МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1991

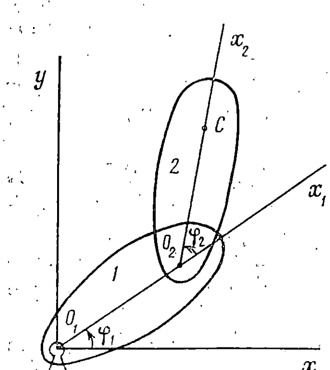
УДК 531.3

Л. Д. АКУЛЕНКО, Д. Д. ЛЕЩЕНКО

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОЙ ШАРНИРНОЙ СВЯЗКИ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В [1] рассмотрена задача о свободных движениях шарнирной связки двух тел. На основании двух интегралов системы удалось проинтегрировать уравнения полностью и получить общее решение в неявном виде, а также провести качественное и численное исследование движений. Однако в практических случаях на систему действуют различные возмущение и управляющие силы и моменты сил, для учета которых необходимо иметь аналитическое представление общего и частных решений. В данной работе при помощи аналитических методов нелинейной механики Ляпунова – Пуанкаре построены приближенные явные решения колебательного и вращательного видов, предложены рекуррентные процедуры их уточнения. Установлена двухчастотность (квазипериодичность) движений в общем случае и получены условия периодичности траекторий. Рассмотренная модель представляет практический интерес при решении задач динамики и управления сложными техническими объектами, промышленными роботами, космическими аппаратами и др.

1. Постановка задачи. Рассматриваются свободные движения (без внешних сил и моментов сил) плоской системы двух твердых тел (звеньев) в инерциальной плоскости O_1xy (см. фиг.). Ось O_1z_1 ортогональна плоскости фигуры и неподвижна в инерциальном пространстве. Ось O_2z_2 коллинеарна оси O_1z_1; она неподвижна в телах 1 и 2 и является осью связывающего цилиндрического шарнира, предполагаемого, как и O_1z_1, идеальным. Введем обозначения: $|O_1O_2|=l_1$ – расстояние между осями шарниров, $|O_2C|=l_2$ – «плечо» второго тела относительно оси O_2z_2 (расстояние от точки O_2 до центра масс C тела 2); J_1, J_2 – моменты инерции звеньев 1 и 2 относительно осей O_1z_1 и O_2z_2 соответственно; m_2 – масса тела 2; значение массы 1-го тела m_1 не существенно для рассмотрения.



В качестве обобщенных переменных, описывающих движение системы, удобно взять угловые переменные φ_1 и φ_2, как показано на фиг. Здесь φ_1 – угол поворота отрезка O_1O_2 (или оси O_1x_1) относительно оси O_1x; φ_2 – угол, определяющий поворот отрезка O_2C относительно продолжения отрезка O_1O_2. Кинетическая (и полная) энергия E системы постоянна в рассматриваемом случае свободного движения и имеет вид строго положительной квадратичной формы от $\varphi_1^{\cdot}$, $\varphi_2^{\cdot}$:

$$E={}^1/_2(J_*+2\mu\cos\varphi_2)\varphi_1^{\cdot 2}+{}^1/_2J_2\varphi_2^{\cdot 2}+(J_2+\mu\cos\varphi_2)\varphi_1^{\cdot}\varphi_2^{\cdot}$$
$$E=e=\text{const}\ (J_*=J_1+J_2+m_2l_1^2,\ \mu=m_2l_1l_2<{}^1/_2J_*) \tag{1.1}$$

Уравнения движения могут быть выписаны в форме Ньютона, Лагранжа, Рауса, Гамильтона [2]; например, для уравнений в форме Лагранжа получим выражения

$$(J_*+2\mu\cos\varphi_2)\varphi_1^{\cdot\cdot}+(J_2+\mu\cos\varphi_2)\varphi_2^{\cdot\cdot}-\mu(\varphi_1^{\cdot}+2\varphi_2^{\cdot})\varphi_2^{\cdot}\sin\varphi_2=0$$

$$J_2\varphi_2^{\cdot\cdot}+(J_2+\mu\cos\varphi_2)\varphi_1^{\cdot\cdot}+\mu\varphi_1^{\cdot 2}\sin\varphi_2=0 \qquad (1.2)$$

$$\partial E/\partial\varphi_1^{\cdot}\equiv K_1=(J_*+2\mu\cos\varphi_2)\varphi_1^{\cdot}+(J_2+\mu\cos\varphi_2)\varphi_2^{\cdot}=k=\mathrm{const}$$

$$\partial E/\partial\varphi_2^{\cdot}\equiv K_2=J_2\varphi_2^{\cdot}+(J_2+\mu\cos\varphi_2)\varphi_1^{\cdot}$$

$$(K_1^{\cdot}=0,\ K_2^{\cdot}=\partial E/\partial\varphi_2)$$

При $\mu=0$ согласно (1.2) момент импульса $K_2=k_2=\mathrm{const}$; это приводит к тому, что $\varphi_1^{\cdot}=\mathrm{const}$, $\varphi_2^{\cdot}=\mathrm{const}$.

