3 = \partial \delta_1 / \partial I_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Выражения аналогичные (1.5) для второго тела получаются заменой одной группы переменных Андуайе на другую. Далее вычисляются скалярные произведения векторов:  $(\mathbf{e}_{\varphi_i}, \mathbf{e}_{\varphi_j}), (\mathbf{e}_{\varphi_i}, \mathbf{e}_{\psi_j}), (\mathbf{e}_{\varphi_i}, \mathbf{e}_{\delta_k}), (\mathbf{e}_{\varphi_i}, \mathbf{e}_{\beta_k})$  ( $i, k = 1, 2; j = 1, 2, 3$ ).

Рассмотрим сначала усредненные уравнения для переменных  $I_3$  и  $J_3$ . Сохраняя прежние обозначения имеем

$$\begin{aligned} I_3 \dot{} &= -\kappa (q_1 I_3 I_2^{-1} - q_2 J_3 J_2^{-1}), \quad J_3 \dot{} = -I_3 \dot{} \\ q_1 &= \varphi_{10} \dot{} \cos \delta_2 + \varphi_{20} \dot{} = [A_1^{-1} (I_2^2 - I_1^2) + C_1^{-1} I_1^2] I_2^{-1} \\ q_2 &= \psi_{10} \dot{} \cos \beta_2 + \psi_{20} \dot{} = [A_2^{-1} (J_2^2 - J_1^2) + C_2^{-1} J_1^2] J_2^{-1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Вектор кинетического момента системы  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = \text{const}$  согласно закону сохранения момента количества движения. Направим ось  $C\xi_1$  инерциальной системы координат по вектору  $\mathbf{G}$ , а ось  $C\xi_3$  — по нормали к плоскости, образованной векторами  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  в начальный момент времени  $t=0$ . Тогда  $I_3(0) = J_3(0) = 0$  и в дальнейшем, согласно уравнениям (1.6), переменные  $I_3$  и  $J_3$  не эволюционируют, то есть векторы  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  все время остаются в плоскости  $C\xi_1\xi_2$ . Запишем уравнения для остальных медленных переменных, полагая  $\delta_1 = \beta_1 = \pi/2$ . Уравнения для углов  $\varphi_3$  и  $\psi_3$  будут

$$\varphi_3 \dot{} = \kappa q_2 I_2^{-1} \sin(\psi_3 - \varphi_3), \quad \psi_3 \dot{} = -\kappa q_1 J_2^{-1} \sin(\psi_3 - \varphi_3) \quad (1.7)$$

Так как  $q_1 > 0$  и  $q_2 > 0$ , то из уравнений (1.7) следует, что  $\text{sign } \varphi_3 \dot{} = -\text{sign } \psi_3 \dot{}$ . Если в начальный момент времени  $\psi_3(0) > \varphi_3(0)$ , то угол  $\psi_3$  убывает, а угол  $\varphi_3$  — возрастает. С течением времени углы  $\psi_3$  и  $\varphi_3$  станут равными и прецессия векторов  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  прекратится. В этом положении векторы  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  коллинеарны и направлены по вектору  $\mathbf{G}$ . Аналогично и в случае  $\varphi_3(0) > \psi_3(0)$ . Существуют два стационарных по углам  $\varphi_3$  и  $\psi_3$  положения векторов  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$ :  $\varphi_3 = \psi_3, \varphi_3 = \psi_3 \pm \pi$ . Первое стационарное движение, при котором векторы  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$  совпадают по направлению с вектором  $\mathbf{G}$ , а углы равны  $\varphi_3 = \psi_3 = \pi/2$  — устойчиво. Второе стационарное движение, при котором один из векторов  $\mathbf{G}_1$  или  $\mathbf{G}_2$  направлен по  $\mathbf{G}$ , а другой — в противоположную сторону, неустойчиво. Таким образом, если в начальный момент времени  $\varphi_3(0) \neq \psi_3(0) \pm \pi$ , то в дальнейшем векторы  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$ , прецессируя вокруг оси  $C\xi_3$  в противоположные стороны, совместятся с направлением вектора  $\mathbf{G}$ .

