

УДК 539.3

© 1991 г.

Н. К. АХМЕДОВ, Ю. А. УСТИНОВ

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В СЛОИСТОМ ЦИЛИНДРЕ

В [1, 2] показано, что спектр однородных решений для слоистых тел с чередующимися жесткими и мягкими слоями делится на «нижнюю» и «верхнюю» части, при этом нижней части спектра всегда соответствует некоторая прикладная теория, которая в задачах статики учитывает слабо затухающие пограничные решения. В настоящей работе метод указанных работ обобщается на задачи стационарных крутильных колебаний радиально-неоднородного цилиндра с чередующимися жесткими и мягкими слоями, дается обобщение на динамический случай прикладной теории, построенной в [2]. Вместе с этим получено обобщение принципа Мандельштама на резонансный случай и дана корректная постановка задач для неограниченного и полуограниченного цилиндра, как в случае трехмерной задачи, так и в рамках прикладной теории.

1. Рассмотрим стационарные крутильные колебания радиально-неоднородного цилиндра, состоящего из чередующихся жестких и мягких слоев числом $n=2r-1$. Будем считать, что внутренний и внешний слой — жесткие. Каждый жесткий слой пометим индексом $j=1, 2, \dots, r$, а мягкий — индексом $i=1, 2, \dots, r-1$ (порядок нумерации — от центра цилиндра). Для простоты примем, что механические свойства всех жестких и мягких слоев — одинаковые. Модули сдвига $G_j=G_n$, $G_i=G_1$, плотности $m_j=m_n$, $m_i=m_1$. Внутренний радиус k -слоя обозначим через r_{0k} , внешний — через r_{1k} . Отнесем область S , занятую цилиндром, к цилиндрической системе координат r, θ, z . Введем безразмерные координаты $\rho=r/r_1$, $\xi=z/r_1$, $r_1=r_{1n}$.

Уравнение стационарных крутильных колебаний можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[t_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \right) \right] + \frac{2t_1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \right) + t_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + t_2 \Omega^2 u = 0 \quad (1.1)$$

Здесь u — амплитуда компоненты вектора смещений;

$$t_1(\rho) = \begin{cases} 1; & \rho \in [\rho_{0j}, \rho_{1j}] \\ p; & \rho \in [\rho_{0i}, \rho_{1i}] \end{cases}$$

$$t_2(\rho) = \begin{cases} 1; & \rho \in [\rho_{0j}, \rho_{1j}] \\ \theta_*; & \rho \in [\rho_{0i}, \rho_{1i}] \end{cases}$$

$$p_{0k} = r_{0k}/r_1, \quad p_{1k} = r_{1k}/r_1, \quad p = G_1/G_n$$

$$\Omega^2 = m_n r_1^2 \omega^2 / G_n, \quad \theta_* = m_i / m_n$$

Предполагая, что боковые поверхности свободны от напряжений и полагая в (1.1) $u = v(\rho) e^{i\alpha \xi}$, получим спектральную задачу

$$L(\alpha^2; \Omega^2)v = -[t_1(v' - v/\rho)]' - 2t_1/\rho(v' - v/\rho) - (t_2\Omega^2 - t_1\alpha^2)v = 0 \quad (1.2)$$

$$v' - v/\rho = 0 \quad \text{при } \rho = \rho_0, 1$$

Известно, что при всяком вещественном Ω спектральная задача (1.2) имеет конечное число вещественных собственных значений $\alpha_s = \alpha_s(\Omega)$, $s = \pm 1, \dots, \pm q$ и счетное множество чисто мнимых собственных значений $\alpha_t = i\beta_t(\Omega)$, $t = \pm(q+1), \dots$ где $q \geq 1$ и зависит от Ω . Каждому простому собственному значению α_n соответствует элементарное решение $u_n = v_n(\rho) e^{i\alpha_n z}$. Собственным значениям α_s соответствуют однородные волны, распространяющиеся вдоль оси цилиндра, мнимым собственным значениям α_t — неоднородные волны, которые описывают динамический краевой эффект, локализованный либо у торцов цилиндра, либо у поверхности сопряжения, если рассматриваются задачи о распространении волны в продольно-неоднородном цилиндре.

Обратимся к исследованию вещественных дисперсионных множеств $\alpha_s(\Omega)$, или в виде обратной функциональной зависимости $\Omega_s(\alpha)$. Известно [3], что кривая $\Omega_s(\alpha)$ определена для всех вещественных α и симметрична относительно прямой $\alpha = 0$.