Заметим, что при $J_*\gg J_2$ $(J_2/J_*\to 0)$ из первого уравнения (1.2) следует, что $\varphi_1^{\cdot}=\mathrm{const}$, а второе уравнение описывает колебания и вращения системы «типа маятника»: $\varphi_2^{\cdot\cdot}-a^2\sin\varphi_2=0$, где $a^2=\mu\varphi_1^{\cdot 2}/J_2=\mathrm{const}>0$.

Вычислим из (1.2) $\varphi_1^{\cdot}=(k-B\varphi_2^{\cdot})A$, где коэффициенты $A=J_*+2\mu\cos\varphi_2>0$, $B=J_2+\mu\cos\varphi_2\gtrless 0$ суть множители при $\varphi_1^{\cdot}$, $\varphi_2^{\cdot}$ соответственно. Подставив $\varphi_1^{\cdot}$ в интеграл (1.1) с учетом положительности A $(A\geqslant\min_{\varphi_2}A>0$, где $\min_{\varphi_2}A=J_*-2\mu)$, получим соотношение $(AJ_2-B^2)\varphi_2^{\cdot 2}=2eA-k^2$. Поскольку $\min_{\varphi_2}(AJ_2-B^2)=J_1J_2+m_2l_1^2J_2^0>0$, то из равенства для $\varphi_2^{\cdot 2}$ следует (вследствие вещественности $\varphi_2^{\cdot}$), что $2eA-k^2\geqslant 0$. Это неравенство приводит к следующим эквивалентным для всех φ_2:

$$e\geqslant {}^1/_2k^2/A\geqslant {}^1/_2k^2/\min_{\varphi_2}A,\quad |k|\leqslant[2e(J_*-2\mu)]^{1/2}$$

Система (1.2) разрешима относительно вторых производных $\varphi_1^{\cdot\cdot}$, $\varphi_2^{\cdot\cdot}$, поскольку квадратичная форма (1.1) строго положительно определена; соответствующий определитель Δ в (1.2) равен

$$\Delta=J_1J_2+m_2l_1^2J_2^0+\mu^2\sin^2\varphi_2>0\quad(J_2=J_2^0+m_2l_2^2)$$

Используя первые интегралы E (1.1) и K_1 (1.2), получим соотношение, связывающее φ_2 и $\varphi_2^{\cdot}$:

$$\frac{1}{2}\varphi_2^{\cdot 2}=\frac{2e}{I}\left[\frac{D-(1-\cos\varphi_2)}{1-\lambda^2\cos^2\varphi_2}\right] \qquad (1.3)$$

$$I=J_2(J_1+m_2l_1^2)\mu^{-1},\ D=1+{}^1/_2(J_*-{}^1/_2k^2e^{-1})\mu^{-1}$$

$$\lambda^2=\mu I^{-1}=\mu^2[J_2(J_1+m_2l_1^2)]^{-1}\quad(0\leqslant D<\infty,\ 0<\lambda^2<1)$$

Переходя к пределу при $\mu\to 0$, находим согласно установленному выше, что $\varphi_2^{\cdot}=\mathrm{const}$.

Уравнение (1.3) описывает движение эквивалентной системы «типа маятника» с переменной (зависящей 2π-периодически) инерционной характеристикой $J(\varphi_2)$. Функция Лагранжа имеет вид $L=E-U$, в которой кинетическая энергия $E={}^1/_2J(\varphi_2)\varphi_2^{\cdot 2}$, потенциальная энергия $U=2e(1-\cos\varphi_2)$, а $J(\varphi_2)=I(1-\lambda^2\cos^2\varphi_2)$; при $\lambda^2=0$ получаем обычный математический (или физический) маятник. Соответствующее уравнение движения получается дифференцированием выражения (1.3) по t. При $0\leqslant D<2$ в системе имеют место относительные колебания по φ_2, при $D>2$ — вращения, а значение $D=2$ соответствует движению по сепаратрисе.

