

УДК 539.3 : 534.1

© 1991 г.

В. А. ЛОМАЗОВ

**ОБ ОДНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ
СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН**

Под проблемой диагностики понимается задача определения характеристик тела по экспериментально полученной информации о физических полях, инициированных в нем специальным образом подобранными внешними воздействиями [1, 2]. Изучение постановок и методов решения задач диагностики связано, в первую очередь, с актуальной проблемой неразрушающего контроля качества изделий. Применение многих способов обработки материалов (например, прокатка, штамповка, прессование, термообработка, направленная кристаллизация при производстве отливок и так далее), а также действие агрессивных сред, резких колебаний температур, сильных магнитных полей, радиоактивного облучения в процессе эксплуатации изделий приводит к изменениям в структуре материала, которые необходимо учитывать при оценке прочностных и других эксплуатационных характеристик изделий [3, 4]. Неравномерность воздействий может привести к неоднородности материала, которую невозможно прогнозировать заранее. В настоящей работе исследуется возможность определения неоднородного распределения жесткостных свойств и плотности прямоугольной пластины по измеряемым на торце параметрам ее изгибных колебаний.

1. Изгибные колебания анизотропной неоднородной в своей плоскости прямоугольной пластины $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$ описываются уравнениями [5], начальными и граничными условиями

$$M_{1,11} + M_{2,22} + M_{12,12} - J_\rho u'' = F(x, t) \tag{1.1}$$

$$M_1 = -J_{11}u_{,11} - J_{12}u_{,22} - 2J_{13}u_{,12} \tag{1.2}$$

$$M_2 = -J_{12}u_{,11} - J_{22}u_{,22} - 2J_{23}u_{,12}, \quad M_{12} = -J_{13}u_{,13} - J_{23}u_{,22} - 2J_{33}u_{,12}$$

$$J_\rho = 2\delta\rho(x), \quad J_{ij} = {}^2/3\delta^3 B_{ij}(x) \quad (i, j=1, 2, 3)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'|_{t=0} = \psi(x) \tag{1.3}$$

$$(u|_{x_1=0}, u|_{x_1=a}, M_1|_{x_1=0}, M_1|_{x_1=a}) = Q(x_2, t) \tag{1.4}$$

$$(u|_{x_2=0}, u|_{x_2=b}, M_2|_{x_2=0}, M_2|_{x_2=b}) = P(x_1, t)$$

$$Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), \quad P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$$

Здесь плотность ρ и модули упругости B_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) зависят от пространственных переменных $x = (x_1, x_2)$: $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$, а прогиб u и моменты M_1, M_2, M_{12} являются достаточно гладкими функциями x и времени t ; $\delta = \text{const}$.

Будем полагать в дальнейшем, что материал, из которого сделана пластина, является слабо неоднородным и анизотропным, т. е.

$$\| \{ J_\rho^\varepsilon(x), J_{ij}^\varepsilon(x) \} \|_{C^2} \leq \varepsilon \{ J_\rho^0, J_{ij}^0 \}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$$\{ J_\rho^\varepsilon, J_{ij}^\varepsilon \} = \{ J_\rho - J_\rho^0, J_{ij} - J_{ij}^0 \}$$

$$J_{11}^0 = J_{22}^0 = J_1^0 + J_2^0, \quad J_{12}^0 = J_1^0, \quad J_{33}^0 = J_2^0, \quad J_{13}^0 = J_{23}^0 = 0$$

где J_p^0, J_1^0, J_2^0 — константы, характеризующие однородную изотропную контрольную пластину. Являясь следствием нарушения технологии изготовления или результатом воздействия внешних факторов в процессе эксплуатации изделий, слабая жесткостная неоднородность и анизотропия материала свидетельствует о дефектах ее структуры. Отметим, что структурные изменения в материале, соответствующие малым отклонениям его жесткостных свойств, могут значительно менять его прочностные и другие эксплуатационные характеристики. Так, например, облучение ряда металлов приводит к изменению модулей Юнга в пределах 10–15%, в то время как предел текучести увеличивается при этом в несколько раз [6].

