

УДК 539.3 : 534.1

© 1991 г.

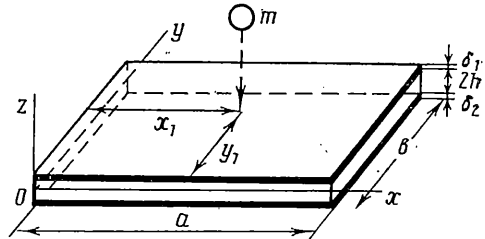
Ю. Н. ТАМУРОВ

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ УДАР ШАРОМ ПО ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Развиваются исследования поперечного удара [1, 2] с применением для локального динамического сжатия в зоне контакта поэтапной модели [3, 4]. Вариант уравнений теории нелинейно упругих пластин получен вариационным путем. Система девяти определяющих уравнений сведена к уравнению поперечных колебаний трехслойной пластинки, нелинейность которого обусловлена учетом физически нелинейных свойств материала заполнителя [5]. Решение задачи представлено в виде функционального уравнения типа Тимошенко и графических зависимостей контактных сил, смещений шара и прогибов пластинки от начальных условий, скорости и времени соударения.

1. Рассматривается поперечный малоскоростной удар изотропным шаром по поверхности трехслойной пластинки (фиг. 1). Используется гипотеза Тимошенко о том, что полное смещение падающего тела s от начала удара складывается из динамического прогиба w и местного сжатия $\alpha(P)$. Тогда [6]:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1 = \alpha(P) + w(x_1; y_1; t) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

где m , v_0 — масса и скорость шара в момент времени $t=0$; P — контактная сила. При наличии местных пластических деформаций для $\alpha(P)$ применяется модель [3, 4]:

$$\alpha(P) = \left\{ \begin{array}{l} kP^{2/3}, \quad \sup_{\zeta \leq t} P(\zeta) < P_1 \\ k_{\Phi} P^{2/3} + \alpha_p [\sup_{\zeta \leq t} P(\zeta)], \quad P < \sup_{\zeta \leq t} P(\zeta) \\ c^{\circ} (1 + \beta^{\circ}) P^{1/2} + d (1 - \beta^{\circ}) P, \quad P = \sup_{\zeta \leq t} P(\zeta) \end{array} \right\} \sup_{\zeta \leq t} P(\zeta) > P_1 \quad (1.2)$$

$$k = [{}^{\circ}/_{16} R^{-1} [(1 - \mu_0^2) E_0^{-1} + (1 - \mu^2) E^{-1}]^2]^{1/2}$$

здесь k , P_1 — коэффициент и предельное значение силы по теории Герца; P_1 , k_{Φ} , α_p , d , c° , β° определяются по [4]; k — по [7].

2. Для решения задачи о колебаниях, как реакции на удар, используется система уравнений, описывающая деформированное состояние трехслойной пластинки. Считается, что поведение наружных ортотропных слоев

описывается законом Гука [8]. Для слоя $h \leq z \leq h + \delta_1$:

$$\sigma_x = B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y, \quad \sigma_y = B_{22}\varepsilon_y + B_{12}\varepsilon_x \quad (2.1)$$

$$\tau_{yz} = B_{44}\varepsilon_{yz}, \quad \tau_{xz} = B_{55}\varepsilon_{xz}, \quad \tau_{xy} = B_{66}\varepsilon_{xy}$$

$$B_{11} = E_1 / (1 - \mu_1\mu_2), \quad B_{22} = E_2 / (1 - \mu_1\mu_2), \quad B_{12} = \mu_1 B_{22}$$

$$B_{44} = G_{23}, \quad B_{55} = G_{13}, \quad B_{66} = G_{12}$$

Для слоя $-h - \delta_2 \leq z \leq -h$ соотношения (2.1) записываются аналогично и должны быть помечены индексом (*).