Для исследования относительных движений удобно в (1.3) ввести новый безразмерный аргумент θ:

$$\frac{1}{2}\varphi_2'^2=\frac{D-(1-\cos\varphi_2)}{1-\lambda^2\cos^2\varphi_2},\qquad \varphi_2'=\frac{d\varphi_2}{d\theta},\qquad \theta=\left(\frac{2e}{I}\right)^{1/2}t \qquad (1.4)$$

Фазовые траектории, связывающие переменные φ_2 и φ_2', аналогичны случаю маятника. Возникает задача построения периодических движений

$\varphi_2(\psi, D, \lambda^2)$ 2-го звена, т. е. решений уравнения (1.4). Соотношение (1.4) описывает следующие движения

симметричные колебания [3], имеющие место при $0 \leqslant D < 2$:

$$
\begin{gathered}
\theta-\theta_0=\int_{\varphi_2^0}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\varphi_2'(\varphi, D, \lambda^2)}, \qquad \varphi_2'=\pm\left[2\frac{D-(1-\cos\varphi_2)}{1-\lambda^2\cos^2\varphi_2}\right]^{1/2} \\
\varphi_2=\varphi_2(\psi, D, \lambda^2)\equiv\varphi_2(\psi+2\pi, D, \lambda^2), \ |\varphi_2|\leqslant\varphi_2^*(D) \\
\varphi_2(\psi, D, \lambda^2)\equiv-\varphi_2(-\psi, D, \lambda^2), \ \psi=\omega_2(D, \lambda^2)(\theta-\theta_0)+\psi^0 \\
\Theta_2(D, \lambda^2)=\oint\frac{d\varphi}{\varphi_2'}=2^{1/2}\int_{-\varphi_2^*}^{\varphi_2^*}\left[\frac{1-\lambda^2\cos^2\varphi}{D-(1-\cos\varphi)}\right]^{1/2}d\varphi \\
\omega_2=2\pi/\Theta_2, \ \varphi_2^*(D)=\arccos(1-D)=2\arcsin({}^1/{}_2D)^{1/2}
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

монотонные вращения [4, 5] (по Пуанкаре периодические решения второго вида [4]) при $D>2$ (для определенности в положительном направлении):

$$
\begin{gathered}
\varphi_2=\varphi_2(\psi, D, \lambda^2)=\psi+\varphi_2^*(\psi, D, \lambda^2), \ |\varphi_2^{*\prime}|<\omega_2 \\
\varphi_2(\psi+2n\pi, D, \lambda^2)\equiv\varphi_2(\psi, D, \lambda^2)+2n\pi, \ n=0, \pm1, \pm2, \ldots \\
\varphi_2^*(n\pi, D, \lambda^2)\equiv0, \ \varphi_2(\psi, D, \lambda^2)\equiv-\varphi_2(-\psi, D, \lambda^2) \\
\Theta_2(D, \lambda^2)=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\varphi_2'(\varphi, D, \lambda^2)}, \qquad \varphi_2'=2^{1/2}\left[\frac{D-(1-\cos\varphi_2)}{1-\lambda^2\cos\varphi_2}\right]^{1/2} \\
\psi=\omega_2(\theta-\theta_0)+\psi^0; \ \omega_2=2\pi/\Theta_2\to0, \ D\to2
\end{gathered} \tag{1.6}
$$

Замена ω_2 на $-\omega_2$ ($\varphi_2'\to-\varphi_2'$) приводит к вращениям в отрицательном направлении ($\psi'<0$, $\varphi_2'<0$); ω_2 и Θ_2 называются частотой и периодом вращений соответственно.

Отметим, что рассматриваемая система на интегральном многообразии (1.2) при малых $D<2$ относится к случаю, обобщающему системы Ляпунова [3], а при $D>2$ – к вращающимся системам, которые при $\lambda^2=0$ были исследованы асимптотическими методами в [5–8]. При $D>\max_{\varphi_2}|U|$, $\lambda^2=0$ для произвольного периодического потенциала $U(\varphi_2)\equiv U(\varphi_2+2\pi)$ вращательные решения были построены в [9].

Ставится сперва задача аналитического построения колебательных и вращательных относительных движений 2-го звена на основе выражения (1.4). Затем при помощи интегралов (1.2) нужно построить движения 2-го звена и, наконец, найти движение произвольной точки системы, например, конца 2-го звена на плоскости декартовых переменных O_1xy.

2. Построение относительных колебательных движений 2-го звена. Рассмотрим более детально соотношения (1.5), определяющие замкнутые фазовые траектории на плоскости (φ_2, φ_2'), колебательные движения $\varphi_2(\psi, D, \lambda^2)$, $\varphi_2'(\psi, D, \lambda^2)=\omega_2\partial\varphi_2/\partial\psi$, а также их амплитуду $\varphi_2^*(D)$, период $\Theta_2(D, \lambda^2)$ и частоту $\omega_2(D, \lambda^2)$. Для выражения Θ_2, совершая стандартную замену $D=2\varkappa^2$, $\sin(\varphi_2/2)=\varkappa\sin\gamma$, $|\gamma|\leqslant\pi/2$, где $\varkappa=\sin(\varphi_2^*/2)$, получим

$$
\begin{gathered}
\Theta_2=\Theta_2^*(\varphi_2^*, \lambda^2)=2\int_0^{\varphi_2^*}\left[\frac{1-\lambda^2\cos^2\varphi}{\varkappa^2-\sin^2(\varphi/2)}\right]^{1/2}d\varphi= \\
=4\int_0^{\pi/2}[1-\lambda^2(1-2\varkappa^2\sin^2\gamma)^2]^{1/2}(1-\varkappa^2\sin^2\gamma)^{-1/2}d\gamma=\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_\varkappa^{(n)}(\lambda^2)\varkappa^{2n}=
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_{\lambda}^{(m)}(\varkappa^2)\lambda^{2m} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \Theta_{\varkappa\lambda}^{(n,m)} \varkappa^{2n}\lambda^{2m}$$