Для численного построения кривых необходимо 1) идентифицировать каждую кривую, 2) найти возможные асимптотики этих кривых при $\alpha, \Omega \rightarrow \infty$, при условии, что $\lim \Omega/\alpha = v_*$ — некоторая конечная величина ($v_* = c/c_h$ — безразмерная фазовая скорость, где $c_h = (G_n/m_h)^{1/2}$ — скорость SP волн в жестком слое).

Идентификацию каждой кривой проведем на основе теории возмущений [4] при малых значениях волнового числа α .

Исследуем вначале предельную задачу, положив в уравнении (1.2) $\alpha = 0$. В результате получаем задачу на собственные значения со спектральным параметром $\lambda = \Omega^2$. Эта задача эквивалентна задаче, рассмотренной в [2] при исследовании структуры краевого эффекта в задаче кручения радиально-неоднородного цилиндра. Сформулируем результаты.

Теорема: Спектр задачи (1.2) при $\alpha = 0$ является счетным вещественным множеством и представляется в виде $\Lambda(p) = \Lambda_-(p) \cup \Lambda_+^{(1)}(p) \cup \Lambda_+^{(2)}(p)$:

1. $\Lambda_-(p)$ состоит из двукратного собственного значения $\Omega = 0$ и из $2(r-1)$ собственных значений вида

$$\Omega_i = p^{1/2} \eta_i + O(p^{3/2}) \quad (1.3)$$

где η_i — ненулевые собственные значения однородной яковиевой алгебраической системы

$$CX - \eta^2 BX = 0, \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_r)^T, \quad B = \text{diag} \|b_{jj}\| \quad (1.4)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_{11} & c_{11} + c_{22} & -c_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{rr} & c_{rr} \end{pmatrix}$$

$$b_{jj} = (\rho_{1j}^4 - \rho_{0j}^4)/4, \quad c_{jj} = 2\rho_{1j}^2 \rho_{0j+1}^2 / (\rho_{0j+1}^2 - \rho_{1j}^2)$$

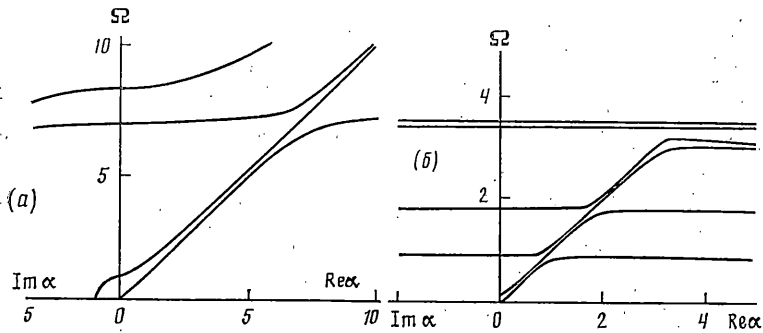
2. $\Lambda_+^{(1)}(p)$ состоит из r множеств собственных значений вида $\Omega_{jt} = \Omega_{j10} + O(p^6)$, где Ω_{j10} — корень уравнения

$$L_{00}^{(j)}(\Omega) - 2L_{01}^{(j)}(\Omega)/\Omega\rho_{1j} - 2L_{10}^{(j)}(\Omega)/\Omega\rho_{0j} + 4L_{11}^{(j)}(\Omega)/\Omega^2\rho_{0j}\rho_{1j} = 0 \quad (1.5)$$

3. $\Lambda_+^{(2)}(p)$ состоит из $r-1$ множеств собственных значений вида $\Omega_{it} = \Omega_{i10} + O(p^6)$, где Ω_{i10} — корень уравнения

$$L_{11}^{(i)}(\theta\Omega/p) = 0 \quad (1.6)$$

Здесь $L_{nm}^{(k)}(q) = J_n(q\rho_{0k})Y_m(q\rho_{1k}) - J_m(q\rho_{1k})Y_n(q\rho_{0k})$, J_m , Y_m — функции Бесселя первого и второго родов, соответственно; а величина δ определяется следующим образом: $\delta = 1$, если а) среди корней уравнений (1.5) и (1.6) нет одинаковых, б) среди корней (1.5), (1.6) есть одинаковые, но



при условии, что $i \neq j+1$, $i \neq j-1$, $\delta = 1/2$ если при $i=j+1$ или $i=j-1$ соответствующие уравнения имеют хотя бы пару одинаковых корней.

