

УДК 539.375

© 1991 г.

В. В. ТВАРДОВСКИЙ

## К ТЕОРИИ ПСЕВДОМАКРОТРЕЩИН В АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ.

### II. РАВНОВЕСИЕ МАКРО- И ПСЕВДОМАКРОТРЕЩИН

Данная публикация представляет непосредственное продолжение [1]. Термин «псевдомакротрещина» введен для краткости и обозначает обычную макротрещину с взаимодействующими по определенному закону берегами и, следовательно, способными передавать нагрузку.

1. Обозначим компоненту разрыва перемещений берегов макротрещины  $[v_j(\mathbf{x})]$ , а вектор усилий, действующий на поверхности  $\Omega$ , совпадающей с поверхностью макротрещины, —  $\sigma_{ni}(\mathbf{x})$ . Ниже будет рассмотрен лишь линейный закон взаимодействия берегов трещины, когда между усилиями, передаваемыми с берега на берег, и разрывом перемещений имеет место линейная зависимость

$$\sigma_{ni}^{\pm}(\mathbf{x}) = k_{ij}[v_j(\mathbf{x})] \quad (1.1)$$

где  $k_{ij}$  — симметричный тензор. При наличии плоскостей симметрии, нормальных осям координат, и совпадении псевдомакротрещины с координатной плоскостью тензор  $k_{ij}$  принимает диагональный вид  $k_{ij}\delta_{ij}$  с неотрицательными диагональными членами.

Изменение упругой энергии тела  $\Delta W$ , связанное с введением псевдомакротрещины, легко вычислить по формуле

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ni}(\mathbf{x})[v_i(\mathbf{x})] d\mathbf{x} \quad (1.2)$$

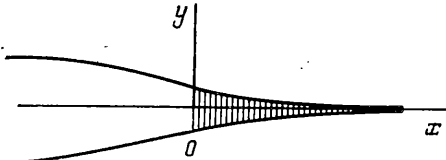
Подстановка в (1.2) соотношений (1.1) приводит  $\Delta W$  к удобному для использования виду

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k_{ij}[v_i(\mathbf{x})][v_j(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k_{ij}^{-1} \sigma_{ni}(\mathbf{x})\sigma_{nj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.3)$$

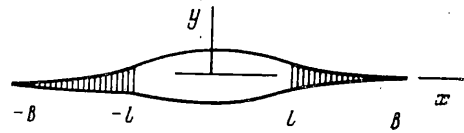
В [1] было показано, что для одиночной псевдомакротрещины в условиях плоской деформации при действии на бесконечности однородного растягивающего поля напряжений  $\sigma_{ny}(x)$  совпадает с  $p$  везде, за исключением малых зон вблизи края псевдомакротрещины, если выполнено условие

$$k_2 l \gg E_y \quad (1.4)$$

Здесь  $E_y$  — модуль Юнга материала в направлении оси  $y$ , а  $l$  — характерный размер псевдомакротрещины. Аналогичные результаты при выполнении условий, соответствующих (1.4) ( $k_1 l \gg G_{xy}$ ;  $k_3 l \gg G_{yz}$ ), справедливы и для псевдомакротрещины, помещенной в поле однородных сдвиговых напряжений. Тогда изменение упругой энергии  $\Delta W$  тела, данное форму-



Фиг. 1



Фиг. 2

лой (1.3), преобразуется к виду

$$\Delta W \approx \frac{1}{2} k_{ij}^{-1} \sigma_{ni} \sigma_{nj} \Sigma$$

где  $k_{ij}^{-1}$  — тензор, обратный  $k_{ij}$ , а  $\Sigma$  — площадь поверхности  $\Omega$ .