Приближенные уравнения для переменных  $I_1, I_2, J_1, J_2$  образуют систему, которая замыкается уравнением для дополнительной медленной переменной  $\Delta$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 I_1 \dot{\phantom{x}} &= -\kappa \{ \varphi_{10} \dot{\phantom{x}} + \varphi_{20} \dot{\phantom{x}} \cos \delta_2 - q_2 \cos \delta_2 \cos (\psi_3 - \varphi_3) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \psi_{10} \dot{\phantom{x}} \sin \beta_2 \sin \delta_2 \cos \Delta [1 + \cos (\psi_3 - \varphi_3)] \} \\
 J_1 \dot{\phantom{x}} &= -\kappa \{ \psi_{10} \dot{\phantom{x}} + \psi_{20} \dot{\phantom{x}} \cos \beta_2 - q_1 \cos \beta_2 \cos (\psi_3 - \varphi_3) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \varphi_{10} \dot{\phantom{x}} \sin \beta_2 \sin \delta_2 \cos \Delta [1 + \cos (\psi_3 - \varphi_3)] \} \\
 I_2 \dot{\phantom{x}} &= -\kappa [q_1 - q_2 \cos (\psi_3 - \varphi_3)], \quad J_2 \dot{\phantom{x}} = -\kappa [q_2 - q_1 \cos (\psi_3 - \varphi_3)] \\
 \Delta \dot{\phantom{x}} &= \varphi_{20} \dot{\phantom{x}} - \psi_{20} \dot{\phantom{x}} + \frac{1}{2} \kappa \sin \Delta [1 + \cos (\psi_3 - \varphi_3)] [\psi_{10} \dot{\phantom{x}} \cos \delta_2 \sin \beta_2 / (I_2 \sin \delta_2) + \\
 &\quad + \varphi_{10} \dot{\phantom{x}} \cos \beta_2 \sin \delta_2 / (J_2 \sin \beta_2)]
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где выражения для  $\varphi_{10} \dot{\phantom{x}}, \varphi_{20} \dot{\phantom{x}}$  и  $\psi_{10} \dot{\phantom{x}}, \psi_{20} \dot{\phantom{x}}$  приведены в (1.4). Приравняв нулю правые части уравнений (1.8), найдем возможные стационарные движения (при условии  $\varphi_3 = \psi_3 = \pi/2$ ):

$$\begin{aligned}
 A_1^{-1} I_2 = A_2^{-1} J_2, \quad I_1 = 0, \quad J_1 = 0; \quad A_1^{-1} I_2 = A_2^{-1} J_2, \quad I_1 = I_2, \quad J_1 = J_2 \\
 A_1^{-1} I_2 = A_2^{-1} J_2, \quad I_1 = 0, \quad J_1 = J_2; \quad A_1^{-1} I_2 = A_2^{-1} J_2, \quad I_1 = I_2, \quad J_1 = 0 \\
 A_1^{-1} I_2 = A_2^{-1} J_2, \quad (A_1 - C_1) A_1^{-1} C_1^{-1} I_1 = (A_2 - C_2) A_2^{-1} C_2^{-1} J_1, \quad \Delta = 0
 \end{aligned}$$

Первые четыре стационарных движения представляют собой стационарные вращения тел вокруг главных осей инерции с одинаковыми угловыми скоростями [4]. Устойчивыми будут только такие вращения, при которых ось вращения является осью с максимальным моментом инерции для каждого из тел. Пятое стационарное движение возможно только для динамически подобных тел и представляет собой регулярные прецессии тел с одинаковыми угловыми скоростями собственного вращения вокруг осей симметрии и прецессии осей симметрии вокруг однонаправленных векторов кинетических моментов тел  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$ . Отметим, что в случае динамического подобия тел из первых четырех стационарных вращений устойчивы либо первое, либо второе.