При $n=0$ получаем выражение $\Theta_\varkappa^{(0)}(\lambda^2)$ для периода малых колебаний 2-го звена; с ростом λ^2, т. е. μ (см. (1.3)), период уменьшается; это также следует из (2.1). Последующие коэффициенты $\Theta_\varkappa^{(n)}(\lambda^2)$, $n \geqslant 1$ получаются в виде элементарных выражений разложением второго представления (2.1) для Θ_2 по степеням $(\varkappa^2)^n$ и интегрированием $\sin^{2n}\gamma$ [10], в частности, для $n=0$, 1, 2 имеем

$$\Theta_\varkappa^{(0)}(\lambda^2) = 2\pi(1-\lambda^2)^{1/2}, \quad \Theta_\varkappa^{(1)}(\lambda^2) = {}^1/_2\pi(1+3\lambda^2)(1-\lambda^2)^{-1/2}$$

$$\Theta_\varkappa^{(2)}(\lambda^2) = (3\pi/32)(3-14\lambda^2-5\lambda^4)(1-\lambda^2)^{-3/2}$$

Отметим, что в пределе при $\lambda^2 \to 0$ получается известное выражение для маятника: $\Theta_2^*(\varphi_2^*, 0) = 4\mathrm{K}(\varkappa)$, $0 \leqslant \varkappa < 1$, где K – полный эллиптический интеграл первого рода, для которого справедливо разложение: $\Theta_2^*(\varphi_2^*, 0) = 2\pi + {}^1/_2\pi\varkappa^2 + (9/32)\pi\varkappa^4 + \ldots$ (см. [10, 11]).

При $\lambda=0$, $\varkappa \sim 1$ колебательные движения 2-го звена описываются эллиптическими функциями Якоби [11, 12]:

$$\varphi_2(\psi_0, \varkappa^2, 0) = 2\arcsin(\varkappa\,\mathrm{sn}(\psi_0, \varkappa)), \quad 0 \leqslant \varkappa < 1$$

$$\psi_0 = \omega_{20}(\varkappa)(\theta-\theta_0) + \psi^0, \quad \omega_{20}(\varkappa) = 2\pi/\Theta_2^*(\varphi^*, 0) = \pi/(2\mathrm{K}(\varkappa))$$

На основе этого порождающего решения можно построить методами возмущений (по степеням малого параметра $\lambda^2 > 0$) искомое периодическое решение $\varphi_2(\psi, \varkappa^2, \lambda^2)$. При помощи указанных выше замен получим соотношения

$$\gamma' = \frac{(1-\varkappa^2\sin^2\gamma)^{1/2}}{[1-\lambda^2(1-2\varkappa^2\sin^2\gamma)^2]^{1/2}} \equiv \frac{(1-\varkappa^2\sin^2\gamma)^{1/2}}{1+\lambda^2\Gamma(\lambda^2, \varkappa^2\sin^2\gamma)}$$

$$\varphi_2 = 2\arcsin(\varkappa\sin\gamma) \quad (\gamma_0 = \mathrm{am}(\psi_0, \varkappa),\ \lambda^2 = 0)$$

Преобразуем и проинтегрируем полученное уравнение; приведем его к неявному соотношению для определения γ:

$$\gamma = \mathrm{am}(\Psi, \varkappa), \quad \Psi = \psi - \lambda^2\Pi(\gamma, \varkappa^2, \lambda^2) \tag{2.2}$$

$$\lambda^2\Pi \equiv \lambda^2\omega_2\Gamma + \omega_2 - \omega_{20}, \quad \omega_2 = 2\pi/\Theta_2^*(\varphi_2^*, \lambda^2)$$

$$\gamma_{(i+1)} = \mathrm{am}(\Psi_{(i+1)}, \varkappa), \quad \Psi_{(i+1)} = \psi - \lambda^2\Pi(\gamma_{(i)}, \varkappa^2, \lambda^2)$$

$$\gamma_{(1)} = \mathrm{am}(\psi - \lambda^2\Pi(\gamma_{(0)}, \varkappa^2, 0), \varkappa), \quad \gamma_{(0)} = \mathrm{am}(\psi, \varkappa), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Последовательные приближения (2.2) абсолютно равномерно сходятся при $i \to \infty$ к искомой функции $\gamma_*(\psi, \varkappa^2, \lambda^2)$, а $\varphi_{2(i)} \to \varphi_{2*}(\psi, \varkappa^2, \lambda^2) = 2\arcsin(\varkappa\,\mathrm{sn}(\Psi_*, \varkappa))$, $\Psi_{(i)} \to \Psi_*$.