Компоненты тензора напряжений физически нелинейного изотропного заполнителя по [5]:

$$\sigma_{3x} = 3K\chi(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\Psi_0^2)(\varepsilon_{3x} - \varepsilon_0), \quad \sigma_{3y} = \dots, \quad \sigma_{3z} = \dots \quad (2.2)$$

$$\tau_{3xy} = G\gamma(\Psi_0^2)\varepsilon_{3xy}, \quad \tau_{3xz} = \dots, \quad \tau_{3yz} = \dots, \quad \varepsilon_0 = 1/3(\varepsilon_{3x} + \varepsilon_{3y} + \varepsilon_{3z})$$

$$\Psi_0^2 = 8/9(\varepsilon_{3x}^2 + \varepsilon_{3y}^2 + \varepsilon_{3z}^2 - \varepsilon_{3x}\varepsilon_{3y} - \varepsilon_{3y}\varepsilon_{3z} - \varepsilon_{3z}\varepsilon_{3x}) + 2/3(\varepsilon_{3xy} + \varepsilon_{3xz} + \varepsilon_{3yz})$$

где G, K — модули сдвига и объемной упругости материала заполнителя; $\chi(\varepsilon_0)$ — функция удлинения; $\gamma(\Psi_0^2)$ — функция сдвига.

В дальнейшем примем [5] $\chi(\varepsilon_0) = 1 + \chi_2\varepsilon_0^2$, $\gamma(\Psi_0^2) = 1 + \gamma_2\Psi_0^2$, $\sigma_{3z} = 0$, $\varepsilon_{3z} = -\nu(\varepsilon_{3x} + \varepsilon_{3y})$, $\nu = \nu_0 / (1 - \nu_0)$, $\nu_0 = 1/2(3K - 2G) / (3K + G)$, где χ_2, γ_2 — константы, характеризующие физически нелинейные свойства материала; ν_0 — коэффициент Пуассона.

На основе принципа Лагранжа получено вариационное уравнение относительно полной энергии деформации оболочки

$$\begin{aligned} \delta A = & \iint \left\{ \left[\int_h^{h+\delta_1} (K_1\delta\varepsilon_x + K_2\delta\varepsilon_y + K_4\delta\varepsilon_{xy} + K_5\delta\varepsilon_{xz} + K_6\delta\varepsilon_{yz}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-h}^h (K_{31}\delta\varepsilon_{3x} + K_{32}\delta\varepsilon_{3y} + K_{34}\delta\varepsilon_{3xy} + K_{35}\delta\varepsilon_{3xz} + K_{36}\delta\varepsilon_{3yz}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{-h-\delta_2}^{-h} (K_1^*\delta\varepsilon_x^* + K_2^*\delta\varepsilon_y^* + K_4^*\delta\varepsilon_{xy}^* + K_5^*\delta\varepsilon_{xz}^* + K_6^*\delta\varepsilon_{yz}^*) \right] dz - \right. \\ & \left. - 2q(x; y)\delta w \right\} dx dy = 0 \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$K_1 = 2(B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y), \quad K_2 = 2(B_{22}\varepsilon_y + B_{12}\varepsilon_x)$$

$$K_4 = 2B_{66}\varepsilon_{xy}, \quad K_5 = 2B_{55}\varepsilon_{xz}, \quad K_6 = 2B_{44}\varepsilon_{yz}$$

$$K_1^* = 2(B_{11}^*\varepsilon_x^* + B_{12}^*\varepsilon_y^*), \quad K_2^* = 2(B_{22}^*\varepsilon_y^* + B_{12}^*\varepsilon_x^*)$$

$$K_4^* = 2B_{66}^*\varepsilon_{xy}^*, \quad K_5^* = 2B_{55}^*\varepsilon_{xz}^*, \quad K_6^* = 2B_{44}^*\varepsilon_{yz}^*$$

$$\begin{aligned} K_{31} = G \left\{ \frac{4}{1 - \nu_0} (\varepsilon_{3x} + \nu_0\varepsilon_{3y}) + b_1\varepsilon_{3x}^3 + b_2\varepsilon_{3y}^3 + (b_3\varepsilon_{3y} + b_4\varepsilon_{3x})\varepsilon_{3x}\varepsilon_{3y} + \right. \\ \left. + \frac{16}{9}\gamma_2(\varepsilon_{3xy}^2 + \varepsilon_{3yz}^2 + \varepsilon_{3xz}^2) [2(1 + \nu + \nu^2)(\varepsilon_{3x} + \varepsilon_{3y}) - 3\varepsilon_{3y}] \right\}, \quad K_{32} = K_{31}(x \rightleftharpoons y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{34} = 2G \left\{ 1 + 4/3(\varepsilon_{3xy}^2 + \varepsilon_{3xz}^2 + \varepsilon_{3yz}^2) + 16/9\gamma_2 [(1 + \nu + \nu^2)(\varepsilon_{3x}^2 + \varepsilon_{3y}^2) + \right. \\ \left. + (\nu^2 + 2\nu - 1)\varepsilon_{3x}\varepsilon_{3y}] \right\} \varepsilon_{3xy} \end{aligned}$$