Исследуем устойчивость регулярных прецессий динамически подобных тел, когда система движется как одно твердое тело. Пусть  $\varphi_3 \simeq \psi_3$ , тогда с точностью порядка  $\sim (\varphi_3 - \psi_3)^2$  заменим (1.8) эквивалентной ей системой

$$\begin{aligned}
 I_2 \dot{\phantom{x}} &= -\kappa (q_1 - q_2), \quad J_2 \dot{\phantom{x}} = -\kappa (q_2 - q_1) \\
 \delta_2 \dot{\phantom{x}} &= -(\cos \delta_2) \dot{\phantom{x}} / \sin \delta_2 = \kappa (\varphi_{10} \dot{\phantom{x}} \sin \delta_2 - \psi_{10} \dot{\phantom{x}} \sin \beta_2 \cos \Delta) / I_2 \\
 \beta_2 \dot{\phantom{x}} &= -(\cos \beta_2) \dot{\phantom{x}} / \sin \beta_2 = \kappa (\psi_{10} \dot{\phantom{x}} \sin \beta_2 - \varphi_{10} \dot{\phantom{x}} \sin \delta_2 \cos \Delta) / J_2 \\
 \Delta \dot{\phantom{x}} &= \varphi_{20} \dot{\phantom{x}} - \psi_{20} \dot{\phantom{x}} + \kappa \sin \Delta \left( \frac{\psi_{10} \dot{\phantom{x}} \cos \delta_2 \sin \beta_2}{I_2 \sin \delta_2} + \frac{\varphi_{10} \dot{\phantom{x}} \cos \beta_2 \sin \delta_2}{J_2 \sin \beta_2} \right) \\
 \varphi_{10} \dot{\phantom{x}} &= (\mu - 1) A_1^{-1} I_2 \cos \delta_2, \quad \psi_{10} \dot{\phantom{x}} = (\mu - 1) A_2^{-1} J_2 \cos \beta_2
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

В окрестности рассматриваемого резонансного движения будем считать, что угол  $\Delta$  мал и введем расстройки частот  $h \checkmark, h_1 \checkmark$ :

$$\begin{aligned}
 h \checkmark &= \kappa_1 h = \varphi_{20} \dot{\phantom{x}} - \psi_{20} \dot{\phantom{x}} = A_1^{-1} I_2 - A_2^{-1} J_2 \\
 h_1 \checkmark &= \kappa_1 h_1 = \varphi_{10} \dot{\phantom{x}} - \psi_{10} \dot{\phantom{x}} = (\mu - 1) (A_1^{-1} I_2 \cos \delta_2 - A_2^{-1} J_2 \cos \beta_2)
 \end{aligned}$$

Имеет смысл рассматривать расстройки частот порядка малости  $\kappa_1$ ; в противном случае  $\Delta$  теряет смысл медленной переменной. Когда  $\Delta = h = h_1 = 0$ , система совершает регулярную прецессию как твердое тело. С точ-

ностью порядка  $\kappa_1^2$  получим уравнения для малых отклонений

$$\Delta \dot{=} \kappa_1 h + \kappa (A_1^{-1} + A_2^{-1}) (\mu - 1) \Delta \cos^2 \delta_2 \quad (1.10)$$

$$h \dot{=} -\kappa (A_1^{-1} + A_2^{-1}) \{ [1 - (\mu - 1) \cos^2 \delta_2] h + 2 \cos \delta_2 h_1 \} \quad (1.11)$$

$$h_1 \dot{=} -\kappa (A_1^{-1} + A_2^{-1}) (\mu - 1) (h_1 + \cos^2 \delta_2 h)$$

Из (1.10) следует, что рассматриваемое стационарное движение устойчиво по  $\Delta$  для  $\mu < 1$ , и неустойчиво в противном случае. Далее, характеристическое уравнение для системы (1.11) будет

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad a = k [1 - (1 - \mu) \sin^2 \delta_2]$$

$$b = k^2 (\mu - 1) [1 - (1 + \mu) \cos^2 \delta_2], \quad k = \kappa (A_1^{-1} + A_2^{-1})$$