Наряду с $u(x, t)$ рассмотрим $u^0(x, t)$ — процесс деформирования контрольной пластины под действием той же системы нагрузок, что и исследуемая слабо неоднородная и анизотропная пластина. $u^0(x, t)$ удовлетворяет соотношениям (1.1)–(1.4) после замены $u^0 \rightarrow u, J_p^0 \rightarrow J_p, J_{ij}^0 \rightarrow J_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$). Полагая, что $\|u - u^0\|_{C^4} \leq \varepsilon \|u^0\|_{C^4}, 0 < \varepsilon \leq 1$ и пренебрегая величинами порядка ε^2 , получим относительно $u^\varepsilon(x, t) = u - u^0$ уравнение, начальные и граничные условия

$$2(J_1^0 + J_2^0)\Delta\Delta u^\varepsilon + J_p^0 u^{\varepsilon''} = -J_p^\varepsilon u^{0''} - (J_{11}^\varepsilon u_{,11}^0 + J_{12}^\varepsilon u_{,22}^0 + 2J_{13}^\varepsilon u_{,12}^0)_{,11} - \\ - (J_{12}^\varepsilon u_{,11}^0 + J_{22}^\varepsilon u_{,22}^0 + 2J_{23}^\varepsilon u_{,12}^0)_{,22} - (J_{13}^\varepsilon u_{,11}^0 + J_{23}^\varepsilon u_{,22}^0 + 2J_{33}^\varepsilon u_{,12}^0)_{,12} \quad (1.5)$$

$$u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad u^{\varepsilon'}|_{t=0} = 0 \quad (1.6)$$

$$u^\varepsilon|_{x_1=0} = u^\varepsilon|_{x_1=a} = u^\varepsilon|_{x_2=0} = u^\varepsilon|_{x_2=b} = 0 \quad (1.7)$$

$$J_{11}^0 u_{,11}^\varepsilon = -J_{11}^\varepsilon u_{,11}^0 - 2J_{13}^\varepsilon u_{,12}^0, \quad x_1=0, \quad x_1=a$$

$$J_{22}^0 u_{,22}^\varepsilon = -J_{22}^\varepsilon u_{,22}^0 - 2J_{23}^\varepsilon u_{,12}^0, \quad x_2=0, \quad x_2=b$$

Таким образом, задача исследования влияния слабой неоднородности и анизотропии материала на режим изгибных колебаний пластины свелась (при заданных характеристиках материала) к хорошо известной задаче о колебаниях пластины под действием некоторой вынуждающей силы при заданных краевых условиях. Если же часть характеристик материала, входящих в правые части соотношений (1.5), (1.7), неизвестны, то u^ε не может быть однозначно определено из (1.5)–(1.7). Отметим, что ситуация, когда некоторые характеристики материала известны неточно, достаточно широко распространена, не говоря уже о том, что определение этих характеристик имеет самостоятельное значение, не связанное с изучением режима колебаний.

Задача диагностики будет состоять в определении неизвестных характеристик пластины $J_p^\varepsilon, J_{ij}^\varepsilon$ ($i, j=1, 2, 3$) из N задач вида (1.5)–(1.7) по значениям

$$u_{,i}^{\varepsilon(n)}|_{x_i=0} = X^{\varepsilon(n)}(x_2, t) \quad (n=1, \dots, N) \quad (1.8)$$

измеряемым на торце пластины при различных типах ее динамического нагружения. Каждая из задач (1.5)–(1.8) при $n=1, \dots, N$ является математической моделью одного тестового испытания и, приписывая характеристикам колебательного процесса u, M_1, M_2, M_{12} и функциям F, φ, ψ , соответствующим условиям нагружения, верхний индекс n , указывает на принадлежность данной величины к n -й задаче (n -у испытанию).

2. При проведении тестовых испытаний естественно использовать такие режимы нагружения исследуемой пластины, при которых процесс деформирования контрольной однородной изотропной пластины носил бы достаточно простой характер. Будем рассматривать для простоты только

нагрузки, вызывающие в контрольной пластине колебания вида $u^0(\mathbf{x}, t) = \sin(\alpha t) g(\mathbf{x})$, $\alpha > 0$.