Основным вопросом, на который призвана ответить предлагаемая работа, является вопрос об «отклике» псевдомакротрещины на неоднородное внешнее поле напряжений. Это тем более важно, поскольку часто псевдомакротрещины образуются вблизи концентраторов напряжений или «испускаются» макротрещинами. Для достижения поставленной цели рассматриваются задачи взаимодействия псевдомакротрещины с макротрещиной в условиях плоской деформации. Вначале анализируется модельная задача о полубесконечной макротрещине, испускающей из своего конца полубесконечную псевдомакротрещину. Находится асимптотика напряжений в окрестности вершины макротрещины и на основе этой асимптотики формулируется критерий страгивания макротрещины (т. е. начала разрушения связей псевдомакротрещины). Далее рассмотрена задача о равновесии макротрещины конечной длины, испускающей из своих концов псевдомакротрещины. Показано, что в этих условиях псевдомакротрещины могут подрастать устойчивым образом до тех пор, пока нагрузка не достигнет критической величины.

2. Рассмотрим задачу о полубесконечной макротрещине, испускающей из своего конца полубесконечную псевдомакротрещину в бесконечном анизотропном пространстве (см. фиг. 1). Анализ проведем в условиях плоской деформации ( $\partial/\partial z=0$ ). Будем считать материал тела ортотропным, а плоскость трещины совпадающей с плоскостью упругой симметрии  $xz$ . Ограничимся случаем симметричного напряженно-деформированного состояния:  $v_y(x, y) = -v_y(x, -y)$ ,  $v_x(x, y) = v_x(x, -y)$ . Тогда задачу можно решать отдельно для верхнего или нижнего полупространства. Для определенности рассмотрим область  $y < 0$ . На берегах макротрещины, занимающей область  $y=0, x < 0$ , заданы условия отсутствия усилий

$$\sigma_y^-(x) = 0; \quad \sigma_{xy}^-(x) = 0 \quad (x < 0) \quad (2.1)$$

В силу симметрии касательные напряжения на берегах псевдомакротрещины отсутствуют, а из равенства  $v_y^+(x) = -v_y^-(x)$  и закона связи (1.1) следует

$$\sigma_y^-(x) = -2kv^-(x); \quad \sigma_{xy}^-(x) = 0 \quad (x > 0) \quad (2.2)$$

индекс 2 у константы  $k$  опущен. На бесконечности напряжения затухают так что

$$v_y^-(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (2.3)$$

Введем две аналитические функции  $\phi_1(z_1)$ ,  $\phi_2(z_2)$  комплексных переменных  $z_r = x + \mu_r y$  ( $r=1, 2$ ), где  $\mu_1, \mu_2$  — неравные корни характеристического уравнения [2] с положительной мнимой частью. Представим, соглас-

но [2], напряжения и перемещения в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2 \operatorname{Re}(\mu_1^2 \Phi_1(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2(z_2)), \quad \sigma_y = 2 \operatorname{Re}(\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)) \\ \sigma_{xy} &= -2 \operatorname{Re}(\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)), \quad v_x = 2 \operatorname{Re}(p_1 \Phi_1(z_1) + p_2 \Phi_2(z_2)) \\ v_y &= 2 \operatorname{Re}(g_1 \Phi_1(z_1) + g_2 \Phi_2(z_2))\end{aligned}\quad (2.4)$$

где  $p_r, q_r$  — комплексные параметры [2], а  $\Phi_r(z_r) \equiv \Phi_r'(z_r)$  ( $r=1, 2$ ).

Будем искать функции  $\Phi_r(z)$  в виде интегралов типа Коши

$$\Phi_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\mu_i p(x)}{\mu_r - \mu_i} \frac{dx}{x-z}, \quad \operatorname{Im}(z) < 0 \quad (2.5)$$

Здесь и ниже индексы  $r$  и  $t$  пробегают значения 1 и 2 и альтернируют друг с другом: если  $r=1$ , то  $t=2$ , и наоборот; суммирование по ним не производится. Плотность  $p(x)$  потенциалов  $\Phi_1, \Phi_2$  есть неизвестная действительная функция

$$\operatorname{Im}(p(x)) = 0 \quad (2.6)$$

подлежащая определению. Вычислим  $\sigma_y^-(x)$  при  $x < 0$ . С помощью (2.4) — (2.6) получаем

$$\sigma_y^-(x) = -2 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - x} \right) \equiv 0$$

что удовлетворяет первое граничное условие в (2.1). Представления (2.5), (2.6) тождественно обращают  $\sigma_{xy}^-(x)$  в нуль при  $y=0, x < 0$ . Действительно

$$\sigma_{xy}^-(x) = -2 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - x} \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \right) \right) \equiv 0$$