Отсюда видно, если  $\cos^2 \delta_2 > (1 + \mu)^{-1}$ , то коэффициенты  $a$  и  $b$  положительны, а система (1.11) устойчива. Из уравнений (1.9) следует, что скорость изменения углов  $\delta_2$  и  $\beta_2$  на порядок меньше  $h$  и  $h_1$ . Поэтому с принятой точностью порядка  $\kappa_1^2$  в уравнениях (1.11) можно положить  $\delta_2 \simeq \delta_2(0) = \text{const}$ . Таким образом, регулярная прецессия механической системы как одного твердого тела будет устойчива при выполнении следующих условий: 1)  $\mu < 1$ , т. е.  $A_1 < C_1$ ,  $A_2 < C_2$  — оба тела динамически сжаты; 2)  $\delta_2(0) = \beta_2(0) < \arccos(1 + \mu)^{-1/2}$ .

Далее, рассмотрим движение в окрестности резонанса в случае, когда  $\mu < 1$  и угол  $\Delta$  не мал. Тогда уравнения для углов  $\delta_2$  и  $\beta_2$  с точностью порядка  $\kappa_1^2$  будут

$$\delta_2 \dot{=} \frac{1}{2} \kappa (\mu - 1) A_1^{-1} (1 - \cos \Delta) \sin 2\delta_2 \quad (1.12)$$

$$\beta_2 \dot{=} \frac{1}{2} \kappa (\mu - 1) A_2^{-1} (1 - \cos \Delta) \sin 2\delta_2$$

Из (1.12) следует, что если  $A_1 = A_2$  ( $C_1 = C_2$ ), то  $\delta_2 \dot{=} \beta_2 \dot{=} < 0$  и углы  $\delta_2$  и  $\beta_2$  монотонно убывают. Определим начальные условия, при которых разность  $\delta_2 - \beta_2$  стремится к нулю. Уравнения для  $\Delta$ ,  $h$  и  $h_1$  при условии  $A_1 = A_2$  имеют вид

$$\Delta \dot{=} \kappa_1 h + 2\kappa (\mu - 1) A_1^{-1} \cos^2 \delta_2 \sin \Delta \quad (1.13)$$

$$h \dot{=} -2\kappa A_1^{-1} \{ [1 - (\mu - 1) \cos^2 \delta_2] h + 2 \cos \delta_2 h_1 \} \quad (1.14)$$

$$h_1 \dot{=} -\kappa (\mu - 1) A_1^{-1} \{ h_1 (1 + \cos^2 \delta_2 + \sin^2 \delta_2 \cos \Delta) + 2 \cos \delta_2 h \}$$

Из характеристического уравнения для (1.14) получаем, что система устойчива по  $h$  и  $h_1$ , если

$$4 \cos^2 \delta_2 > [1 + (1 - \mu) \cos^2 \delta_2] (1 + \cos^2 \delta_2 + \sin^2 \delta_2 \cos \Delta) \quad (1.15)$$

Мажоранта для правой части неравенства (1.15) получается при  $\cos \Delta = 1$ . Тогда условие (1.15) будет выполняться, если  $\cos^2 \delta_2 > (1 + \mu)^{-1}$ . Уравнение (1.13) позволяет сформулировать следующий вывод. Резонансное движение системы двух тел в случае  $A_1 = A_2$ ,  $C_1 = C_2$  устойчиво по  $\Delta$  при значении  $\Delta = 0$  и не устойчиво при  $\Delta = \pi$ . Если в начальный момент времени выполняется условие  $\delta_2(0) = \beta_2(0) < \arccos(1 + \mu)^{-1/2}$ , то в процессе эволюции сдвиг фаз  $\Delta$  будет убывать до нуля, а оси симметрии тел, прецессируя вокруг вектора  $\mathbf{G}$ , с течением времени совместятся друг с другом. После этого движение системы есть вращение как одного твердого тела. В зависимости от начальных условий по  $\Delta$  и  $\delta_2$ ,  $\beta_2$  предельное движение системы будет регулярной прецессией либо стационарным вращением вокруг вектора  $\mathbf{G}$ .