Применим к соотношениям (1.5)–(1.8) оператор $(\partial_t^2 + \alpha^2 I)$, где I — единичный оператор. Это позволяет получить относительно $v = u^{e^{**}} + \alpha^2 u^e$ однородное уравнение

$$2(J_1^0 + J_2^0) \Delta \Delta v + J_p^0 v^{**} = 0 \quad (2.1)$$

а также начальные и граничные условия

$$v|_{t=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$v|_{x_1=0} = v|_{x_1=a} = v|_{x_2=0} = v|_{x_2=b} = 0 \quad (2.3)$$

$$v_{,11}|_{x_1=0} = v_{,11}|_{x_1=a} = v_{,22}|_{x_2=0} = v_{,22}|_{x_2=b} = 0$$

$$v_{,1}|_{x_1=0} = X^{e^{**}} + \alpha^2 X^e \quad (2.4)$$

Заметим, что уравнение (2.1) полностью аналогично уравнению свободных колебаний однородной изотропной пластины (хотя, конечно, в данном случае оно имеет совершенно другой физический смысл). При этом краевые условия (2.3) соответствуют условиям шарнирного опирания. Используя данную аналогию, можно (с учетом (2.2)) записать решение задачи (2.1) — (2.3) в виде

$$v = \sum_{m,h=1}^{\infty} A_{mh} \sin(\alpha_{mh} t) \sin\left(\frac{\pi m x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi k x_2}{b}\right)$$

$$\alpha_{mh} = 2\pi^2(m^2 a^{-2} + k^2 b^{-2}) ((J_1^0 + J_2^0)/J_p^0)^{1/2}$$

Коэффициенты A_{mh} могут быть однозначно определены из (2.4):

$$A_{mh} = X_{mh}^e \frac{a}{\Pi m} (\alpha^2 - \alpha_{mh}^2), \quad \alpha = \alpha_{mh}$$

$$X^e = \sum_{m,h=1}^{\infty} X_{mh}^e \sin(\alpha_{mh} t) \sin\left(\frac{\Pi k x_2}{b}\right)$$

Необходимо отметить, что вместо условий (1.8) и их следствий (2.4) можно было бы использовать другие условия, обеспечивающие единственность определения A_{mh} , например:

$$u^e|_{x_1=a/2} = X^*(x_2, t), \quad u_{,1}^e|_{x_1=a/2} = X^{**}(x_2, t) \quad (2.5)$$

Тогда коэффициенты A_{mh} определялись бы по формуле

$$A_{mh} = \begin{cases} X_{mh}^{**} (\alpha^2 - \alpha_{mh}^2) / \Pi m, & m = 2j \\ X_{mh}^{*} (\alpha^2 - \alpha_{mh}^2), & m = 2j - 1 \quad j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$X^* = \sum_{m,h=1}^{\infty} X_{mh}^* \sin(\alpha_{mh} t) \sin\left(\frac{\Pi k x_2}{b}\right),$$

$$X^{**} = \sum_{m,h=1}^{\infty} X_{mh}^{**} \sin(\alpha_{mh} t) \sin\left(\frac{\Pi k x_2}{b}\right)$$

Найдя $v(\mathbf{x}, t)$, нетрудно восстановить $u^e(\mathbf{x}, t)$ из задачи Коши:

$$u^{e^{**}} + \alpha^2 u^e = v, \quad u^e|_{t=0} = 0, \quad u_{,1}^e|_{t=0} = 0$$

В итоге получим

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\alpha t} \int_0^t e^{-2i\alpha s} \int_0^s e^{i\alpha\tau} v(x, \tau) d\tau ds \right\} \quad (i = (-1)^{1/2})$$

