

УДК 539.3

© 1991 г.

Ю. Б. НЕДЕШЕВ, А. Ю. ПОПОВ

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСОБЫХ РАЗМЕРОВ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предложен аналитический метод определения собственных и антисобственных размеров [1, 2] (особых размеров) оболочек вращения знакопеременной кривизны. Обоснование предложенного метода проведено путем сопоставления с имеющимися аналитическими и численными результатами, полученными классическим путем [1, 2] (из условия некорректности безмоментной задачи). Данный метод в отличие от классического позволяет находить особые размеры оболочек с асимптотическими краями. Выведены простые формулы для определения особых размеров параболических и торовых оболочек.

1. Введение. Наличие участка отрицательной гауссовой кривизны у тороидальных оболочек обуславливает ряд особенностей их поведения. Граничными условиями такого участка отрицательной кривизны являются сопряжения с другими участками оболочки. Тогда, можно утверждать [1], что у тороидальных оболочек существует две группы особых размеров (характерных соотношений геометрических параметров), называемых в дальнейшем собственными и антисобственными размерами.

Эти размеры придают оболочкам существенно различные свойства. Оболочки собственного размера максимально податливы, перемещения близки к изгибаниям, вклад моментных составляющих в основное напряженное состояние максимален. Прямо противоположная картина наблюдается у оболочек антисобственного размера, поведение которых характеризуется преобладанием безмоментного напряженного состояния и максимальной жесткостью.

Для оболочек вращения отрицательной кривизны, не имеющих асимптотических краев [3] обе группы размеров могут быть определены через фундаментальную систему решений однородной безмоментной задачи [2]. Однородную безмоментную систему уравнений равновесия в этом случае можно записать в виде одного дифференциального уравнения, которое после отделения окружной координаты с помощью рядов Фурье имеет вид [4]:

$$d^2\Psi dz^2 + r^{-1}r''(m^2 - 1)\Psi = 0, \quad z_1 \leq z \leq z_2 \quad (1.1)$$

где z — осевая координата, $r=r(z)$ — уравнение меридиана оболочки, m — число волн по параллели. Ψ имеет смысл или функции напряжений или окружной компоненты вектора перемещений. Тогда собственные размеры шарнирно опертой оболочки могут быть найдены из уравнения [2]:

$$\Psi_1(z_1)\Psi_2(z_2) - \Psi_1(z_2)\Psi_2(z_1) = 0 \quad (1.2)$$

где $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ — фундаментальная система решений уравнений (1.1). Антисобственные размеры шарнирно опертой оболочки определяются из уравнения [2]:

$$\Psi_1(z_1)\Psi_2'(z_2) - \Psi_1'(z_2)\Psi_2(z_1) = 0 \quad (1.3)$$

Прямой подстановкой можно показать, что равенство (1.2) преобразует левую часть уравнения (1.3), а равенство (1.3) в свою очередь преобразует левую часть уравнения (1.2) в определитель Бронского для уравнения (1.1), который, естественно, не может быть равен нулю. Таким образом равенства (1.2) и (1.3) не могут удовлетворяться одновременно. Однако, если срединная поверхность оболочки касается плоскости вдоль замкнутой кривой (тороидальные оболочки), то постановка безмоментной задачи невозможна. Для построения особых размеров таких оболочек предлагается способ, основанный на свойствах асимптотических линий срединной поверхности оболочек отрицательной гауссовой кривизны.

Самостоятельный интерес представляет получение аналитических формул особых размеров некоторых типов оболочек, распространенных в технике, для которых уравнение (1.1) решается только численно.

2. Основные гипотезы. Рассмотрим гладкую изотропную оболочку вращения отрицательной кривизны, шарнирно опертую по краям. Введем на ее срединной поверхности систему координат, совпадающую с линиями кривизны α , Φ . Не ограничивая общности рассуждений, все дальнейшие выкладки проведем для симметричной относительно $\alpha \equiv z = 0$ оболочки.