**2. Об эволюции вращений неоднородного вязкоупругого шара вокруг центра масс.** Рассмотрим вязкоупругое неоднородное тело шаровой формы, вращающееся вокруг центра масс  $C$  при отсутствии внешних сил. Неодно-

родность шара позволяет предполагать, что в недеформированном состоянии тело является динамически симметричным.

Далее, пусть упругое тело представляет собой механическую систему  $(\Omega, \Sigma(\Omega), \mu)$ , где  $\Omega \in E^3$  — область, занимаемая этим телом в естественном недеформированном состоянии,  $\Sigma(\Omega)$  — кольцо измеримых по Лебегу подмножеств множества  $\Omega$ ;  $\mu$  — мера на  $\Sigma(\Omega)$ , которая задает распределение масс на  $\Omega$  и определяется равенством  $d\mu = \rho dx$ ,  $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ . Здесь  $\rho = \rho_0 + \kappa \rho_1$ ,  $0 < \kappa \ll 1$ , то есть плотность  $\rho$  тела в каждой точке мало отличается от некоторой постоянной величины;  $\rho_0$  — плотность соответствующего однородного изотропного шара.

Для описания упругих деформаций тела введем систему координат  $Cx_1x_2x_3$  таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dx = 0, \quad \int_{\Omega} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] dx = 0 \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — упругое смещение точки тела, в недеформированном состоянии занимавшей положение  $\mathbf{r} \in \Omega$ . Условия (2.1) характеризуют координатный трехгранник  $Cx_1x_2x_3$ , относительно которого тело в интегральном смысле (по всем частицам) не перемещается и не поворачивается [2]. Будем предполагать, что величины  $\partial u_i / \partial x_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) малы ( $|\partial u_i / \partial x_j| \ll 1$ ) и деформированное состояние системы описывается классической теорией упругости малых деформаций, аналогично [6]. Конфигурационным многообразием системы служит  $SO(3) \times V_0$ :

$$V_0 = \left\{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3, \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] dx = 0 \right\}$$

где  $W_2^1(\Omega)$  — пространство Соболева.

Для описания вращательного движения тела введем на касательном расслоении группы вращений  $SO(3)$  канонические переменные Андуайе  $I_i, \varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и получим функционал Рауса в виде

$$R[\mathbf{I}, \varphi, \mathbf{u}^*, \mathbf{u}] = 1/2 (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u, J^{-1}[\mathbf{u}] (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u))^{-1/2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{*2} \rho dx + E[\mathbf{u}]$$

Здесь  $E[\mathbf{u}]$  — функционал потенциальной энергии упругих деформаций. Поскольку внешние силы отсутствуют, то выполняется закон сохранения момента количества движения системы

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \mathbf{u}^*] \rho dx$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость упругого тела. Далее  $\mathbf{G}_u = \int_{\Omega} [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times$

$\times \mathbf{u}^*] \rho dx$  — момент количества движения от перемещения частиц тела при деформациях. Проекция вектора  $\mathbf{G}$  и оператор  $J^{-1}[\mathbf{u}]$  инерции деформированного тела, в котором отброшены члены порядка  $(|\mathbf{u}|/|\mathbf{r}|)^2$ , представим в системе координат  $Cx_1x_2x_3$  в виде

$$\mathbf{G} = ((I_2^2 - I_1^2)^{1/2} \sin \varphi_1, (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} \cos \varphi_1, I_1)$$

$$J^{-1}[\mathbf{u}] = J_0^{-1} - J_0^{-1} J_1[\mathbf{u}] J_0^{-1}, \quad J_0 = \text{diag} \{A_0 + \kappa A, A_0 + \kappa A, A_0 + \kappa C\}$$

Так как по предположению  $\kappa \ll 1$ , то эллипсоид инерции недеформированного тела близок к шаровому, с моментом инерции  $A_0$  относительно диаметра.