3. Определив $u^{(n)}(x, t)$ или хотя бы $v^{(n)}(x, t)$ нетрудно найти правые части уравнений (1.5) при $n=1, \dots, N$. Действительно, в силу (1.6) имеем

$$\begin{aligned} & \{ -J_{\rho}^e u^{(n)***} - (J_{11}^e u_{,11}^{(n)*} + J_{12}^e u_{,22}^{(n)*} + 2J_{13}^e u_{,12}^{(n)*})_{,11} - \\ & - (J_{12}^e u_{,11}^{(n)*} + J_{22}^e u_{,22}^{(n)*} + 2J_{23}^e u_{,12}^{(n)*})_{,22} - (J_{13}^e u_{,11}^{(n)*} + J_{23}^e u_{,22}^{(n)*} + \\ & + 2J_{33}^e u_{,12}^{(n)*})_{,12} \} |_{t=0} = \{ 2(J_1^0 + J_2^0) \Delta \Delta u^{(n)*} + J_{\rho}^0 u^{(n)***} \} |_{t=0} = J_{\rho}^0 v^{(n)*} |_{t=0} \end{aligned}$$

или с учетом стационарности режима колебаний контрольной пластины

$$\begin{aligned} \alpha^2 J_{\rho}^e g^{(n)} - (J_{11}^e g_{,11}^{(n)} + J_{12}^e g_{,22}^{(n)} + 2J_{13}^e g_{,12}^{(n)})_{,11} - (J_{12}^e g_{,11}^{(n)} + J_{22}^e g_{,22}^{(n)} + 2J_{23}^e g_{,12}^{(n)})_{,22} - \\ - (J_{13}^e g_{,11}^{(n)} + J_{23}^e g_{,22}^{(n)} + 2J_{33}^e g_{,12}^{(n)})_{,12} = \Phi^{(n)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Phi^{(n)} = J_{\rho}^0 \alpha^{-1} v^{(n)*} |_{t=0}$$

Заметим, что соотношения (3.1), рассматриваемые как уравнения относительно J_{ρ}^e , J_{ij}^e ($i, j=1, 2, 3$) представляют собой систему дифференциальных уравнений с частными производными и переменными коэффициентами. Сложность решения данной системы связана как с большим числом уравнений (в случае анизотропии общего вида мы имеем семь неизвестных функций, а следовательно, для их однозначного определения требуется, по крайней мере, семь уравнений), так и возможным изменением типа системы (в силу переменности коэффициентов) при переходе от одной подобласти пластины к другой. Последнее не дает возможности даже указать необходимый набор граничных условий без конкретного задания вида функций $g^{(n)}(x)$, входящих в коэффициенты уравнений. Необходимо отметить, что функции $g^{(n)}$ полностью определяются значениями $\{\varphi, \psi, Q, P, F\}^{(n)}$, то есть условиями проведения тестовых испытаний. Приведем несколько примеров серий тестовых испытаний, позволяющих после обработки экспериментально полученной информации однозначно определить искомые характеристики материала.

Пример 1. Пусть заранее известно, что материал, из которого изготовлена пластина, слабо неоднороден и ортотропен. В этом случае этап определения отклонений режима колебаний исследуемой пластины от контрольного не меняется, а на втором этапе для непосредственного определения характеристик пластины имеем вместо (3.1) соотношения относительно J_{ρ}^e , J_{11}^e , J_{12}^e , J_{22}^e , J_{33}^e :

$$\alpha_n^2 J_{\rho}^e g^{(n)} - (J_{11}^e g_{,11}^{(n)} + J_{12}^e g_{,22}^{(n)})_{,11} - (J_{12}^e g_{,11}^{(n)} + J_{22}^e g_{,22}^{(n)})_{,22} - (J_{33}^e g_{,12}^{(n)})_{,12} = \Phi^{(n)}, \quad (3.2)$$

Для упрощения задачи возьмем такие режимы нагружений в процессе проведения тестовых испытаний, чтобы

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1, & g^{(2)} &= d_2 x_1^3 + c_2 x_1^2 + b_2 x_1 + a_2 \\ g^{(3)} &= c_3 x_2^2 + b_3 x_2 + a_3, & g^{(4)} &= c_4 x_1 x_2 + b_4 x_1 + e_4 x_2 + a_4 \\ g^{(5)} &= a_5, & \alpha_n &= \alpha \quad (n=1, \dots, 5) \end{aligned}$$