Гипотеза 1: формулы, определяющие особые размеры оболочек имеют следующую структуру.

$$f_1 f_2 = \pi n / 2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

здесь и далее n четное соответствует собственным размерам, n нечетное антисобственным размерам. Функция f_1 зависит только от геометрических параметров оболочки, функция f_2 — только от вида нагрузки (числа m). Через каждую точку поверхности отрицательной кривизны проходят две асимптотические линии, уравнения которых имеют вид:

$$(d\alpha/d\Phi)^2 = A_2^2 R_1 / A_1^2 R_2 \quad (2.2)$$

где A_1 , A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, R_1 , R_2 — главные радиусы кривизны. Если в качестве координаты α выбрать осевую координату z , то выражение (2.2) упрощается

$$(dz/d\Phi)^2 = A_2 / A_1 \quad (2.3)$$

Переход по асимптотической линии от левого до правого края оболочки приводит к изменению окружной координаты на угол Φ_* , который будем называть углом перехода асимптотической линии.

Гипотеза 2: вид функции f_1 совпадает с выражением для угла Φ_* , который может быть найден интегрированием уравнения (2.2) или (2.3) в пределах α_1 , α_2 или z_1 , z_2 соответственно.

Рассмотрим короткую симметричную относительно $z = 0$ оболочку отрицательной кривизны длина которой H , радиус горловины a при условии

$$H \ll a \quad (2.4)$$

Расстояние от срединной поверхности такой оболочки до оси вращения можно представить в виде

$$A_2 = a + d(z) \quad (2.5)$$

где $d(z)$, в силу (2.4) медленно меняющаяся функция близкая к нулю. Тогда

$$A_2'' = d''(z) \approx C^2 \quad (2.6)$$

где $C = \text{const}$, зависящая от геометрии меридиана оболочки.

Подставляя (2.5) и (2.6) в уравнение (1.1) и используя условия (1.2), (1.3) получим выражение для особых размеров такой оболочки

$$(m^2-1)^{1/2}HC=\pi n/2 \quad (2.7)$$

В (2.7) принимаем, что функция $f_1=H \cdot C$, а функция

$$f_2=(m^2-1)^{1/2} \quad (2.8)$$

Гипотеза 3: выражение (2.8) для функции f_2 справедливо для оболочек любых осевых размеров и геометрии. Таким образом приходим к следующей общей формуле особых размеров гладких оболочек вращения

$$(m^2-1)^{1/2}\Phi_*=\pi n/2, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.9)$$

3. Обоснование формулы (2.9) проведем путем сравнения особых размеров, полученных с ее помощью, с особыми размерами, полученными по формулам (1.2) и (1.3) и по результатам расчета по полной моментной теории для оболочек различной геометрии. Вначале рассмотрим симметричные относительно $z=0$ катеноид и гиперболоид вращения, для которых имеются аналитические выражения особых размеров.

Уравнение меридиана катеноида

$$r=a \operatorname{ch}(z/a) \quad (3.1)$$

где a — радиус горловины, H — длина, $-H/2 \leq z \leq H/2$. Подставляя (3.1) в (2.3) и интегрируя это уравнение получим $\Phi=C \pm z/a$. Если асимптотическая линия выходит из точки $\Phi=0$ на левом краю оболочки ($z=-H/2$), тогда ее уравнение имеет вид $\Phi=\pm(H/2a+z/a)$, где знаки перед скобкой соответствуют первому и второму семействам асимптотических линий. Подставляя в это выражение $z=H/2$, получим угол перехода асимптотической линии

$$\Phi_*=H/a \quad (3.2)$$

Из (2.9) получаем формулу особых размеров катеноида

$$(m^2-1)^{1/2}H/a=\pi n/2 \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) полностью совпадает с результатами, полученными традиционными методами, т. е. путем аналитического решения (1.1) и подстановки полученного решения в условия (1.2) и (1.3).