Из теоремы видно, что при малых p имеет место расслоение спектра собственных частот на «низшую» и «высшую» части. Это расслоение тем ярче выражено, чем больше разность $M-m$, где $M = \inf \Omega_{hi}$; $m = \sup p^{1/2} \eta_i$

Собственные функции, соответствующие $\Lambda_-(p)$, имеют вид

$$v_i = D_i(v_{i0}(\rho) + O(p)) \quad (1.7)$$

$$v_{j0} = \rho X_{ji}$$

$$v_{i0} = (\rho_{i1}^2 - \rho_{oi}^2)^{-1} [X_{i+1, i} \rho_{i1}^2 (\rho - \rho_{oi}^2 / \rho) - X_{ii} \rho_{oi}^2 (\rho - \rho_{i1}^2 / \rho)]$$

Здесь D_i — нормирующий множитель. Каждой резонансной частоте Ω_s , для которой $\alpha_s = 0$ является двукратным собственным значением, соответствуют резонансные элементарные решения вида (D_{1s} , D_{2s} — постоянные):

$$u_{0s} = (i\xi D_{1s} + D_{0s}) v_{0s} \quad (1.8)$$

Уравнение каждой кривой в окрестности резонансной частоты Ω_s можно построить также методами возмущений, принимая за малый параметр разность $\kappa_s = \Omega^2 - \Omega_s^2$.

Отыскивая решение уравнения (1.2) в виде $v_s = v_{s0} + \alpha_s v_{s1} + \alpha_s^2 v_{s2} + \dots$; $\alpha_s = \kappa_s^{1/2} \alpha_{s0} + \kappa_s \alpha_{s1} + \dots$, в результате проведения метода возмущений [4] получаем

$$\alpha_{s0} = \left(\int_{\rho_0}^1 t_1 v_{s0}^2 \rho d\rho \right)^{-1/2}, \quad \alpha_{s1} = \alpha_{s2} = \dots = 0$$

при условии нормировки, что $\int_{\rho_0}^1 t_2 v_{s0}^2 \rho d\rho = 1$.

Таким образом, в окрестности $\alpha=0$, $\Omega=\Omega_s$ каждая дисперсионная кривая является гиперболой $\alpha_{s0}^2 (\Omega^2 - \Omega_s^2) - \alpha^2 = 0$.

При низких частотах $\Omega=\Omega_s$ определяется формулой (1.3), а $\alpha_{s0}=1$.

Основываясь на исследованиях работы [5], можно сделать вывод, что при α , $\Omega \rightarrow \infty$ каждая дисперсионная кривая асимптотически стремится к прямой, тангенс угла которой равен $\mu = c_l/c_h = (G_l m_h / (G_h m_l))^{1/2} = (p/\theta_*)^{1/2}$.

На фигуре изображены дисперсионные кривые для трехслойного цилиндра. Случай а) соответствует $p=10^{-2}$, $\theta_* = 0,2$; случай б) — $p=10^{-4}$, $\theta_* = 0,128$. В обоих случаях $\rho_{01}=0,2$, $\rho_{11}=0,5$, $\rho_{03}=0,6$, $\rho_{13}=1$. В случае а) $\mu=0,225$, в случае б) $\mu=0,0267$.

2. Проведенный анализ позволяет в области низких частот построить адекватную прикладную теорию.

В рассматриваемом радиально-неоднородном цилиндре с чередующимися жесткими и мягкими слоями будем считать, что любое сечение $\xi = \text{const}$ жесткого слоя может только поворачиваться вокруг оси цилиндра без деформаций. При этом смещения точек сечения будут иметь вид (τ — безразмерный параметр):

$$u_j = r_1 \rho_j g_j(\xi, \tau), \quad \tau = \omega t / \Omega \quad (2.1)$$

Примем, что смещения в мягком слое в любом сечении $\xi = \text{const}$ полностью определяются перемещениями смежных жестких слоев, т. е. в соответствии с (2.1) и принятой нумерацией имеем

$$u_i(\rho_{i1}, \xi, \tau) = r_1 \rho_{i1} g_{i+1}(\xi, \tau), \quad u_i(\rho_{0i}, \xi, \tau) = r_1 \rho_{0i} g_i(\xi, \tau)$$

Эта гипотеза позволяет представить смещения в мягком слое в виде

$$u_i = \frac{r_1}{\rho_{i1}^2 - \rho_{0i}^2} [g_{i+1} \rho_{i1}^2 (\rho - \rho_{0i}^2 / \rho) - g_i \rho_{0i}^2 (\rho - \rho_{i1}^2 / \rho)] \quad (2.2)$$

В соответствии с (2.1) и (2.2) напряженно-деформированное состояние в каждом жестком слое и мягком слое будет следующим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z j} &= G_h \varepsilon_{\theta z j}, \quad \varepsilon_{\theta z j} = \rho g_j' \\ \sigma_{r \theta i} &= G_l \varepsilon_{r \theta i}, \quad \varepsilon_{r \theta i} = \frac{2 \rho_{0i}^2 \rho_{i1}^2}{\rho^2 (\rho_{i1}^2 - \rho_{0i}^2)} (g_{i+1} - g_i) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю.