После подстановки $\alpha_n, g^{(n)}$ ($n=1, \dots, 5$) в соотношения (3.2) получим уравнения с постоянными коэффициентами при производных

$$(c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1) \alpha^2 J_{\rho}^e - 2c_1 (J_{11,11}^e + J_{12,22}^e) = \Phi^{(1)} \quad (3.3)$$

$$(d_2 x_1^3 + c_2 x_1^2 + b_2 x_1 + a_2) \alpha^2 J_{\rho}^e - (6d_2 x_1 + 2c_2) (J_{11,11}^e + J_{12,22}^e) - 12d_2 J_{11,1}^e = \Phi^{(2)}$$

$$(c_3 x_2^2 + b_3 x_2 + a_3) \alpha^2 J_{\rho}^e - 2c_3 (J_{12,11}^e + J_{22,22}^e) = \Phi^{(3)}$$

$$(c_4 x_1 x_2 + b_4 x_1 + e_4 x_2 + a_4) \alpha^2 J_{\rho}^e - c_4 J_{33,12}^e = \Phi^{(4)}$$

$$a_5 \alpha^2 J_{\rho}^e = \Phi^{(5)}$$

Откуда находим

$$J_{\rho}^e = \Phi^{(5)} / \alpha^2 a_5, \quad J_{11}^e(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} G(\xi_1, x_2) d\xi_1 + J_{11}^e|_{x_1=0}$$

$$J_{12}^e(\mathbf{x}) = \int_0^{x_2} \int_0^{\eta_2} G_2(x_1, \xi_2) d\xi_2 d\eta_2 + J_{12}^e|_{x_2=0} + \\ + \frac{x_2}{b} \left\{ J_{12}^e|_{x_2=b} - J_{12}^e|_{x_2=0} - \int_0^b \int_0^{\eta} G_2(x_1, \xi_2) d\xi_2 d\eta_2 \right\}$$

$$J_{22}^e(\mathbf{x}) = \int_0^{x_2} \int_0^{\eta_2} G_3(x_1, \xi_2) d\xi_2 d\eta_2 + J_{22}^e|_{x_2=0} +$$

$$+ \frac{x_2}{b} \left\{ J_{22}^e|_{x_2=b} - J_{22}^e|_{x_2=0} - \int_0^b \int_0^{\eta_2} G_3(x_1, \xi_2) d\xi_2 d\eta_2 \right\}$$

$$J_{33}^e(x) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} G_4(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + J_{33}^e|_{x_1=0} + J_{33}^e|_{x_2=0} - J_{33}^e|_{x_1=0, x_2=0}$$

$$G_1 = \{ [\Phi^{(1)} - \alpha^2 J_{\rho}^e (c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1)] (3d_2 x_1 + c_2) -$$

$$- [\Phi^{(2)} - \alpha^2 J_{\rho}^e (d_2 x_1^3 + c_2 x_1^2 + b_2 x_1 + a_2)] c_1 \} / 24d_2 c_1 (3d_2 x_1 + c_2)$$

$$G_2 = [\alpha^2 J_{\rho}^e (c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1) - \Phi^{(1)} - 2c_1 J_{11,11}^e] / 2c_1$$

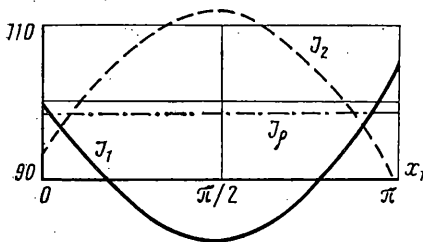
$$G_3 = [\alpha^2 J_{\rho}^e (c_3 x_2^2 + b_3 x_2 + a_3) - \Phi^{(3)} - 2c_3 J_{12,11}^e] / 2c_3$$

$$G_4 = [\alpha^2 J_{\rho}^e (c_4 x_1 x_2 + b_4 x_1 + e_4 x_2 + a_4) - \Phi^{(4)}] / c_4$$