$$K_{35} = K_{34}(y \rightleftharpoons z), \quad K_{36} = K_{34}(x \rightleftharpoons z)$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 4(1+v^4)a_{11} + 8v^2a_{13} - \frac{8}{3}v(1+v^2)(a_{15} - 4a_{17}) \\
b_2 &= 4v^2(v^2a_{11} + a_{13}) + \frac{2}{3}(1-v-4v^3)(a_{15} - 4a_{17}) + 2v(v-1)a_{15} \\
b_3 &= 12v^3[v a_{11} - \frac{2}{3}(a_{15} - 4a_{17})] + 4(1+2v^2)a_{13} + \frac{1}{2}v(14v-13)a_{15} \\
b_4 &= 12v^2(v^2a_{11} + a_{13}) + 2(1-v-4v^3)(a_{15} - 4a_{17}) + \frac{1}{2}v(11v-10)a_{15} \\
a_{11} &= \frac{1}{6}a_{15} + \frac{4}{3}a_{17}; \quad a_{13} = \frac{1}{2}a_{15} + 2a_{17}, \\
a_{15} &= 4(1+v_0)\chi_2/9(1-2v_0), \quad a_{17} = \frac{8}{9}\gamma_2
\end{aligned}$$

Из уравнения (2.3) при соответствующих аппроксимациях перемещений могут быть получены нелинейные дифференциальные уравнения и варианты граничных условий.

Рассматривается следующая кинематическая модель деформированного состояния. Для перемещений наружных слоев принята «поперечная сдвиговая» модель [9]:

$$\begin{aligned}
h \leq z \leq h + \delta_1: \quad u(x; y; z) &= u_1 + (z - h - \frac{1}{2}\delta_1)v_3 & (2.4) \\
v(x; y; z) &= v_1 + (z - h - \frac{1}{2}\delta_1)v_3 \\
-h - \delta_2 \leq z \leq -h: \quad u^*(x; y; z) &= u_2 + (z + h + \frac{1}{2}\delta_2)u_4 \\
v^*(x; y; z) &= v_2 + (z + h + \frac{1}{2}\delta_2)v_4 \\
u_1(x; y) &= u(x; y; h + \frac{1}{2}\delta_1), \quad u_2(x; y) = u^*(x; y; -h - \frac{1}{2}\delta_2) \\
u_3(x; y) &= u(x; y; h + \frac{1}{2}\delta_1), \quad u_4(x; y) = u^*(x; y; -h - \frac{1}{2}\delta_2)
\end{aligned}$$

перемещения v_1, v_2 и углы поворота v_3, v_4 записываются аналогично.

Для перемещений заполнителя принята уточненная модель [8]:

$$\begin{aligned}
-h \leq z \leq h: \quad u(x; y; z) &= u(x; y; 0) + zw_x + \Phi_1(z)\varphi(x; y) & (2.5) \\
v(x; y; z) &= v(x; y; 0) + zw_y + \Phi_2(z)\psi(x; y)
\end{aligned}$$

где $\varphi(x; y), \psi(x; y)$ — функции поперечного сдвига; $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$ — функции, характеризующие изменение перемещений по толщине слоя.

Используя условия сопряжения слоев при отсутствии проскальзывания и исключая $u(x; y; 0), v(x; y; 0), \varphi(x; y), \psi(x; y)$, перемещения заполнителя выражаются через функции w, u_i, v_i ($i=1, \dots, 4$), которые принимаются за определяющие. В работе рассматриваются малые перемещения, что дает возможность использовать соотношения теории малых деформаций.