Для построения колебаний 2-го звена относительно положения равновесия $\varphi_2 = \varphi_2' = 0$ применим процедуру, аналогичную разработанному А. М. Ляпуновым подходу к системам, носящим его имя [3]. Соответствующее уравнение и начальные условия имеют вид

$$(1-\lambda^2\cos^2\varphi_2)\varphi_2'' + {}^1/_2\lambda^2\varphi_2'^2\sin 2\varphi_2 + \sin\varphi_2 = 0$$

$$|\varphi_2| \leqslant \varphi_2^*(\delta) \equiv 2\arcsin(\delta/2^{1/2}) \tag{2.3}$$

$$\varphi_2(0) = \varphi_2^*(\delta), \quad \varphi_2'(0) = 0, \quad \delta = D^{1/2} < 2^{1/2}$$

Полагая в (2.3) $\varphi_2=\delta\xi$, где ξ — новая неизвестная переменная, и вводя возмущенное время τ, получим квазилинейное уравнение

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+h^2\xi=-\frac{\delta}{2}\lambda^2\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2\frac{\sin 2\delta\xi}{1-\lambda^2\cos^2\delta\xi}+\delta^2h^2F_\xi(\xi,\delta^2,\lambda^2)$$

$$\tau=\theta/(h(1-\lambda^2)^{1/2}),\quad h=h(\delta^2,\lambda^2)=h_0+\delta^2h_1+\ldots+\delta^{2n}h_n+\ldots$$

$$h=\Theta_2/(2\pi(1-\lambda^2)^{1/2}),\quad \xi=\xi(\tau,\delta^2,\lambda^2)\equiv\xi(\tau+2\pi,\delta^2,\lambda^2)$$

$$\xi(0,\delta^2,\lambda^2)=\varphi_2{}^*/\delta=(2/\delta)\arcsin(\delta/2^{1/2}),\quad \xi'(0,\delta^2,\lambda^2)\equiv 0$$

$$\delta^2F_\xi(\xi,\delta^2,\lambda^2)\equiv\delta^{-1}[\delta\xi(1-\lambda^2)^{-1}-\sin\delta\xi(1-\lambda^2\cos^2\delta\xi)^{-1}]$$

$$\xi(\tau,\delta^2,\lambda^2)=\xi_0(\tau,\lambda^2)+\delta^2\xi_1(\tau,\lambda^2)+\ldots+\delta^{2n}\xi_n(\tau,\lambda^2)+\ldots$$

Здесь параметр h выбирается так, чтобы переменные ξ, ξ' были 2π-периодическими по τ. Коэффициенты h_i, $i=1, 2, \ldots$ и h могут быть определены или в процессе построения решения, или согласно (2.4), где Θ_2 определяется соотношением (2.1), в котором $\varkappa^2={}^1/_2\delta^2$. В результате подстановки в уравнение (2.4) разложений для неизвестных h, ξ по степеням $(\delta^2)^n$ и приравнивания коэффициентов с учетом условий 2π-периодичности получаем искомые выражения $h_n(\lambda^2)$, $\xi_n(\tau,\lambda^2)$:

$$h_0=1,\ h_1=(1/8)(1+3\lambda^2)/(1-\lambda^2),\ h_2=(3/256)(3-14\lambda^2-5\lambda^4)/(1-\lambda^2)^2,\ \ldots$$

$$\xi_0=2^{1/2}\cos\tau,\ \xi_1=(2^{1/2}/96)[3(3+\lambda^2)\cos\tau-(1+11\lambda^2)\cos 3\tau]/(1-\lambda^2)$$

$$\begin{gathered}\xi_2=(2^{1/2}/46080)[(1875-3390\lambda^2+85275\lambda^4)\cos\tau+\\+(-180+2160\lambda^2+2340\lambda^4)\cos 3\tau+(9+702\lambda^2+\\+1449\lambda^4)\cos 5\tau]/(1-\lambda^2)^2,\ \ldots\\ \tau=(2\pi/\Theta_2)(\theta-\theta_0)=(\theta-\theta_0)/(h(1-\lambda^2)^{1/2})\end{gathered}\qquad(2.5)$$

Из (2.4), (2.5) следует, что $\xi_0(0,\lambda^2)+\delta^2\xi_1(0,\lambda^2)+\ldots\equiv\varphi_2{}^*(\delta)\delta^{-1}$. Отметим, что ряды (2.4), (2.5) будут равномерно сходящимися при $D=\delta^2\leqslant\leqslant c<2$. Таким образом может быть построено периодическое решение с любой наперед заданной степенью точности по параметру D, зависящее от трех произвольных параметров e, k, θ_0.