Определим усилия на псевдомакротрещине,  $x > 0$ . Из (2.4) следует

$$\begin{aligned}\sigma_y^-(x) &= 2 \operatorname{Re}(\Phi_1^-(x) + \Phi_2^-(x)), \\ \sigma_{xy}^-(x) &= -2 \operatorname{Re}(\mu_1 \Phi_1^-(x) + \mu_2 \Phi_2^-(x))\end{aligned}\quad (2.7)$$

Использование формул Сохоцкого — Племяля [3] применительно к (2.7) позволяет получить

$$\sigma_y^-(x) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \right) \left( -\frac{p(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - x} \right) \right\} \equiv p(x)$$

$$\sigma_{xy}^-(x) = -2 \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \right) \left( -\frac{p(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{p(\xi) d\xi}{\xi - x} \right) \right\} \equiv 0$$

Итак, представления (2.5), (2.6) удовлетворяют всем граничным условиям (2.1) и второму условию (2.2). Плотность потенциалов  $p(x)$  есть нормальное усилие, передаваемое с берега на берег псевдомакротрещины

$$\sigma_y^-(x) = p(x) \quad (x > 0) \quad (2.8)$$

Первое условие (2.2) дифференцированием по  $x$  преобразуем к виду

$$\partial \sigma_y^-(x) / \partial x = -2k \partial v_y^-(x) / \partial x \quad (x > 0) \quad (2.9)$$

Такая замена правомочна, поскольку функция  $v_y^-(x)$  определена с точностью до константы, которая должна быть найдена из условия (2.3). Учитывая, что

$$\operatorname{Re}\left(i \frac{q_1 \mu_2 - q_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right) = \frac{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}}{2E_y} \kappa, \quad \kappa = \operatorname{Re}\left(i \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}\right)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{q_1 \mu_2 - q_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right) = 0$$

где  $E_y, \nu_{ij}$  — технические константы упругости материала, найдем для  $x > 0$ :

$$\partial v_y^-(x) / \partial x = -\operatorname{Re}(q_1 \Phi_1^-(x) + q_2 \Phi_2^-(x))$$

что с использованием формул Сохоцкого — Племеля дает

$$\frac{\partial v_y^-(x)}{\partial x} = \kappa \frac{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}}{2E_y \pi} \int_0^{+\infty} \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (2.10)$$

Подставляя выражения (2.8), (2.10) в (2.9), получаем сингулярное интегродифференциальное уравнение на функцию  $p(x)$ :

$$p'(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = 0 \quad (2.11)$$

Здесь  $\lambda = \lambda_2 = \kappa(1 - \nu_{yz} \nu_{zy})k/E_y$  — параметр связи, имеющий размерность обратной длины. Величина  $\lambda^{-1}$  по порядку совпадает с характерным размером структуры материала [4]. Интегрирование уравнения по  $x$  от 0 до  $x$  преобразует его в интегральное уравнение Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром и неизвестной константой интегрирования

$$p(x) = p(0) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{+\infty} p(t) \ln \left| 1 - \frac{x}{t} \right| dt \quad (2.12)$$

Константа  $p(0)$  должна быть определена после решения (2.12) из условия (2.3) или эквивалентного ему условия  $p(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Уравнение (2.12) может быть решено численно, но анализ получающихся при этом результатов затруднителен. Поэтому исследуем непосредственно уравнение (2.11).

Применение свойств интегралов типа Коши вблизи концов линии интегрирования [3] позволяет сделать следующие выводы. Функция  $p(x)$  (следовательно, и разрыв перемещений  $[v_y(x)]$ ) при  $x \rightarrow +0$  ограничена

$$p(x) = p(0) + O(x \ln(\lambda x)) \quad (2.13)$$

Производная функции  $p(x)$  при  $x \rightarrow +0$  имеет логарифмическую особенность

$$p'(x) = (\alpha/\pi) p(0) \ln(\lambda x) + O(1) \quad (2.14)$$

Таким образом, псевдомакротрещина, исходящая из вершины макротрещины, устраняет корневую особенность напряжений у ее кончика и «смягчает» напряженно-деформированное состояние в зоне порядка  $\lambda^{-1}$ .