Уравнение меридиана симметричного гиперболоида

$$r=a(1+z^2/b^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

где a , b — действительная и мнимая полуось гиперболы, H — длина, $-H/2 \leq z \leq H/2$. Подставляя (3.4) в (2.3) и интегрируя при тех же граничных условиях получим угол перехода асимптотической линии

$$\Phi_*=2 \operatorname{arctg}(H/2b) \quad (3.5)$$

В итоге из (2.9) получаем формулу особых размеров гиперболоида

$$2(m^2-1)^{1/2} \operatorname{arctg}(H/2b)=\pi n/2 \quad (3.6)$$

Формулы (1.2) и (1.3) дают другие выражения особых размеров. Собственные размеры

$$2m \operatorname{arctg} H/2b=\pi k, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Антисобственные размеры

$$\operatorname{tg}[2m \operatorname{arctg}(H/2b)]=-2mb/H \quad (3.8)$$

Таблица 1

m	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
2	1,0260	0,3912	—	—
	1,0291	0,5	—	—
3	1,7541	0,8058	0,4545	0,2478
	1,7548	0,8660	0,4434	0,2887

Таблица 2

m	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
2	2,3501	0,5310	0,2003	0,09026	0,04399	0,02227	—	—
	2,3508	0,5777	0,1978	0,09626	0,04260	0,02323	—	—
3	6,4019	1,5403	0,6427	0,3313	0,1900	0,1157	0,07305	0,04721
	6,4021	1,5895	0,6416	0,3410	0,1891	0,1186	0,07240	0,04817

Несмотря на расхождение выражений (3.6) и (3.7), (3.8), сравним полученные по ним результаты.

В табл. 1 для различных m для гиперболоида с $H/a=1$ приведены значения b/a , четные n соответствуют собственным размерам, нечетные n — антисобственным размерам. Для каждого m в верхней строке даны размеры, полученные по формуле (3.6), в нижней строке — по формуле (3.7) для собственных размеров, по формуле (3.8) для антисобственных. Как можно заметить среднее расхождение при определении собственных размеров составляет 15%. Для антисобственных размеров результаты различаются не более чем на 1%.

Рассмотрим симметричную оболочку с параболической образующей

$$r=z^2/b+a$$

где a — радиус горловины, b — раствор параболы, H — длина оболочки, $-H/2 \leq z \leq H/2$.

Выражение для определения особых размеров такой оболочки, полученное при помощи формулы (2.9) имеет вид

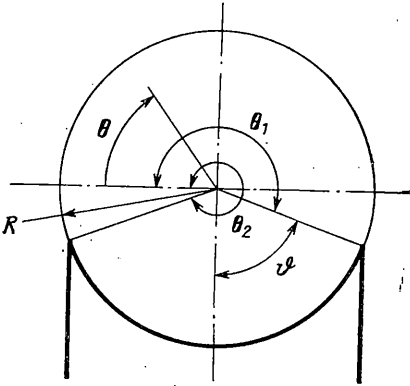
$$2^{1/2} (m^2 - 1)^{1/2} \ln \left[(1 + H^2/4ab)^{1/2} + H/2(ab)^{1/4} \right] = \pi n/2 \quad (3.9)$$

Эта оболочка отличается от рассмотренных выше тем, что в общем случае соотношения ее геометрических параметров особые размеры по формулам (1.2) и (1.3) могут быть построены только численно. Отметим, однако, что в случае короткой оболочки с таким меридианом, т. е. при $a \cdot b \gg H^2$, уравнение (1.1) имеет постоянные коэффициенты $A_2''/A_2 = 2(2^2 + ab) \approx 2/ab$ и из (1.2), (1.3) получается следующее выражение особых размеров

$$[2(m^2 - 1)]^{1/2} H/(ab)^{1/2} = \pi n/2 \quad (3.10)$$

При условии $a \cdot b \gg H^2$ выражение (3.9) так же упрощается и полностью совпадает с (3.10). Сравним особые размеры, полученные из формулы (3.9) с особыми размерами полученными из (1.2) и (1.3) численно для оболочки с параметрами a , b , H одного порядка.