3. Построение вращательных движений 2-го звена. Аналогично п. 2 исследуем более подробно выражения (1.6), определяющие 2π-периодические фазовые траектории φ_2 (φ_2) на фазовой плоскости (φ_2, φ_2'), монотонные вращательные движения $\varphi_2(\psi, D, \lambda^2)$, для которых скорость $\varphi_2'(\psi, D, \lambda^2)=\omega_2\partial\varphi_2/\partial\psi\geqslant\nu>0$ строго положительна, экстремумы скорости, период $\Theta_2(D,\lambda^2)$ и частоту $\omega_2=2\pi/\Theta_2$. Для выражения Θ_2 имеем

$$\Theta_2=\Theta_2(D,\lambda^2)=(2D)^{1/2}\int_0^\pi\left[\frac{1-\lambda^2\cos^2\varphi}{1-D^{-1}(1-\cos\varphi)}\right]^{1/2}d\varphi=$$

$$=\frac{4}{\varkappa}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\lambda^2\cos^2 2\gamma}{1-\varkappa^2\sin^2\gamma}\right)^{1/2}d\gamma=\frac{4}{\varkappa}\sum_{n=0}^\infty\Theta_\varkappa^{(n)}(\lambda^2)\varkappa^{2n}=\frac{4}{\varkappa}\sum_{m=0}^\infty\Theta_\lambda^{(m)}(\varkappa^2)\lambda^{2m}=$$

$$=\frac{4}{\varkappa}\sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty\Theta_{\varkappa\lambda}^{(n,m)}\varkappa^{2n}\lambda^{2m},\qquad \varkappa^2=\frac{2}{D}<1\qquad(3.1)$$

В пределе при $\lambda\to0$ для Θ_2 получается выражение $\Theta_2(D,0)=(4/\varkappa)\mathrm{K}(\varkappa)$ (см. [12]), которое отвечает вращениям второго звена при равномерном вращении 1-го тела (см. замечания после уравнений (1.2)).

Отметим, что разложения по $\varkappa^2$ или λ^2 приводят к полным эллиптическим интегралам 1-го и 2-го родов, а двойной ряд (3.1) по $\varkappa^2$ и λ^2 — к элементарным интегралам от $\sin^{2n}\gamma\cos^{2m}2\gamma$ [10]. В результате получим следующее приближенное выражение для периода «быстрых вращений» (при малых D^{-1}, λ^2, $\lambda^2 \sim D^{-1}$):

$$\Theta_2(D,\lambda^2)=\pi(2D)^{1/2}h(D^{-1},\lambda^2),\ D=2\varkappa^{-2}$$

$$h=1+{}^1/_2(D^{-1}-{}^1/_2\lambda^2)+(1/16)(9D^{-2}-2D^{-1}\lambda^2-(3/4)\lambda^4)+$$
$$+(1/64)(60D^{-3}-77D^{-2}\lambda^2+39D^{-1}\lambda^4-(25/2)\lambda^6)+O(D^{-4}+\lambda^8) \tag{3.2}$$

Рассмотрим соответствующие этому случаю вращательные движения в положительном направлении. Введем «быстрое» безразмерное время ϑ и преобразуем выражения (1.4), (1.6):

$$d\vartheta/d\varphi_2=h(D^{-1},\lambda^2)+g(\varphi_2,D^{-1},\lambda^2),\quad \vartheta=(2D)^{1/2}\theta$$

$$\mathrm{T}(\varphi_2,D^{-1},\lambda^2)=h+g\equiv[(1-\lambda^2\cos^2\varphi_2)/(1-D^{-1}(1-\cos\varphi_2))]^{1/2} \tag{3.3}$$

$$h=\langle \mathrm{T}\rangle_{\varphi_2}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{T}(\varphi,D^{-1},\lambda^2)\,d\varphi\qquad (h(0,0)=1)$$

$$g=\mathrm{T}-\langle\mathrm{T}\rangle_{\varphi_2}=\mathrm{T}-h,\ \langle g\rangle_{\varphi_2}\equiv0,\ g=O(D^{-1}+\lambda^2)$$

Уравнение (3.3) интегрируется квадратурой. Используя свойства функции g (малость по D^{-1}, λ^2 для всех φ_2, 2π-периодичность и нулевое среднее по φ_2) применим процедуру метода возмущений. Будем искать вращательное решение $\varphi_2(\psi, D^{-1}, \lambda^2)$ вида (1.4) разложениями (или последовательными приближениями) по степеням малых параметров D^{-1}, λ^2 ($\varphi_2^\circ=0$):

$$\varphi_2=\psi+G(\varphi_2,D^{-1},\lambda^2),\ \psi=\vartheta/h=\omega_2(\theta-\theta_0)+\psi^\circ$$

$$G(\varphi_2,D^{-1},\lambda^2)=\frac{1}{h}\int_0^{\varphi_2}g(\varphi,D^{-1},\lambda^2)\,d\varphi,\qquad G=O(D^{-1}+\lambda^2)$$