Ниже для анализа интегродифференциального уравнения (2.11) используется в общих чертах метод [4]. Применяя к (2.11) формулу обращения интеграла Коши [3] с учетом (2.13), получим

$$p(x) = \frac{x^{1/2}}{\pi \lambda} \int_0^{+\infty} \frac{p'(\xi) d\xi}{\xi^{1/2}(\xi - x)} \quad (2.15)$$

Преобразуем (2.15) к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{p'(\xi)}{\xi-x} d\xi = \lambda p(x) - \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} R(\xi, x) \frac{p'(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad (2.16)$$

где  $R(\xi, x) = \xi^{-1/2} - x^{-1/2}$ . Дифференцирование (2.14) по  $x$  и последующее интегрирование по частям дают

$$p''(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{p'(\xi)}{\xi-x} d\xi = \lambda \frac{p(0)}{\pi x} \quad (2.17)$$

Комбинируя (2.16), (2.17), получим

$$p''(x) + \lambda^2 p(x) = \lambda f(x), \quad f(x) = \frac{p(0)}{\pi x} + \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} R(\xi, x) \frac{p'(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad (2.18)$$

Рассматривая уравнение (2.18) как обыкновенное дифференциальное с известной правой частью  $\lambda f(x)$ , найдем, что его решение, исчезающее на бесконечности, дается формулой

$$p(x) = \int_x^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda(\xi-x) d\xi$$

которая с учетом вида функции  $f(x)$  приводится к интегральному уравнению

$$p(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} K(t, x) p'(t) dt = \frac{p(0)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{x+\xi} d\xi \quad (2.19)$$

$$K(t, x) = t^{-1/2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \xi}{t^{1/2} + (\xi+x)^{1/2}} d\xi$$

с ядром, регулярным для всех  $x \geq 0$ ,  $t > 0$  (при  $t \rightarrow 0$  оно имеет корневую особенность). Уравнение (2.19) более удобно для анализа и численной реализации, чем (2.11) и (2.12), в частности легко построить алгоритм отыскания решения при  $x \gg \lambda^{-1}$  методом последовательных приближений.

Используя асимптотические свойства Фурье-преобразования [5], трудно получить асимптотику  $p(x)$  для  $x \gg \lambda^{-1}$ :

$$p(x) = K_I (2\lambda x)^{-1/2} + p(0) O(\ln(\lambda x) / (\lambda x)^{1/2}) \quad (2.20)$$

причем для коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  можно найти

$$K_I = p(0) / \lambda^{1/2} \quad (2.21)$$

Таким образом, на расстояниях  $r \gg \lambda^{-1}$  от конца макротрещины имеет место обычная асимптотика напряжений. Заметим, что этот результат, полученный для рассматриваемой модельной задачи (в отличие от «ближней асимптотики» (2.13)–(2.14)), может не иметь места для произвольной конфигурации. Это ясно из того факта, что, вообще говоря, не существует радиуса обрезания второго слагаемого в (2.20) и оно на расстояниях характерных размеров задачи может оказаться сравнимым с первым.

Критический коэффициент интенсивности напряжений  $K_I^*$ , при котором возможно увеличение длины макротрещины, определяется с помощью интеграла Эшелби – Черепанова – Райса, взятого по замкнутому беско-

нечно удаленному контуру  $\Gamma$ :

$$J = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial v_i}{\partial x} d\Gamma \right) \quad (2.22)$$

окружающему вершину макротрещины. Поскольку на линии псевдомакротрещины существует разрыв перемещений  $[v_y(x)]$  и при продвижении кончика макротрещины на этом разрыве совершается работа, постольку интеграл (2.22) не является инвариантным, если линия интегрирования  $\Gamma$  пересекает линию псевдомакротрещины. Этим объясняется требование использования бесконечно удаленного контура. При устремлении контура  $\Gamma$  к бесконечности существует конечный предел интеграла (2.22), приравнявая который величине удельной диссипации энергии  $2\gamma_c$  при продвижении кончика макротрещины, получим критическое значение  $K_I$ :