В табл. 2 для различных m для параболоида с $H/b=1$ приведены значения a/b , при четных n соответствующие собственным размерам, а при нечетных n — антисобственным размерам. Для каждого m в верхней строке приведены размеры, полученные по формуле (3.9), в нижней строке — результаты численной реализации условия (1.2) для собственных и условия (1.3) для антисобственных размеров. Среднее расхождение при определении собственных размеров составляет при $m=2$ около 7%, при $m=3$ около 3%. Для антисобственных размеров результаты различаются не более чем на 3%.



Фиг. 1

Рассмотрим круговой тор (фиг. 1) при условии $\pi < \theta < 2\pi$ (тор без асимптотического края), тогда уравнение (2.2) примет вид

$$d\Phi = d\theta / [-\sin \theta (\sin \theta + c/R)]^{1/2}$$

Интегрируя его при $\theta = \theta_1$, $\Phi = 0$ получим

$$\Phi_* = (2/g)^{1/2} [F(2\text{arctg}(t_2^{1/2}; s) - F(2\text{arctg}(t_1^{1/2}; s))] \quad (3.11)$$

где $F(t, s)$ — эллиптический интеграл первого рода, $g = c/R$, $t_1 = \text{tg}(\theta_1 - \pi)/2$, $t_2 = \text{tg}(\theta_2 - \pi)/2$, $s^2 = (g+1)/2g$.

Делая замену переменных для симметричного тора $\theta_1 = 1,5\pi + \vartheta$, $\theta_2 = 1,5\pi - \vartheta$ и используя формулу для суммы эллиптических интегралов первого рода [5] выражение (3.11) можно упростить

$$\Phi_* = (2/g)^{1/2} F(\beta; s) \quad (3.12)$$

$$\sin \beta = \frac{2 \sin \vartheta [2 \cos \vartheta (1 - g^{-1} \cos \vartheta)]^{1/2}}{1 + 2 \cos \vartheta - (g+2)g^{-1} \cos^2 \vartheta}$$

В итоге из (2.9) получаем формулу для особых размеров кругового тора

$$[2(m^2 - 1)/g]^{1/2} F(\beta; s) = \pi n / 2 \quad (3.13)$$

Как и для параболической оболочки при произвольных геометрических параметрах, уравнение (1.1) для кругового тора решается только численно. При $\vartheta \rightarrow 0$, т. е. в случае короткой оболочки, коэффициенты уравнения (1.1) становятся постоянными, и легко найти его аналитическое решение. Используя формулы (1.2), (1.3) можно получить выражение, определяющее собственные и антисобственные размеры кругового тора соответственно при четных и нечетных n

$$2\vartheta [(m^2 - 1)/(g - 1)]^{1/2} = \pi n / 2 \quad (3.14)$$

Преобразуя выражение (3.13) при $\vartheta \rightarrow 0$, получим

$$\sin \beta \approx \beta \approx \vartheta [2g/(g - 1)]^{1/2}$$

$$\Phi_* = (2/g)^{1/2} F(\beta; s) \approx (2/g)^{1/2} \beta \approx 2\vartheta / (g - 1)^{1/2}$$

Подставляя полученное значение Φ_* в (2.9) так же приходим к выражению (3.14).

Сравним особые размеры, полученные из формулы (3.13) с особыми размерами, полученными численно по формулам (1.2), (1.3) для круговых торов с произвольным углом $\vartheta < \pi/2$.