$$\varphi_2=\psi+G(\psi,D^{-1},\lambda^2)[1+g(\psi,D^{-1},\lambda^2)]+O(D^{-3}+\lambda^6) \tag{3.4}$$

$$g(\psi,D^{-1},\lambda^2)=-{}^1/_2D^{-1}\cos\psi-(1/4)\lambda^2\cos2\psi+$$
$$+(3/4)D^{-1}(\lambda^2/4-D^{-1})\cos\psi+(1/16)(D^{-1}+\lambda^2)(3D^{-1}+\lambda^2)\cos2\psi+$$
$$+(1/16)D^{-1}\lambda^2\cos3\psi-(\lambda^4/64)\cos4\psi+O(D^{-3}+\lambda^6)$$

$$h(D^{-1},\lambda^2)G(\psi,D^{-1},\lambda^2)=-{}^1/_2D^{-1}\sin\psi-(\lambda^2/8)\sin2\psi+$$
$$+(3/4)D^{-1}(\lambda^2/4-D^{-1})\sin\psi+(1/32)(D^{-1}+\lambda^2)(3D^{-1}+\lambda^2)\sin2\psi+$$
$$+(1/48)D^{-1}\lambda^2\sin3\psi+(\lambda^2/256)\sin4\psi+O(D^{-3}+\lambda^6)$$

Таким образом, формулы (3.1)—(3.4) дают приближенное решение задачи о «быстрых вращениях» 2-го звена, когда движение 1-го (несущего) тела близко к равномерному вращению (большой момент инерции J_1).

Случай $\lambda^2\ll1$, $D=2\varkappa^{-2}>2$ ($D\sim2$) в пределе при $\lambda^2\to0$ приводит к вращениям маятника, движение которого описывается эллиптическими функциями [11, 12]:

$$
\begin{gathered}
\varphi_2(\psi_0, D^{-1}, 0)=2\,\mathrm{am}(\psi_0,\varkappa)=\psi_0+4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\frac{q^j}{1+q^{2j}}\sin j\psi_0 \\
\psi_0=\omega_2(D^{-1},0)(\theta-\theta_0)+\psi^\circ,\ \Theta_2(D^{-1},0)=4\varkappa^{-1}\mathbf{K}(\varkappa) \\
q=q(\varkappa)\equiv\exp[-\pi\mathbf{K}'(\varkappa)/\mathbf{K}(\varkappa)]<1,\ \ \mathbf{K}'(\varkappa)=\mathbf{K}(\varkappa'),\ \ \varkappa'=(1-\varkappa^2)^{1/2}<1
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

где am — эллиптическая амплитуда, $\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, $\varkappa$ — модуль. При малых λ^2 автовращательное движение (1.6), определяемое уравнением (3.3), получается при помощи методов Ляпунова — Пуанкаре [3] или построением согласно процедуре [12]. Имеем

$$
\begin{gathered}
d\psi/d\varphi_2=1+g_\lambda(\varphi_2, D^{-1})+\lambda^2\delta_\lambda(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2) \\
\psi=\vartheta/h,\ \ g_\lambda(\varphi_2, D^{-1})=g(\varphi_2, D^{-1}, 0)/h(D^{-1}, 0) \\
\lambda^2\delta_\lambda(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2)\equiv g(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2)/h(D^{-1}, \lambda^2)-g_\lambda(\varphi_2, D^{-1})
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Функции g, g_λ, δ_λ являются 2π-периодическими и имеют нулевое среднее по φ_2. Интегрируя (3.6), получим конечное соотношение, определяющее неявно φ_2 (см. (3.5)):

$$
\begin{gathered}
\psi=\varphi_2+G_\lambda(\varphi_2, D^{-1})+\lambda^2\Delta_\lambda(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2) \\
\varphi_2^{(0)}(\psi, D^{-1})=2\,\mathrm{am}(\psi,\varkappa),\ \ \varphi_2^{(1)}(\psi, D^{-1}, \lambda^2)= \\
=2\,\mathrm{am}(\Psi^{(1)},\varkappa),\ \ \Psi^{(1)}=\psi-\lambda^2\Delta_\lambda(\varphi_2^{(0)}, D^{-1}, 0) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_2^{(i+1)}(\psi, D^{-1}, \lambda^2)=2\,\mathrm{am}(\Psi^{(i+1)},\varkappa),\qquad \Psi^{(i+1)}=\psi-\lambda^2\Delta_\lambda(\varphi_2^{(i)}, D^{-1}, \lambda^2)
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Здесь am — эллиптическая амплитуда, отвечающая интегралу 1-го рода $F(\varkappa, \varphi_2)$ [11]. Последовательные приближения $\varphi_2^{(i)}$ (3.7) равномерно сходятся при $i\to\infty$ к искомому вращательному решению уравнения (3.6) $\varphi_2^{(*)}(\psi, D^{-1}, \lambda^2)$ вида (1.6), если λ^2 достаточно мало ($\lambda^2\leqslant c<1$). Аналогично рассматривается случай «быстрых вращений», т. е. разложение решения по степеням параметра D^{-1} (или $\varkappa^2$) при $\lambda^2\sim 1$ ($\lambda^2<1$). Соответствующее порождающее уравнение определяется аналогично из (3.6), (3.3)