$$K_I^* = (4\gamma_c E_y / (\kappa(1 - \nu_{zy}\nu_{zy})))^{1/2} \quad (2.23)$$

Как было отмечено выше, не во всех задачах, рассматривающих равновесие макротрещины, испускающей из своего кончика псевдомакротрещину, возможно выделить асимптотику  $K_I(2\pi x)^{-1/2}$ . Поэтому имеет смысл перейти от критерия Ирвина  $K_I = K_I^*$  к критерию Леонова — Панасюка и определить критическое раскрытие  $[v]$  в вершине макротрещины. В отличие от  $K_I$  величина  $[v_y(0)]$  во всех рассматриваемых задачах однозначно определяется в ходе решения. В силу линейности уравнений упругости и закона связи (1.1) величина  $[v]^*$  — критическое значение  $[v_y(0)]$  — определяется из (2.21), (2.23):

$$[v_y(0)] = [v]^* = (4\gamma_c / k_2)^{1/2} \quad (2.24)$$

Заметим, что критерий (2.24) может быть выведен с помощью энергетического условия  $\delta\Delta W + 2\gamma_c \delta l = 0$ , где  $\delta\Delta W$  — вариация изменения упругой энергии системы при виртуальном увеличении длины макротрещины на  $\delta l$ .

3. Ниже рассматривается аналог упругопластической задачи Дагдейла для макротрещины, занимающей область  $|x| \leq l$  оси  $x$  и испускающей псевдомакротрещины размеров  $b-l$  (фиг. 2). Как и в [1], будем считать выполненными условия  $\Delta l \gg 1$ ,  $\lambda(b-l) \gg 1$ . На бесконечности задано однородное поле растягивающих напряжений  $\sigma_y^\infty = p_\infty$ ,  $\sigma_{xy}^\infty = \sigma_x^\infty = 0$ . Напряжения и перемещения выражаются через два комплексных потенциала Лехницкого, которые здесь удобно принять в виде

$$\varphi_r(z_r) = \Gamma_r z_r + \frac{\mu_l}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{q(x)}{\mu_l - \mu_r} \frac{dx}{x - z_r} \quad (3.1)$$

$\Gamma_r$  — константы, определяющие поле на бесконечности, а  $q(x)$  — непрерывная функция, подлежащая определению. На берегах макротрещины отсутствуют усилия

$$\sigma_y^\pm(x) = 0; \quad \sigma_{xy}^\pm(x) = 0 \quad (|x| < l) \quad (3.2)$$

На берегах псевдомакротрещин заданы условия связи (1.1):

$$\sigma_y^\pm(x) = k[v_y(x)]; \quad \sigma_{xy}^\pm(x) = 0 \quad (l < |x| < b) \quad (3.3)$$

На остальной части оси  $x$  в силу симметрии выполнено

$$\sigma_{xy}^\pm(x) = 0, \quad v_y(x) = 0 \quad (|x| > b) \quad (3.4)$$

Потребуем

$$\text{Im}(q(x)) = 0 \quad (3.5)$$

и покажем, что при этом условия (3.4) выполняются тождественно. Действительно, по формулам Сохоцкого — Племеля [3] легко найти с помощью (2.4), (3.1), (3.5):

$$[v_y(x)] = 2 \operatorname{Re} \left( i \frac{\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2}{\mu_2 - \mu_1} q(x) \right) = 2\kappa \frac{1 - \nu_{yz} \nu_{zy}}{E_y} q(x), \quad (|x| < b)$$

$$[v_y(x)] = 0 \quad (|x| > b) \quad (3.6)$$

Таким образом,  $q(x)$  пропорциональна разрыву перемещений  $[v_y(x)]$ . В силу второго тождества в (3.6) для выполнения условия  $v_y(x) = 0$  в (3.4) достаточно показать, что  $v_y^+(x) + v_y^-(x) = 0$  для  $|x| > b$ . Имеем

$$v_y^+(x) + v_y^-(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{q(\xi)}{\xi - x} d\xi \operatorname{Re} \left( \frac{\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2}{\mu_2 - \mu_1} \right) \equiv 0$$