Уравнение упругих деформаций тела запишем в виде вариационного принципа Даламбера — Лагранжа

$$\int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{u}} R - \nabla_{\mathbf{u}} R - \nabla_{\mathbf{u}} D + \lambda_1 \right) \delta \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{r} \times \delta \mathbf{u} \right] dx = 0 \quad (2.2)$$

Будем считать, что диссипативный функционал  $D[\mathbf{u}']$  пропорционален функционалу  $E[\mathbf{u}]$ , если в последнем сделать замену  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}'$ , то есть  $D[\mathbf{u}'] = \chi b E[\mathbf{u}']$ , где  $\chi$  — коэффициент, характеризующий внутреннее вязкое трение в материале Кельвина — Фойгта,  $b > 0$ . На возможных перемещениях системы неопределенные множители  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Далее будем считать, что модуль Юнга  $E$  материала соответствующего однородного шара плотности  $\rho_0$  является достаточно большим и введем безразмерный малый параметр  $\varepsilon = E^{-1} \omega^2 \rho_0 r_0^2$ ,  $r_0$  — радиус шара,  $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ . Условие  $\varepsilon \ll 1$  означает, что характерное время  $T_0$  движения тела вокруг центра масс существенно превосходит период  $T$  свободных упругих колебаний на наименьшей собственной частоте. Предполагается также, что характерное время  $T_1$  затухания свободных упругих колебаний на наименьшей собственной частоте существенно превосходит время  $T$ , но намного меньше времени  $T_0 \sim \omega^{-1}$ . Если принять, что порядок угловой скорости вращения тела  $\omega$  равен 1, то введенные допущения можно представить в виде неравенства  $\varepsilon \ll \chi \ll \varepsilon^{1/2}$ . Решение уравнения (2.2) представим в виде ряда  $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + \dots$  и ограничимся функцией  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ . Уравнение для вектора  $\mathbf{u}^{(1)}$  будет

$$\varepsilon (1 + \chi b \partial / \partial t) \nabla E[\mathbf{u}^{(1)}] - \rho d / dt [\mathbf{r} \times J_0^{-1} \mathbf{G}] - {}^{-1/2} (\mathbf{G}, J_0^{-1} \nabla_{\mathbf{u}} J_1[\mathbf{u}] J_0^{-1} \mathbf{G}) = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) описывает квазистатический процесс деформации вязкоупругого тела. Граничные условия для функции  $\mathbf{u}^{(1)}$  формулируются в виде:  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  на  $\partial \Omega$ , где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений,  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности шара  $\partial \Omega$ . Будем предполагать, что для численных значений параметров  $\varepsilon$  и  $\chi$  выполняется соотношение:  $\chi \gg \varepsilon$ , так как в противном случае, например, если  $\chi \ll \varepsilon$ , ось вращения упругого тела, вследствие деформаций под действием центробежных сил инерции, станет осью с наибольшим моментом инерции.

Уравнения вращательного движения деформируемого тела записываются в виде  $I_2 \dot{=} I_3 \dot{=} 0$ ,  $\varphi_3 \dot{=} 0$ ,  $I_1 \dot{=} -\nabla_{\varphi_i} R$ ,  $\varphi_i \dot{=} \nabla_{I_i} R$  ( $i=1, 2$ ).