Учитывая выражения (2.4), (2.5), после применения формулы Грина и варьирования по u_i, v_i, w , из (2.3) получим систему определяющих уравнений ($i=1, \dots, 4$):

$$\begin{aligned}
& \int_h^{h+\delta_1} [K_{1,x}\lambda_i(z) + K_{4,y}\lambda_i(z) - K_5\lambda_{i,z}(z)] dz + \\
& + \int_{-h}^h [K_{31,x}a_i(z) + K_{34,y}a_i(z) - K_{35}a_{i,z}(z)] dz + \\
& + \int_{-h-\delta_2}^{-h} [K_{1,x}^*\lambda_i^*(z) + K_{4,y}^*\lambda_i^*(z) - K_5^*\lambda_{i,z}^*(z)] dz = 0 & (2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_h^{h+\delta_1} [K_{2,y}\lambda_i(z) + K_{4,x}\lambda_i(z) - K_6\lambda_{i,z}(z)] dz + \\
& + \int_{-h}^h [K_{32,y}b_i(z) + K_{34,x}b_i(z) - K_{36}b_{i,z}(z)] dz + \\
& + \int_{-h-\delta_2}^{-h} [K_{2,y}^*\lambda_i^*(z) + K_{4,x}^*\lambda_i^*(z) - K_6^*\lambda_{i,z}^*(z)] dz = 0 \\
& \int_{-h}^h [K_{35,x}(h_{2,z}(z)-1) + K_{36,y}(h_{6,z}(z)-1) - K_{31,xx}h_2(z) - K_{32,yy}h_6(z) - \\
& - K_{34,xy}(h_6(z)+h_2(z))] dz - \int_h^{h+\delta_1} (K_{5,x}+K_{6,y}) dz - \int_{-h-\delta_2}^{-h} (K_{5,x}^*+K_{6,y}^*) dz = 2q(x; y)
\end{aligned}$$

и интеграл по контуру, позволяющий получать граничные условия:

$$\begin{aligned}
& \oint \left\{ \sum_{i=1}^4 \left[\left(\int_h^{h+\delta_1} K_i\lambda_i(z) dz + \int_{-h}^h K_{3i}a_i(z) dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_i^*\lambda_i^*(z) dz \right) \delta u_i dx + \right. \right. \\
& + \left(\int_h^{h+\delta_1} K_i\lambda_i(z) dz + \int_{-h}^h K_{3i}a_i(z) dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_i^*\lambda_i^*(z) dz \right) \delta u_i dy + \\
& + \left(\int_h^{h+\delta_1} K_2\lambda_i(z) dz + \int_{-h}^h K_{32}b_i(z) dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_2^*\lambda_i^*(z) dz \right) \delta v_i dx + \\
& + \left. \left(\int_h^{h+\delta_1} K_4\lambda_i(z) dz + \int_{-h}^h K_{34}b_i(z) dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_4^*\lambda_i^*(z) dz \right) \delta v_i dy \right] + \\
& + \left(\int_{-h}^h [K_{32,y}h_6(z) + 1/2K_{34,x}(h_2(z)+h_6(z)) - K_{36}(h_{6,z}(z)-1)] dz + \right. \\
& + \int_h^{h+\delta_1} K_6 dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_6^* dz \left. \right) \delta w dx + \int_{-h}^h K_{32}h_6(z) dz \delta w_y dx + \\
& + \left(\int_{-h}^h [K_{31,x}h_2(z) + 1/2K_{34,y}(h_2(z)+h_6(z)) - K_{35}(h_{2,z}(z)-1)] dz + \right. \\
& + \int_h^{h+\delta_1} K_5 dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_5^* dz \left. \right) \delta w dy + \int_{-h}^h K_{31}h_2(z) dz \delta w_{,x} dy \left. \right\} = 0 \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$a_1(z) = 1 + \alpha_2(z), \quad a_2(z) = -\alpha_2(z), \quad a_3(z) = -1/2\delta_1(1 + \alpha_2(z))$$

$$a_4(z) = -1/2\delta_2\alpha_2(z), \quad h_2(z) = z - h(1 + 2\alpha_2(z))$$

$$\alpha_2(z) = [\Phi_1(z) - \Phi_1(h)][\Phi_1(h) - \Phi_1(-h)]^{-1}, \quad \alpha_3(z) = \alpha_2(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$$

$$b_i(z) = a_i(\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3), \quad h_6(z) = h_2(\alpha_2 \Rightarrow \alpha_3)$$

$$\lambda_1(z) = \lambda_2^*(z) = 1, \quad \lambda_3(z) = z - h^{-1}/2\delta_1, \quad \lambda_4^*(z) = z + h^{-1}/2\delta_2$$

остальные $\lambda_i(z) = \lambda_i^*(z) = 0$.