Чтобы получить начально-краевую задачу, адекватную выбранной модели напряженно-деформированного состояния, воспользуемся вариационным принципом Гамильтона

$$\int_0^{\tau_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A) d\tau = 0 \quad (2.4)$$

где δT — вариация кинетической энергии, $\delta \Pi$ — вариация энергии деформации, δA — элементарная работа внешних сил. Если пренебречь силами инерции мягких слоев, имеем

$$\begin{aligned} T &= \pi r_1^3 m_h \int_0^l \left(\sum_{j=1}^r \int_{\rho_{0j}}^{\rho_{1j}} u_j^2 \rho d\rho \right) d\xi \\ \Pi_0 &= \pi r_1^3 \int_0^l \left[\sum_{j=1}^r \int_{\rho_{0j}}^{\rho_{1j}} \sigma_{\theta z j} \varepsilon_{\theta z j} \rho d\rho + \sum_{i=1}^{r-1} \int_{\rho_{0i}}^{\rho_{1i}} \sigma_{r \theta i} \varepsilon_{r \theta i} \rho d\rho \right] d\xi \end{aligned}$$

где $l = L/r_1$, L — длина цилиндра.

Чтобы определить δA , примем, например, что на торцах цилиндра заданы следующие граничные условия $\sigma_{z0}(\rho, 0, \tau) = \sigma_0(\rho, \tau)$; $\sigma_{z0}(\rho, l, \tau) = \sigma_1(\rho, \tau)$; $\sigma_n = \sigma_{nj}(\rho, \tau)$, $\rho \in [\rho_{0j}; \rho_{1j}]$; $\sigma_n = 0$, $\rho \in [\rho_{0i}; \rho_{1i}]$ ($n=0, 1$).

Считая δg_j независимыми вариациями ($\delta g_i = 0$ при $\tau=0; \tau_1$) из вариационного уравнения (2.4) получаем систему дифференциальных уравнений и граничные условия, которые удобно представить в векторном виде:

$$-B g'' + B g'' + p C g = 0 \quad (2.5)$$

$$B g'(0, \tau) = M_0(\tau), \quad B g'(l, \tau) = M_1(\tau) \quad (2.6)$$

Здесь матрицы C и B те же, что и в (1.4), $g = (g_1, g_2, \dots, g_r)^T$, $M_n = (M_{n1}, M_{n2}, \dots, M_{nr})$.

$$M_{0j} = -\frac{1}{G_h} \int_{\rho_{0j}}^{\rho_{1j}} \sigma_{0j}(\rho, \tau) \rho^2 d\rho, \quad M_{1j} = \frac{1}{G_h} \int_{\rho_{0j}}^{\rho_{1j}} \sigma_{1j}(\rho, \tau) \rho^2 d\rho$$

Добавляя к (2.5), (2.6) начальные условия

$$g(\xi, 0) = f_0(\xi), \quad g'(\xi, 0) = f_1(\xi) \quad (2.7)$$

получаем начально-краевую задачу.

3. В рамках построенной прикладной теории рассмотрим случай стационарных колебаний. Положим

$$g(\xi, \tau) = a(\xi) e^{-i\alpha\tau} \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.5), относительно вектор-функции получаем уравнение

$$-Ba'' + pCa - \Omega^2 Ba = 0 \quad (3.2)$$

Полагая в (3.2) $a(\xi) = X e^{i\alpha\xi}$, для определения α и X получаем спектральную задачу (1.4), где

$$\eta^2 = p^{-1}(\Omega^2 - \alpha^2) \quad (3.3)$$

Каждое собственное значение η_i^2 системы (1.4) определяет два спектральных множества $\alpha_i^+(\Omega) = (\Omega^2 - p\eta_i^2)^{1/2}$, $\alpha_i^-(\Omega) = -(\Omega^2 - p\eta_i^2)^{1/2}$ ($t = 0, 1, \dots, r-1$), при этом α_i^+ , α_i^- — вещественные, если $\Omega^2 > p\eta_i^2$ и чисто мнимые, если $\Omega^2 < p\eta_i^2$. Случай $\Omega^2 = p\eta_i^2 = \Omega_{0i}^2$ является резонансным.