В табл. 3 для различных m для кругового тора с углом $\vartheta = \pi/4$ приведены значения g , при четных n соответствующие собственным размерам,

Таблица 3

m	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
2	1,7420	1,2833	1,1294	—	—
	1,6465	1,2835	1,1251	—	—
	1,673	1,56	1,157	—	—
3	3,1368	1,8964	1,4654	1,2689	1,1651
	2,7868	1,8907	1,4443	1,2687	1,1620
	2,844	2,25	1,478	1,48	1,221

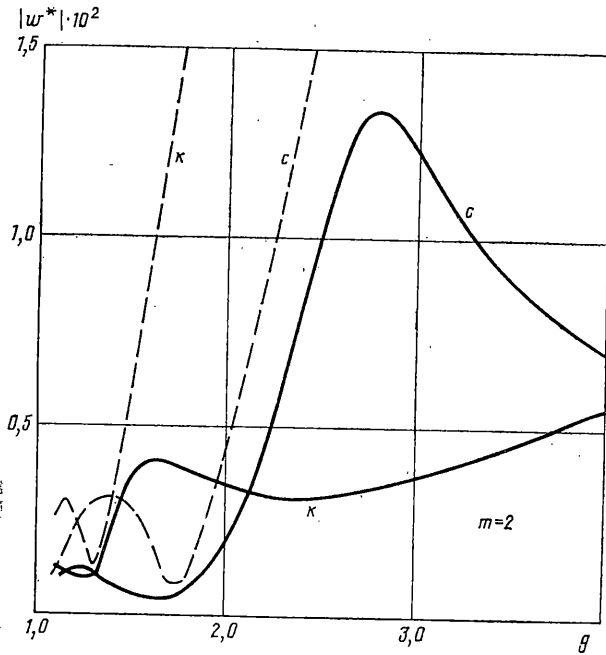
Таблица 4

$n/2$	$m=2$				$m=3$			$n/2$
2	2,592	2,78	—	—	2,977	3,23	—	3
5/2	1,866	1,78	1,75	—	2,329	2,74	2,51	7/2
3	1,489	1,60	1,40	1,40	1,919	1,98	1,96	4
7/2	1,279	1,26	1,31	—	1,645	1,86	1,77	9/2
4	1,158	1,22	1,15	1,16	1,456	1,51	1,48	5
					1,323	1,38	1,31	11/2
					1,229	1,25	1,23	6

а при нечетных n — антисобственным размерам. Для каждого m в первой строке даны размеры, полученные по формуле (3.13), во второй строке — результаты численной реализации условия (1.2) для собственных и условий (1.3) для антисобственных размеров.

Для контроля проводился численный расчет такой оболочки с относительной толщиной $h/R=0,01$ методом С. К. Годунова по полной моментной теории. Нормальная нагрузка (давление), распределена пропорционально $\cos(m\Phi)$ по параллели. Для наилучшего проявления влияния особых размеров на напряженное состояние оболочки выбиралось два вида распределения нагрузки по меридиану: симметричное относительно угла $\Phi=0 - p_0 \cos \Phi$ и антисимметричное $-p_0 \sin \Phi$, амплитудное значение $p_0=2$ атм. Таким образом были получены две группы особых размеров — симметричные и антисимметричные. В третьей строке табл. 3 для каждого m в столбцах с четными n даны значения g , соответствующие наибольшему значению максимального по модулю прогиба основного напряженного состояния оболочки, в столбцах с нечетными n даны значения g , соответствующие наименьшему значению максимального по модулю прогиба основного напряженного состояния оболочки. Как видно из таблицы, значения g в верхних двух строках совпадают с высокой точностью и расходятся с данными расчета по полной моментной теории не более 10... 12%. Это расхождение для оболочки с $h/R=0,01$ соответствует погрешности уравнений безмоментной теории по сравнению с моментными уравнениями.

Прежде чем переходить к рассмотрению замкнутых тороидальных оболочек, подведем некоторые итоги. Формула (2.9) дает полное совпадение с результатами, полученными традиционным путем, т. е. с использованием решения безмоментной задачи для катеноида и для коротких параболической и торовой оболочек. Численные результаты, полученные по формуле (2.9) и формулам (1.2), (1.3) для всех остальных рассмотренных оболочек совпадают вполне удовлетворительно, даже для случая разных аналитических выражений особых размеров (гиперболоид). Расхождение



Фиг. 2

результатов лежит в пределах погрешности безмоментной теории по сравнению с полной моментной теорией. Таким образом формулу (2.9) можно использовать для поиска особых размеров реальных объектов.