В дальнейшем рассматривается случай соединения между собой слоев на кромке диафрагмой абсолютно гибкой из своей плоскости и абсолютно жесткой в своей плоскости. Тогда для свободно опертой кромки $x = \text{const}$: $\delta u_i \neq 0$, $\delta w, \delta v_i = 0$. Из (2.7) следует

$$\int_h^{h+\delta_1} K_1 \lambda_i(z) dz + \int_{-h}^h K_{31} a_i(z) dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_1^* \lambda_i^*(z) dz = 0 \quad (2.8)$$

$$\int_{-h}^h K_{31} h_2(z) dz = 0, \quad w = 0, \quad v_i = 0$$

для кромки $y = \text{const}$ аналогично

$$\int_h^{h+\delta_1} K_2 \lambda_i(z) dz + \int_{-h}^h K_{32} b_i(z) dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} K_2^* \lambda_i^*(z) dz = 0 \quad (2.9)$$

$$\int_{-h}^h K_{32} h_6(z) dz = 0, \quad w = 0, \quad u_i = 0$$

Граничные условия (2.8), (2.9) можно представить в виде суммы линейной и тождественной ей нелинейной частей. Поэтому при выборе функций, аппроксимирующих перемещения и углы поворота, достаточно удовлетворить линейной части граничных условий. Для свободного опирания запишем

$$x\text{-const: } u_i, \alpha = v_i = w, \quad \alpha \alpha = w = 0$$

$$y\text{-const: } v_i, \nu = u_i = w, \quad \nu \nu = w = 0$$

3. Для задач динамики аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям свободного опирания примем в виде

$$u_i = f_i(t) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad v_i = f_{i+4}(t) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (3.1)$$

$$w = \xi(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad \alpha_m = \pi/a, \quad \beta_n = \pi/b$$

Полагается, что распределение тангенциальных перемещений по толщине заполнителя подчиняется линейному закону. Система (2.6) разрешается относительно уравнения поперечных колебаний пластинки. Это дает возможность привести (2.6) к виду

$$d^2 \xi / dt^2 + c M^{-1} d \xi / dt + M^{-1} (F_1 \xi + F_2 \xi^3 + F_3 \xi^5) = M^{-1} Q_{mn} \quad (3.2)$$

здесь M , c — масса и коэффициент диссипации; F_1 , F_2 , F_3 — коэффициенты, зависящие от механических характеристик слоев и геометрических размеров пластинки [2].

Амплитуда прогиба пластинки под действием нормальной произвольной во времени силы $P(t)$ определяется решением динамической задачи при $Q_{mn} = 4P(t) a^{-1} b^{-1} \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n y_1$.

Решение уравнения (3.2) будем искать методом разложения в ряд по малому физическому параметру λ [5]:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \sum_{j=1}^4 \lambda^j \xi_j(t)$$

Тогда из (3.2) получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d^2\xi_0/dt^2 + 2\alpha d\xi_0/dt + p\xi_0 &= M^{-1}O_{mn} \\ d^2\xi_j/dt^2 + 2\alpha d\xi_j/dt + p\xi_j &= M^{-1}Q_j \\ Q_1 &= -\lambda^{-1}\xi_0^3(F_2 + F_3\xi_0^2), \quad Q_2 = -\lambda^{-1}\xi_0^2\xi_1(3F_2 + 5F_3\xi_0^2) \\ Q_3 &= -\lambda^{-1}[3\xi_0F_2(\xi_1^2 + \xi_0\xi_2) + 5\xi_0^3F_3(\xi_0\xi_2 + 2\xi_1^2)] \\ Q_4 &= -\lambda^{-1}[F_2(3\xi_0^2\xi_3 + 6\xi_0\xi_1\xi_2 + \xi_1^3) + 5\xi_0^2F_3(\xi_0^2\xi_3 + 2\xi_1^3 + 4\xi_0\xi_1\xi_2)] \\ \alpha &= c/2M, \quad p = F_1/M, \quad \lambda = \gamma_2K/[G^2(3K+G)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассматривается удар по колеблющейся пластинке. Начальные условия задачи имеют вид: $w(x_i; y_i; t=0) = w(0)$; $w_t(x_i; y_i; t=0) = v(0)$ или для нулевого и последующих приближений можно записать