Если предположить, что при бесконечно большой жесткости деформации равны нулю ( $\mathbf{u}=0$ ), то движение полученного динамически симметричного тела является регулярной прецессией вокруг постоянного по величине и направлению вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$ , описываемой с точностью порядка  $\varepsilon^2$  уравнениями

$$I_i \dot{=} 0, \quad \varphi_3 \dot{=} 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

$$\varphi_1 \dot{=} \varkappa (A - C) A_0^{-2} I_1, \quad \varphi_2 \dot{=} (1 - \varkappa A A_0^{-1}) A_0^{-1} I_2$$

Примем это движение за невозмущенное. Тогда в возмущенном движении, в случае конечной жесткости ( $\varepsilon \neq 0$ ), уравнение для переменной  $I_1$  с точностью порядка  $\varepsilon^2$  будет

$$I_1 \dot{=} - (J^{-1}[\mathbf{u}] (\mathbf{G} - \mathbf{G}_u), \partial \mathbf{G} / \partial \varphi_1) = (J_0^{-1} \mathbf{G}_u', \partial \mathbf{G} / \partial \varphi_1) + (J_0^{-1} J_1[\mathbf{u}] J_0^{-1} \mathbf{G}, \partial \mathbf{G} / \partial \varphi_1), \quad \mathbf{G}_u' = \int_{\Omega} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}'] dx \quad (2.5)$$

В последнее уравнение следует подставить величину вектора перемещения точек тела  $\mathbf{u}$ , найденную из решения уравнения упругости (2.3)

при условии, что переменные Андуайе соответствуют уравнениям невозмущенного движения (2.4). Рассмотрим структуру функции  $u^{(1)}$ , которая с точностью порядка  $\kappa^2$  представима в виде:  $u^{(1)} = w_1 + \kappa w_2$ , где  $w_1$  — решение для однородного шара;  $w_2$  — функция, описывающая деформации за счет неоднородности и гироскопических сил. Функцию  $w_2$  в аналитическом виде найти затруднительно, однако для описания диссипативной эволюции переменной  $I_1$  с принятой точностью порядка  $\kappa^2$  этого не требуется. Если  $\chi \ll 1$ , то функции  $w_i$  ( $i=1, 2$ ) представимы в виде

$$w_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi b)^n \partial^n w_{i0} / \partial t^n \quad (2.6)$$

где  $w_{i0}$  — решения найденные при  $\chi=0$ . Ограничиваясь двумя первыми членами рядов (2.6) при условии  $\varepsilon \ll \chi \ll \varepsilon^{1/2}$ , запишем с погрешностью порядка  $O(\varepsilon)$   $w_i = w_{i0} - \chi b w_{i0}$ . Согласно уравнениям невозмущенного движения (2.4) нестационарность деформаций определяется скоростью вращения тела вокруг оси динамической симметрии и, поэтому, численные значения функций  $w_{i0}$  ( $i=1, 2$ ) будут порядка  $\kappa$ . Далее, учитывая, что на процесс эволюции вращательного движения тела влияют только диссипативные (пропорциональные коэффициенту  $\chi$ ) члены, можно сделать вывод, что этот эволюционный процесс с точностью порядка  $\kappa^2$  определяется функцией  $w_1$ . Отметим, что для однородного шара  $w_{i0} = 0$ . В рассматриваемом случае динамически симметричного тела будет

$$\begin{aligned} w_{10} &= r_0^{-2} \partial [\Gamma_3^{-1}(\varphi_1) \Gamma_1^{-1}(\delta_2) w^*(r^*)] / \partial t \\ w^*(r^*) &= [(B_1 r^*, r^*) B_2 + (B_3 r^*, r^*) B_4 + B_5] r^* \\ B_1 &= \text{diag} \{b_1, b_1, b_2\}, \quad B_2 = \text{diag} \{1, 1, 0\} \end{aligned}$$

$$B_3 = \text{diag} \{a_1, a_1, a_2\}, \quad B_4 = \text{diag} \{0, 0, 1\}, \quad B_5 = \text{diag} \{c_1, c_1, c_2\}$$