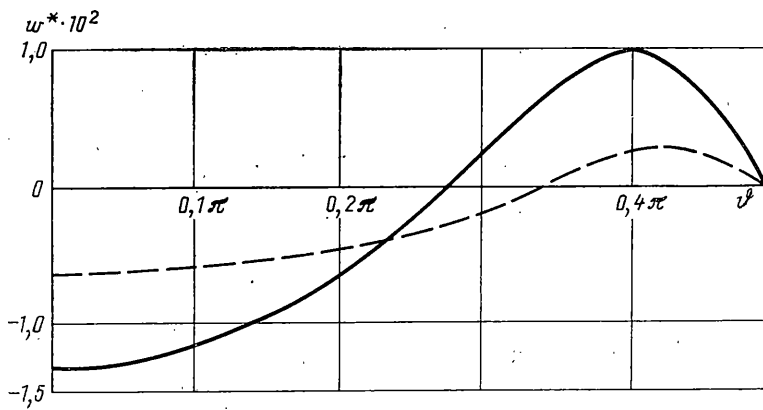
4. Перейдем теперь к изучению оболочек с асимптотическими краями. Традиционным методом, особые размеры таких оболочек найдены быть не могут. Рассмотрим половину замкнутой торовой оболочки, т. е. $\vartheta = \pi/2$. Основываясь на (3.12) и (3.13) получим формулу особых размеров:

$$2 [2(m^2 - 1)/g]^{1/2} K(s) = \pi n/2 \quad (4.1)$$

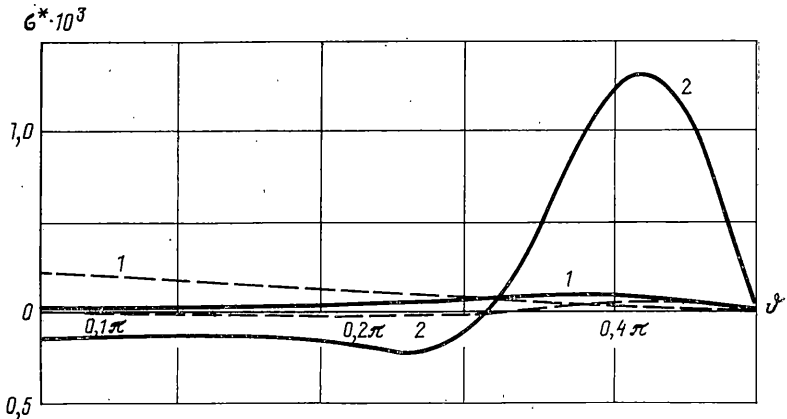
где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Сравним результаты, полученные по данной формуле с расчетами нижней половины кругового тора и замкнутых тороидальных оболочек по полной моментной теории.