Собственные векторы $X_i = \{X_{ih}\}_{h=1}^r$ системы (1.4) подчиним условию B — ортонормированности

$$(BX_i, X_j) = \delta_{ij} \quad (3.4)$$

Нетрудно показать, что для собственного значения $\eta_0^2 = 0$ компоненты соответствующего собственного вектора X_0 имеют вид $X_{0k} = (\sum b_{jj})^{-1/2}$ (сумма по $j=1, \dots, m$).

Элементарными решениями, соответствующими собственным значениям α_s^+ , α_s^- называются вектор-функции вида:

$$a_s^+(\xi) = X_s e^{i\alpha_s \xi}, \quad a_s^-(\xi) = X_s e^{-i\alpha_s \xi} \quad (3.5)$$

В резонансном случае $\alpha_s = 0$ является двукратным собственным значением и ему соответствуют два элементарных решения вида

$$a_s^+(\xi) = X_s (i\xi + 1), \quad a_s^-(\xi) = X_s (-i\xi + 1) \quad (3.6)$$

Как будет показано ниже, для вещественных α_s^+ , α_s^- элементарные решения a_s^+ переносят энергию в положительном направлении оси OZ , a_s^- — в отрицательном. При α_s чисто-мнимом ($\alpha_s = i\beta_s$, $\beta_s > 0$) элементарное решение $a_s^+(\xi)$ экспоненциально убывает с ростом ξ , $a_s^-(\xi)$ — экспоненциально убывает в противоположном направлении.

Смещения и касательные напряжения, соответствующие элементарным решениям, имеют вид

$$u_s^\pm = r_1 \rho a_s^\pm, \quad \tau_s^\pm = i\alpha_s G_h \rho B a_s^\pm, \quad \tau = \sigma_{\theta z} \quad (3.7)$$

4. Рассмотрим вопрос о переносе энергии элементарными решениями. В рассматриваемом случае крутильных колебаний поток энергии через сечение $z = \text{const}$ можно представить в виде [6]:

$$P(u) = \frac{i\omega}{2} \int_{\rho_0}^{2\pi} \int_{r_0}^{r_1} (u \sigma_{\theta z}^* - u^* \sigma_{\theta z}) r dr d\theta \quad (4.1)$$

Подставляя (3.7) в (4.1) и учитывая (3.4), получаем

$$P(\mathbf{u}_s^\pm) = \begin{cases} \pm^{1/2} \pi r_1^3 G_h \omega \alpha_s^\pm (1 - \rho_0^4), & \text{Im } \alpha_s^\pm = 0 \\ 0, & \text{Re } \alpha_s^\pm = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

В резонансном случае, соответственно, получаем

$$P(\mathbf{u}_s^\pm) = \pm^{1/2} \pi \omega r_1^3 G_h (1 - \rho_0^4) \quad (4.3)$$

Из выражений (4.2), (4.3) вытекает указанное выше свойство элементарных решений. В общем резонансном случае (1.8):

$$P(\mathbf{u}_{0s}^\pm) = \pm 2\pi r_1 \omega G_h \int_{\rho_0}^1 v_{0s}^2 \rho \, d\rho \quad (4.4)$$

так что решение \mathbf{u}_{0s}^+ , как и соответствующее решение прикладной теории, «несет» энергию слева направо, \mathbf{u}_{0s}^- — справа налево.

5. Рассмотрим задачу (2.5) в предположении, что $\mathbf{M}_0(\tau) = \mathbf{m}_0 e^{-i\alpha\tau}$, $\mathbf{M}_1(\tau) = \mathbf{m}_1 e^{-i\alpha\tau}$. Тогда к уравнению (3.2) необходимо добавить граничные условия

$$B\mathbf{a}'(0) = \mathbf{m}_0, \quad B\mathbf{a}'(l) = \mathbf{m}_1 \quad (5.1)$$

Решение уравнения (3.2) будем отыскивать в виде

$$\mathbf{a}(\xi) = \sum_{s=0}^{r-1} [A_s^+ \mathbf{a}_s^+(\xi) + A_s^- \mathbf{a}_s^-(\xi - l)] \quad (5.2)$$

где A_s^+ , A_s^- — произвольные постоянные.