Аналогично может быть показано, что представления (3.1) зануляют выражения для  $\sigma_{xy}^{\pm}(x)$  на всей оси  $x$ . Условия непрерывности перемещений при обходе по любому замкнутому контуру, целиком охватывающему разрез  $[-b, b]$ , с необходимостью ведут к граничным условиям на функцию  $q(x)$ :

$$q(-b) = q(b) = 0 \quad (3.7)$$

Тогда комплексные потенциалы  $\Phi_r(z_r)$  легко получаются из (3.1) дифференцированием и последующим интегрированием по частям

$$\Phi_r(z_r) = \Gamma_r + \frac{\mu_l}{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{q'(x)}{\mu_l - \mu_r} \frac{dx}{x - z_r} \quad (3.8)$$

Представления (3.8) позволяют получить распределение нормальных напряжений на оси  $x$ :

$$\sigma_y^+(x) = \sigma_y^-(x) = p_{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{q'(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (3.9)$$

Для внутренних точек отрезка  $[-b, b]$  интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Удовлетворяя оставшимся граничным условиям в (3.2), (3.3) с помощью (3.6), (3.9), получаем сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$p_{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{q'(\xi)}{\xi - x} d\xi = \begin{cases} 0 & (|x| < l) \\ \lambda q(x) & (l < |x| < b) \end{cases} \quad (3.10)$$

Приближенное решение задачи (3.10), (3.7) можно представить в виде

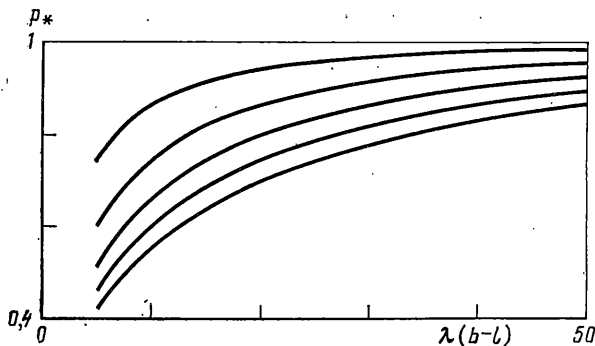
$$q(x) \simeq q(l) + p_{\infty} (l^2 - x^2)^{1/2} \quad (|x| \leq l - \lambda^{-1}) \quad (3.11)$$

$$q(x) \simeq \lambda^{-1} p_{\infty} x (l^2 - x^2)^{-1/2} \quad (l + \lambda^{-1} \leq |x| \leq b - \lambda^{-1}) \quad (3.12)$$

Вблизи вершины макротрещины выражение (3.12) должно быть обрвано на расстояниях  $\propto \lambda^{-1}$  и, согласно (2.12), имеет вид

$$q(x) = q(l) + O((x-l) \ln(\lambda x - \lambda l)) \quad (l < |x| \leq l + \lambda^{-1})$$

$$q(l) \simeq p_{\infty} (\pi l / \lambda)^{1/2}$$



Фиг. 3

Вблизи концов псевдомакротрещин ( $b - \lambda^{-1} \leq |x| < b$ ) выражение для  $q(x)$  в соответствии с (3.7) и результатами [1] может быть представлено в форме

$$q(x) = K_I (2(b - |x|)/\pi)^{1/2} + O((b^2 - x^2)^{1/2}); \quad K_I \approx P_\infty b (2/\lambda(b^2 - l^2))^{1/2}$$

Заметим, что решение задачи (3.40) существенно отличается от решений задач Панасюка — Леонова [6, 7] и Дагдейла [8].