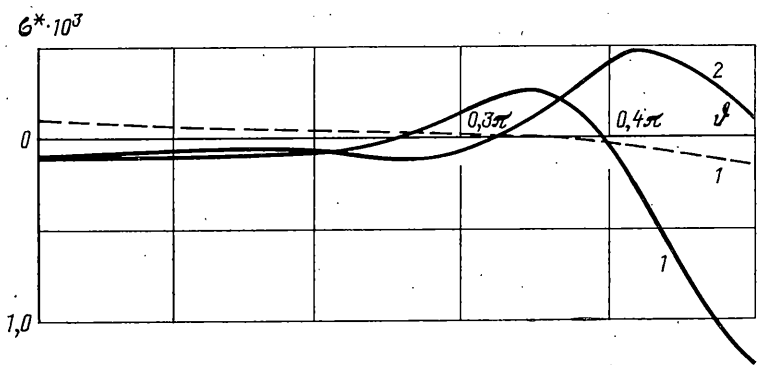
В табл. 4 для различных m приведены значения g , соответствующие особым размерам торовых оболочек. Для каждого m в первом столбце — корни уравнения (4.1). Во втором, третьем и четвертом столбцах приведены результаты численного расчета различных торовых оболочек с относительной толщиной $h/R = 0,01$ методом С. К. Годунова по полной моментной теории. Нагрузка выбиралась такая же, как и для тора с углом $\vartheta = \pi/4$. В каждом из этих столбцов для фиксированного m в строках с четными n даны значения g , соответствующие наибольшему значению максимального по модулю прогиба основного напряженного состояния оболочки, в столбцах с нечетными n даны значения g , соответствующие значению минимального по модулю прогиба основного напряженного состояния оболочки. Во втором столбце — значения g , нижней половины кругового тора ($\vartheta = \pi$), шарнирно опертого по краям; в третьем столбце — значения g , замкнутого кругового тора; в четвертом столбце для $m=2$ — значения g , замкнутой тороидальной оболочки, нижняя половина которой круговой тор, верхняя половина $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ — эллипсоидальный тор. Отношение полуоси эллипса, перпендикулярной оси вращения, к радиусу окружности кругового тора равно 0,5.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Как видно из табл. 4, числа во всех столбцах совпадают с достаточно высокой точностью, особенно для больших n . При этом видно, что особые размеры соответствуют одним и тем же величинам g для каждой из рассмотренных трех оболочек. Влияние особых размеров на напряженно-деформированное состояние существенно, что проиллюстрировано на фиг. 2—5.

На фиг. 2 для $m=2$ приведены зависимости от g максимального по модулю безразмерного прогиба ($w^*=w/R$) основного напряженного состоя-

ния нижней половины тора (сплошная линия) и замкнутого тора (штриховая линия). Буквой c обозначены кривые, полученные при симметричном давлении $p_0 \cos \vartheta$, буквой K — при антисимметричном $p_0 \sin \vartheta$. Максимумы прогибов четко соответствуют собственным размерам, минимумы — антисобственным размерам.

На фиг. 3—5 показаны зависимости от меридиональной координаты прогибов и напряжений нижней половины кругового тора ($\vartheta = \pi$) шарнирно опертого по краям и нагруженного симметричным относительно угла $\vartheta = 0$ — давлением $p_0 \cos \vartheta / \cos 2\Phi$ для двух значений g . Сплошной линией показаны прогиб и напряжения тора собственного размера ($g = 2,80$), штриховой — антисобственного размера ($g = 1,78$). На фиг. 3 даны графики безразмерных прогибов. На фиг. 4 представлены зависимости меридиональных напряжений ($\sigma^* = \sigma/E$, $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см² — модуль Юнга), цифрой 1 показаны тангенциальные напряжения, цифрой 2 — изгибные. На фиг. 5 изображены зависимости окружных напряжений, цифрой 1 показаны тангенциальные напряжения, цифрой 2 — изгибные, в масштабе данного рисунка окружные изгибные напряжения тора антисобственного размера сливаются с осью абсцисс. Из графиков видно, что в случае собственного размера в основном напряженном состоянии преобладают изгибные составляющие, при антисобственном размере — безмоментные напряжения.

Основываясь на представленных результатах можно сделать следующие выводы.

Формула (4.1) позволяет получать особые размеры оболочек, для которых невозможна постановка безмоментной задачи.

Особые размеры тороидальных оболочек зависят от геометрических параметров участка отрицательной кривизны и слабо зависят от параметров остальных участков.

Замена участка тора положительной кривизны различной геометрии шарнирным опиранием не вносит существенных искажений в величину особых размеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденвейзер А. Л. Математическая жесткость поверхностей и физическая жесткость оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 65—77.
2. Недешев Ю. В., Чернышев Г. Н. Трансформация жесткости оболочки знакопеременной кривизны при изменении размеров // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 159—165.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. Власов В. З. К теории безмоментных оболочек вращения // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 55—84.
5. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1944. 235 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.XII.1989