Подставляя (5.2) в (5.1), получим (сумма по $s=0, \dots, r-1$):

$$\begin{aligned} \Sigma(A_s^+ - e^{i\alpha s l} A_s^-) i\alpha_s B\mathbf{X}_s &= \mathbf{m}_0 \\ \Sigma(A_s^+ e^{i\alpha s l} - A_s^-) i\alpha_s B\mathbf{X}_s &= \mathbf{m}_1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Используя свойства B — ортонормированности (3.4), получаем решение

$$A_s^+ = \frac{m_{1s} e^{i\alpha s l} - m_{0s}}{i\alpha_s \Delta_s}, \quad A_s^- = \frac{m_{1s} - m_{0s} e^{i\alpha s l}}{i\alpha_s \Delta_s}$$

$$\Delta_s = e^{2i\alpha s l} - 1, \quad m_{0s} = (m_0, \mathbf{X}_s), \quad m_{1s} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{X}_s)$$

Если $\alpha_s l \rightarrow \pi n$, где n — целое число, A_s^+ , A_s^- неограниченно возрастают. В этом случае приходим к классическому резонансу.

При $\Omega = \Omega_{0k}$ система (5.3) имеет несколько иной вид (сумма по $s=0, \dots, r-1$; $1 \neq k$):

$$\begin{aligned} i(A_k^+ - A_k^-) B\mathbf{X}_k + \Sigma(A_s^+ - e^{i\alpha s l} A_s^-) i\alpha_s B\mathbf{X}_s &= \mathbf{m}_0 \\ i(A_k^+ - A_k^-) B\mathbf{X}_k + \Sigma(A_s^+ e^{i\alpha s l} - A_s^-) i\alpha_s B\mathbf{X}_s &= \mathbf{m}_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Умножая каждое из уравнений на \mathbf{X}_k , получаем, что система (5.4) разрешима только при условии $(\mathbf{m}_0, \mathbf{X}_k) = (\mathbf{m}_1, \mathbf{X}_k) = m_k$.

При этом A_k^+ , A_k^- определяются неоднозначно

$$A_k^+ = -im_k/2 + A_0, \quad A_k^- = im_k/2 + A_0 \quad (5.5)$$

Постоянной A_0 соответствуют крутильные колебания цилиндра как абсолютно твердого тела.

Для полуограниченного цилиндра ($l=\infty$), колебания которого возбуждаются напряжениями, приложенными к торцу $\xi=0$, а на бесконечности источники колебаний отсутствуют, решение уравнения (3.2) следует отыскивать в виде

$$a(\xi) = \sum_{s=0}^{r-1} A_s^+ a_s^+(\xi) \quad (5.6)$$

Удовлетворяя первому граничному условию (5.1), получаем $A_s^+ = -(\mathbf{m}_0, \mathbf{X}_s) / \alpha_s$.

В резонансном случае $A_k^+ = -i(\mathbf{m}_0, \mathbf{X}_k)$.

Как известно, при решении задач для неограниченных волноводов (в данном случае бесконечный или полубесконечный цилиндр) критерием выбора единственного решения служит знак групповой скорости $c_g = c_n d\Omega / d\alpha$. В нерезонансном случае он эквивалентен принципу Манделъштама [3], [7]. При резонансах второго рода $c_g=0$ многие авторы для выбора решения рекомендуют использовать либо принцип предельной амплитуды, либо принцип предельного поглощения, считая, что принцип Манделъштама в этом случае неприменим. Однако, как показывают формулы (4.3), (4.4) в резонансном случае утрачивает смысл не принцип Манделъштама, а критерий выбора, основанный на знаке групповой скорости.

В заключение отметим, что приведенные на фиг. 1 дисперсионные кривые позволяют указать примерный интервал изменения безразмерной частоты Ω , для которого справедлива построенная прикладная теория. В случае а) $0 \leq \Omega < 5,5$, в случае б) $0 \leq \Omega < 0,75$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устинов Ю. А. О структуре погранслоя в слоистых плитах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 2. С. 325–328.
2. Азмедов Н. К., Устинов Ю. А. О принципе Сен – Венана в задаче кручения слоистого цилиндра // ПММ. 1988. Т. 52. № 2. С. 264–268.
3. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
5. Брейховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1957. 502 с.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка. 1981. 283 с.
7. Манделъштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 437 с.

Баку, Ростов н/Д

Поступила в редакцию
8.VIII.1989