Здесь  $r^* = \Gamma_1(\delta_2) \Gamma_3(\varphi_1) r$  — координаты частицы тела в системе координат  $Cx_1^* x_2^* x_3^*$ , в которой вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  направлен по оси  $Cx_3^*$ . Коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  ( $i=1, 2$ ) приведены в [6]. Функция  $w_{10}$ , а также проекции векторов  $\mathbf{G}$  и  $\partial \mathbf{G} / \partial \varphi_1$  в системе координат  $Cx_1^* x_2^* x_3^*$  имеют наиболее простой вид

$$\begin{aligned} w_{10}^*(r^*) &= \Gamma_1(\delta_2) \Gamma_3(\varphi_1) w_{10}(r) = r_0^{-2} \{ [(b_1 - a_1)(x_1^{*2} + x_2^{*2}) + \\ &+ (b_2 - a_2)x_3^{*2} + c_1 - c_2] (x_3^*, 0, x_1^*) + 2[(b_1 - b_2) \times \\ &\times (x_1^*, x_2^*, 0) + (a_1 - a_2)(0, 0, x_3^*)] x_1^* x_3^* \} g_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G}^* = (0, 0, I_2), \quad \partial \mathbf{G}^* / \partial \varphi_1 = (I_2^2 - I_1^2)^{1/2} (1, 0, 0), \quad g_2 = -\varphi_1 \sin \delta_2$$

Подставляя выражения (2.7) в правую часть уравнения (2.5) с точностью порядка  $\kappa^2$  получим (раскрыв малый параметр  $\varepsilon$ ):

$$I_1^* = n I_1 I_2^2 (I_2^2 - I_1^2), \quad n = E^{-1} \kappa \chi b D (C - A) A_0^{-6} \rho_0^2$$

$$\begin{aligned} D = \int_{\Omega} \{ & [(b_1 - a_1)(x_1^{*2} + x_2^{*2}) + (b_2 - a_2)x_3^{*2} + c_1 - c_2] (x_1^{*2} + x_3^{*2}) + \\ & + 2(b_1 - b_2 + a_1 - a_2) x_1^* x_3^* \} dx > 0 \end{aligned}$$

Знак производной  $I_1^*$  совпадает со знаком  $n$ . Если  $C > A$ , то  $I_1^* > 0$  и в процессе эволюции вектор  $\mathbf{G}$  займет положение вдоль оси симметрии эллипсоида инерции тела. Если  $A > C$ , то  $I_1^* < 0$  и вектор  $\mathbf{G}$  с течением вре-



мени расположится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции тела.

Для геометрической иллюстрации эволюции регулярной прецессии неоднородного шара введем в точке  $C$  сферу единичного радиуса. Вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  неподвижен в инерциальном пространстве, а движение следа оси симметрии  $Cx_3$  на единичной сфере определяется уравнением  $d\delta_2/d\varphi_2 = -nA_0I_2^3 \sin \delta_2 \cos \delta_2$ .

Из геометрических построений можно определить тангенс угла наклона траектории следа оси  $Cx_3$  к параллелям сферы, который равен  $k = nA_0I_2^3 \cos \delta_2$  (плоскость, ортогональная вектору  $\mathbf{G}$  является экваториальной). Траектории являются винтообразными линиями. При  $C > A$   $k > 0$  и траектории скручиваются к полюсу единичной сферы, при  $A > C$   $k < 0$  и траектории раскручиваются к ее экватору.

Таким образом, при наличии вязкоупругой среды движение системы стремится к стационарному вращению вокруг вектора  $\mathbf{G}$  как твердого тела. Этот результат может быть также получен путем отыскания стационарных точек полной энергии системы на инвариантном многообразии, определенном интегралом момента количества движения, и использования теоремы об изменении энергии системы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноуцко Ф. Л. О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // ПМТФ. 1968. № 1. С. 73–79.
2. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука. 1988. 326 с.
3. Румянцев В. В. К задаче об устойчивости движения сложных механических систем // Проблемы математики и механики. Новосибирск. Наука, 1983. С. 185–195.
4. Болотина Н. Е., Вильке В. Г. О взаимном движении симметричных твердых тел вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 53–58.
5. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука. 1977. 328 с.
6. Вильке В. Г., Копылов С. А., Марков Ю. Г. Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // ПММ. 1985. т. 49. Вып. 1. С. 25–34.

Москва

Поступила в редакцию  
3.IV.1989