$$\begin{aligned} \xi_0(0) &= w(0) (\sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n y_1)^{-1} = w_0^*, \quad \xi_j(0) = 0 \\ \xi_{0,t}(0) &= v(0) (\sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n y_1)^{-1} = v_0^*, \quad \xi_{j,t}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3) с учетом (3.4) дают

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{-\alpha t} [(v_0^* + \alpha w_0^*)\beta^{-1} \sin \beta t + w_0^* \cos \beta t] + \\ &+ \frac{1}{\beta M} \int_0^t \left(Q_{mn} + \sum_{j=1}^4 \lambda^j Q_j \right) e^{-\alpha(t-t_i)} \sin \beta(t-t_i) dt, \quad \beta = (p - \alpha^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя в (4.1) выражения (4.2), (3.4), (3.5) получим функциональное уравнение типа Тимошенко.

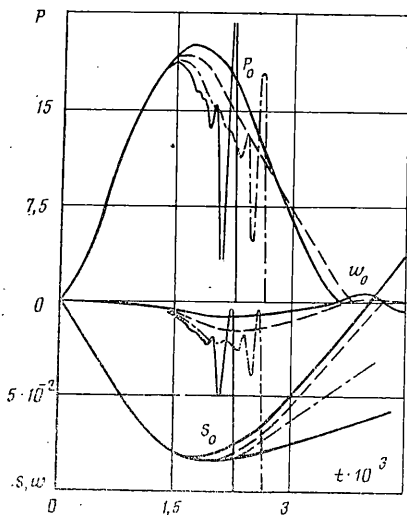
4. Решение (4.1) находится численным интегрированием [6], разделив интервал времени от 0 до t на малые элементы $\Delta\tau = 10^{-4}$ с и вычисляя шаг за шагом смещения шара s , прогибы пластинки w и контактные силы P .

Рассмотрены числовые примеры удара стальным шаром радиуса $R = 10^{-2}$ м по центру прямоугольной пластинки ($a = 0,6$ м; $b = 0,4$ м) с обшивками из боропластика и заполнителем из Д16-Т. Расчеты проведены при механических характеристиках материалов [40] и толщинах слоев $\delta_1/\delta_2 = 3$, $\delta_2 = h = 10^{-3}$ м. Параметр физической нелинейности $\gamma_2 = -0,387 \cdot 10^6$ найден в [2] на основе экспериментальной методики [5], $\chi_2 = 0$.

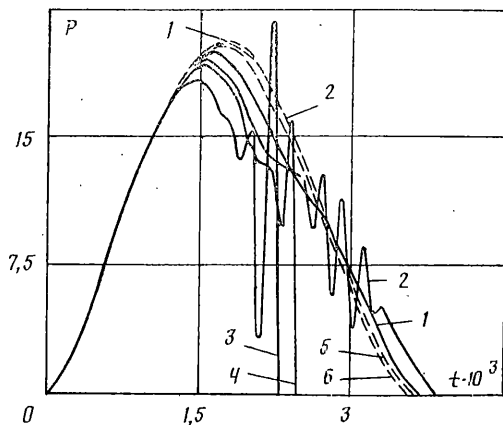
Анализ результатов показывает возникновение сложной, неоднозначной картины поведения пластинки.