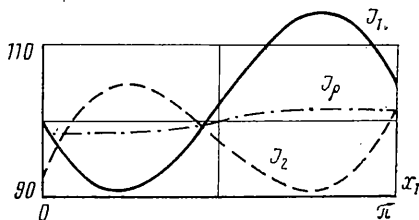
Таким образом, для однозначного определения $J_{\rho}^e, J_{11}^e, J_{22}^e, J_{12}^e, J_{33}^e$ при данных режимах нагружений в процессе тестовых испытаний потребовалось задание граничных значений искомых величин $J_{11}^e|_{x_1=0}, J_{22}^e|_{x_2=0}, J_{12}^e|_{x_2=b}, J_{12}^e|_{x_2=0}, J_{12}^e|_{x_2=b}, J_{33}^e|_{x_1=0}, J_{33}^e|_{x_2=0}$.

Пример 2. Пусть материал, из которого изготовлена пластина, слабо неоднороден, но изотропен. Тогда первый этап решения задачи диагностики не меняется, а на втором этапе вместо уравнения (3.1) относительно J_1^e, J_2^e, J_{ρ}^e имеем

$$\alpha_n^2 J_{\rho}^2 g^{(n)} - [(J_1^e + J_2^e) g_{,11}^{(n)} + J_1^e g_{,22}^{(n)}]_{,11} - [J_1^e g_{,11}^{(n)} + (J_1^e + J_2^e) g_{,22}^{(n)}]_{,22} - \\ - 2(J_2^e g_{,12}^{(n)})_{,12} = \Phi^{(n)} \quad (n=1, 2, 3) \quad (3.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Будем использовать такие режимы нагружений исследуемой пластины, чтобы

$$g^{(1)} = g^{(2)} = c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1$$

$$g^{(3)} = c_3 x_2^2 + b_3 x_2 + a_3, \quad \alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2$$

После подстановки значений $g^{(n)}$, α_n ($n=1, 2, 3$) в соотношения (3.4) получим уравнения с постоянными коэффициентами

$$\alpha_1^2 J_p^e (c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1) - c_1 (J_1^e + J_2^e)_{,11} - c_1 J_{1,22} = \Phi^{(1)}$$

$$\alpha_2^2 J_p^e (c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1) - c_1 (J_1^e + J_2^e)_{,11} - c_1 J_{1,22} = \Phi^{(2)}$$

$$\alpha_3^2 J_p^e (c_3 x_2^2 + b_3 x_2 + a_3) - c_3 (J_1^e + J_2^e)_{,22} - c_3 J_{1,11} = \Phi^{(3)}$$

которые удобно привести к виду

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) J_p^e (c_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_1) = \Phi^{(1)} - \Phi^{(2)} \quad (3.5)$$

$$\Delta (2J_1^e + J_2^e) = -(\Phi^{(2)}/c_1 + \Phi^{(3)}/c_3) +$$

$$+ \alpha_1^2 (\Phi^{(1)} - \Phi^{(2)}) / (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \alpha_1^2 J_p^e (c_3 x_2^2 + b_3 x_2 + a_3)$$

$$J_{2,11}^e - J_{2,22}^e = \Phi^{(3)}/c_3 - \Phi^{(2)}/c_1 - \alpha_1^2 (\Phi^{(1)} - \Phi^{(2)}) / (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \alpha_1^2 J_p^e (c_3 x_2^2 + b_3 x_2 + a_3)$$

Поскольку первое уравнение из (3.5) элементарно разрешается относительно J_p^e , а два последующих представляют собой двухмерное уравнение Пуассона и одномерное волновое уравнение, решение системы (3.5) не представляет трудности. При этом, для единственности решения задачи достаточно задать граничные значения $J_i^e|_{x_i=0}$, $J_i^e|_{x_i=a}$, $J_i^e|_{x_2=0}$, $J_i^e|_{x_2=b}$ ($i=1, 2$).