Изменение упругой энергии  $\Delta W$ , связанное с введением в систему рассматриваемого макродефекта, легко найти по формуле

$$\Delta W(l, b) = \frac{1}{2} \int_{-l}^l p_\infty [v_y(x)] dx + \int_l^b \sigma_y(x) [v_y(x)] dx \quad (3.13)$$

Критерий страгивания концов псевдомакротрещины можно вывести из энергетического баланса типа Гриффитса

$$\delta_b A = \delta_b W + 4\gamma_p \delta b \quad (3.14)$$

где  $\delta_b \equiv \delta b (\partial/\partial b)$ ,  $2\gamma_p$  — удельная диссипация энергии при продвижении концов псевдомакротрещины, а  $\delta_b A$  и  $\delta_b W$  — вариации работы внешних сил и упругой энергии при виртуальном увеличении длины псевдомакротрещины на величину  $\delta b$ . Подставляя (3.13) в (3.14), получаем с учетом  $\delta A = 2\delta W$  критические нагрузки  $\sigma_p^*$ , при которых возможно развитие псевдомакротрещин

$$\sigma_p^* = \left[ \frac{2E_y \gamma_p \lambda}{\kappa (1 - \nu_{yz} \nu_{zy})} \left( 1 - \frac{l^2}{b^2} \right) \right]^{1/2}$$

На фиг. 3 приведены зависимости безразмерных критических напряжений  $p_* = \sigma_p^*/\sigma_0^*$  от длины псевдомакротрещины  $\lambda(b-l)$  для  $\lambda l = 10, 20, 30, 40, 50$  (кривые 1–5). Видно, что при увеличении внешней нагрузки и фиксированной длине макротрещины  $2l$  псевдомакротрещины у ее концов растут устойчиво вплоть до величины  $\sigma_y^\infty = \sigma_0^*$ . Согласно [1], при внешних напряжениях

$$p_\infty \geq \sigma_0^* \equiv (2E_y \gamma_p \lambda / (\kappa (1 - \nu_{yz} \nu_{zy})))^{1/2} \quad (3.15)$$

происходит неограниченный рост псевдомакротрещин.

Условия страгивания макротрещины при неподвижных концах псевдомакротрещин получим из аналогичного энергетического условия

$$\delta_l A = \delta_l W + 4\gamma_c \delta l \quad (3.16)$$

Здесь  $\delta_l \equiv \delta l (\partial/\partial l)$ , а  $2(\gamma_c + \gamma_p)$  — удельная работа разрушения материала. Расчет по формуле (3.16) показывает, что критическая нагрузка  $\sigma_c^*$ , при ко-



торой возможно продвижение макротрещины, практически не зависит (при условии  $\lambda(b-l) \gg 1$ ) от величины псевдомакротрещин и может быть определена из (2.24):

$$\sigma_c^* = (4E_y \gamma_c / (\pi l k (1 - \nu_{yz} \nu_{zy})))^{1/2} \quad (3.17)$$

Сравнивая (3.17) и (3.15), легко заключаем, что если  $\sigma_c^* > \sigma_0^*$ , т. е. если начальная длина макротрещины меньше критической длины  $2l_0 = 4\gamma_c / (\pi \lambda \gamma_p)$ , то при увеличении внешних напряжений  $\sigma_y^\infty$  от нуля до  $\sigma_0^*$  происходит устойчивый рост псевдомакротрещин. При  $\sigma_y^\infty = \sigma_0^*$  происходит неустойчивое распространение псевдомакротрещин до бесконечности. Если длина макротрещины больше критической:  $l > l_0$  (и, следовательно,  $\sigma_c^* < \sigma_0^*$ ), то при достижении внешней нагрузки  $\sigma_y^\infty$  величины  $\sigma_c^*$  возможно совместное подрастание макро- и псевдомакротрещин. Такая возможность определяется возможностью выполнения вариационного условия

$$\delta A = \delta W + 4\gamma_c \delta l + 4\gamma_p \delta b \quad (3.18)$$

Можно показать, что при  $\lambda l \gg 1$ ,  $\lambda(b-l) \gg 1$  критические напряжения  $\sigma^*$ , полученные из (3.18), совпадают с (3.17).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Твардовский В. В. К теории псевдомакротрещин в анизотропном теле. I. Одиночная псевдомакротрещина // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 120–128.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Газов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Магнарадзе Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета // Сообщ. АН ГССР. 1942. Т. 3. № 6. С. 503–508.
5. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
6. Панасюк В. В. К теории распространения трещин при деформации хрупкого тела // Докл. АН УССР. 1960. № 9. С. 1185–1189.
7. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения // ПМТФ. 1961. № 3. С. 85–92.
8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.

Москва

Поступила в редакцию  
28.XII.1988