Случай удара со скоростью $v_0 = 0,7$ м/с, $c = 0$ и начальными условиями $v_0^* = 10^{-2}$ м/с, $w_0^* = 0$ показан на фиг. 2. Здесь сплошные линии соответствуют решениям линейной ($\lambda = 0$, кривые P_0, w_0, s_0) и физически нелинейной (с учетом третьего приближения) задач, а штрихами и штрих-пунктиром показаны промежуточные результаты с учетом первого и второго приближений соответственно. Силы P измеряются в кН, s, w — в см, t — в с. В начале процесса соударения возникают бесконечно малые прогибы, в этом случае зависимости Каудерера переходят в обобщенный закон Гука и как следствие влияние физической нелинейности не проявляется. Когда прогибы принимают малые значения, то начинает сказываться учет физической нелинейности. В случае нелинейности «мягкого» типа прогибы оказываются больше, чем при решении соответствующей линейной задачи, а учет высших приближений ведет к увеличению прогибов и уменьшению значений контактных сил.

Задача удара рассматривалась при различных v_0, v_0^* и w_0^* . Было установлено, что уже при весьма малых v_0 начальные условия могут оказывать существенное влияние на поведение физически нелинейной пластинки. При $v_0^* < 0, w_0^* \leq 0$ влияние упругих нелинейных свойств не проявляется, т. к. система становится более «жесткой» по отношению к поперечному нагружению и прогибы не выходят за область бесконечно малых значений. Если $w_0^* > 0$ и $v_0^* \geq 0$, то на начальном этапе получаемые по расчету прогибы оказываются малыми и влияние физической не-



Фиг. 2



Фиг. 3

линейности заметно. Но уже при $w_0^* = 1/60$ ($\delta_1 + 2h + \delta_2$) учет физической нелинейности приводит к таким результатам, когда рассмотрение задачи с выбранными параметрами в рамках геометрически линейной теории становится невозможным. Характер протекания удара при $v_0 = 0,7$ м/с, $w_0^* = 0$, $v_0^* = 0$ и $v_0^* = 10^{-2}$ м/с (Фиг. 3) свидетельствует о заметном влиянии начальных условий на поведение нелинейно упругой пластинки. Здесь штриховыми линиями показаны результаты для линейной задачи, а сплошными — для нелинейной с учетом в разложении по параметру слагаемых до $\lambda^3 \xi_3(t)$ включительно. Кривая 1 — $c = 2,5$ МПа·с·м⁻¹, $v_0^* = 0$; кривая 2 — $c = 2,5$ МПа·с·м⁻¹, $v_0^* = 10^{-2}$ м/с; кривые 3, 4 — $c = 0$, $v_0^* = 10^{-2}$ м/с, $v_0^* = 0$ соответственно; кривая 5 — $c = 0$, $v_0^* = 0$; кривая 6 — $c = 0$, $v_0^* = 10^{-2}$ м/с. Если $c > 0$, то система оказывается менее чувствительной к рассматриваемым начальным условиям, поэтому влияние физической нелинейности на прогибы и контактные силы уменьшается.

В заключение отметим, что полученная в результате исследований картина поведения линейно упругой конструкции качественно совпадает с [3, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамуров Ю. Н. Упругий удар по трехслойной панели на нелинейно-упругом основании // Материаловедение и расчеты современных деталей машин. М.: ВЗПИ, 1987. С. 13–21.
2. Тамуров Ю. Н. Динамика трехслойных физически нелинейных оболочек и пластин: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Запорожье, 1988. 145 с.
3. Кадомцев И. Г., Фрейгейт М. Р. Упругопластический удар массивного тела по цилиндрической незамкнутой оболочке // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Кутаиси, 1987. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 9–14.
4. Александров В. М., Кадомцев И. Г., Царюк Л. Б. Осесимметричные контактные задачи для упругопластических тел // Трение и износ. 1984. Т. 5. № 1. С. 16–26.
5. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
6. Кильчевский Н. А. Теория соударения твердых тел. Киев: Наук. думка, 1969. 246 с.
7. Варданян В. В., Саркисян В. С. О поперечном упругом ударе изотропным шаром по анизотропному телу // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 3. С. 129–131.
8. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
9. Пелех В. Л. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища шк., 1978. 159 с.
10. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
11. Грицюк В. Е. Упругий удар по балке с учетом внутреннего поглощения энергии // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1972. Вып. 17. С. 68–73.