Пример 3. Пусть выполнены априорные предположения предыдущего примера и, кроме того, материал является неоднородным лишь в одном направлении, т. е. $\{J_p^e, J_1^e, J_2^e\} = \{J_p^e, J_1^e, J_2^e\}(x_1)$. Тогда использование нагружений, соответствующих $g^{(n)} = g^{(1)}(x_1)$ ($n=1, 2$), $g^{(3)} = g^{(3)}(x_2)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ упрощает (3.4) до соотношений вида

$$\alpha_n^2 J_p^e g^{(n)} - [(J_1^e + J_2^e) g_{,11}]_{,11} = \Phi^{(n)} \quad (n=1, 2) \quad (3.6)$$

$$\alpha_3^2 J_p^e g^{(3)} - J_{1,11}^e g_{,22}^{(3)} - (J_1^e + J_2^e) g_{,2222}^{(3)} = \Phi^{(3)}$$

которые однозначно интегрируются, если заданы значения J_1^e, J_2^e при $x_1=0$ и при $x_1=a$. Отметим, что и в этой простейшей ситуации необходимый для единственности решения задачи набор граничных условий зависит от вида $g^{(n)}$, т. е. от типа нагружений. Так, например, если $g_{,11}^{(n)} = 0$ при $x_1=0$ и при $x_1=a$, то (в силу ограниченности J_1^e, J_2^e) граничных значений J_2^e при $x_1=0$ и при $x_1=a$ задавать не надо.

Необходимо отметить, что ввиду линейности задачи определения J_{ij}^e , J_{ij}^s ($i, j=1, 2, 3$), $u^{e(n)}$ ($n=1, \dots, N$). Каждому члену разложения в гармонический ряд экспериментально полученной функции X^e (каждой гармонике, появление которой в режиме колебаний пластины обусловлено структурными несовершенствами материала) соответствует свое распределение неоднородности в пластине, причем всему ряду соответствует сумма этих неоднородностей. В связи с этим приведем результаты численных расчетов, проведенных в рамках условий примера 3 и соответствующих двум первым гармоникам. При расчетах в уравнениях проводилась обезразмеривающая замена переменных по формулам: $x_1^{\sim} = x_1/a$, $x_2^{\sim} = x_2/b$, $J_1^{\sim} = J_1/J_2^0$, $J_2^{\sim} = J_2/J_2^0$, $J_p^{\sim} = J_p/J_p^0$, $t^{\sim} = t(J_2^0/J_p^0)$, $u^{e\sim} = u^e/\|u^0\|_{c^4}$ после чего полагалось

$$a=b=\pi, \quad J_0^{0\sim}=J_2^{0\sim}=1, \quad J_p^{0\sim}=1$$

$$g^{(1)}=g^{(2)}=\sin x_1^{\sim}, \quad g^{(3)}=\sin x_2^{\sim}, \quad \alpha_1=\alpha_3=1, \quad \alpha_2=2$$

$$X^{(2)\sim}=X^{(3)\sim}=0, \quad J_1^{e\sim}(0)=0, \quad J_1^{e\sim}(a)=0,05$$

На фиг. 1 и 2 приведены в процентах к соответствующим параметрам контрольной пластины полученные характеристики пластины J_1 , J_2 , J_p при $X^{(1)\sim}=0,05 \sin(\alpha_{11}t^{\sim}) \sin x_2^{\sim}$ и при $X^{(1)\sim}=0,1 \sin(\alpha_{21}t^{\sim}) \sin x_2^{\sim}$, соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломазов В. А., Немировский Ю. В. Математическая модель проблемы диагностики термоупругой среды // ПММ. 1986. Т. 50, № 2. С. 284-292.
2. Ломазов В. А., Немировский Ю. В. Задача диагностики упругой слоистой среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 82-87.
3. Бернштейн М. Л., Займовский В. А. Механические свойства металлов. М.: Металлургия, 1979. 496 с.
4. Лившиц Б. Г., Крапошин В. С., Линецкий Д. Я. Физические свойства металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1980. 320 с.
5. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
6. Конобеевский С. Т. Действие облучения на материалы. М.: Атомиздат, 1967. 401 с.

Красноярск

Поступила в редакцию
5.XI.1988