$$
\begin{gathered}
d\psi/d\varphi_2=1+g_D(\varphi_2, \lambda^2)+D^{-1}\delta_D(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2) \\
\psi=\vartheta/h,\ \ g_D(\varphi_2, \lambda^2)=g(\varphi_2, 0, \lambda^2)/h(0, \lambda^2)= \\
=(1-\lambda^2\cos^2\varphi_2)^{1/2}/h(0,\lambda^2)-1,\quad h(0,\lambda^2)=(2/\pi)\mathbf{E}(\lambda) \\
D^{-1}\delta_D(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2)\equiv g(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2)/h(D^{-1}, \lambda^2)-g_D(\varphi_2, \lambda^2)
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Из (3.8) следует, что связь между фазой ψ и переменной $\varphi_2^{\pm}=\varphi_2\pm\pi/2$ задается эллиптическим интегралом 2-го рода: $\psi=E(\lambda, \varphi_2^{\pm})$, обращая который, запишем $\varphi_2=\mp\pi/2+\mathrm{am}_2(\psi, \lambda)$. Интегрируя (3.8), получим неявное уравнение относительно φ_2 и его решение последовательными приближениями согласно (3.8)

$$
\begin{gathered}
\psi=\varphi_2+G_D(\varphi_2, \lambda^2)+D^{-1}\Delta_D(\varphi_2, D^{-1}, \lambda^2) \\
\varphi_2^{(0)}(\psi, \lambda^2)=\mp\pi/2+\mathrm{am}_2(\psi, \lambda) \\
\varphi_2^{(1)}(\psi, D^{-1}, \lambda^2)=\mp\pi/2+\mathrm{am}_2(\Psi^{(1)}, \lambda),\ \ \Psi^{(1)}=\psi+D^{-1}\Delta_D(\varphi_2^{(0)}, 0, \lambda^2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_2^{(i+1)}(\psi, D^{-1}, \lambda^2)=\mp\pi/2+\mathrm{am}_2(\Psi^{(i+1)}, \lambda),\quad \Psi^{(i+1)}=\psi-D^{-1}\Delta_D(\varphi_2^{(i)}, D^{-1}, \lambda^2), \\
i=1, 2, \ldots
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

Последовательные приближения $\varphi_2^{(i)}$ (3.9) равномерно сходятся при $i\to\infty$ к искомому вращательному решению уравнения (3.8) $\varphi_2^{(*)}(\psi, D^{-1}, \lambda^2)$ вида (1.6), если D^{-1} достаточно мало ($D^{-1}\leqslant c<2$). Случай малых $D^{-1}\ll 1$ («быстрые вращения» 2-го звена), но больших $\lambda^2\sim 1$ ($\lambda^2<1$) представляется мало содержательным в механическом отношении. Отметим еще, что экстремумы угловой скорости $\varphi_2^{\cdot}(\varphi_2)$ имеют место при $\varphi_2=0, \pi$ (максимум и минимум соответственно для вращения в положительном направлении), что проверяется непосредственным дифференцированием выражения (1.3). Таким образом, общее приближенное аналитическое решение $\varphi_2(\psi, D^{-1}, \lambda^2)$ уравнения (1.3) (или (1.4)) в форме колебаний и вращений второго звена построено (см. (3.4), (3.7), (3.9)). Это решение зависит от двух интегралов движения e и k и от фазовой постоянной $(-\omega_2\theta^\circ+\psi^\circ)$, а также от параметров системы (см. п. 1). На его основе может быть построено общее решение для переменной φ_1, определяющей движение несущего 1-го тела согласно (1.2).

4. Определение движения несущего 1-го тела. Движение 1-го звена относительно невращающейся системы O_1xy задается угловой переменной φ_1. Для ее определения воспользуемся интегралами движения (1.1), (1.2). Рассмотрим сперва общий случай $\mu\sim J_2$, J_* ($0<\mu$, $J_2<J_*$); имеем выражение

$$\varphi_1=\varphi_1(\varphi_2)=\varphi_1{}^0+\int\limits_{\varphi_2^0}^{\varphi_2}\frac{k-(J_2+\mu\cos\varphi)\varphi_2^{\cdot}(\varphi)}{(J_*+2\mu\cos\varphi)\varphi_2^{\cdot}(\varphi)}\,d\varphi \tag{4.1}$$

в котором $\varphi_2^{\cdot}$ определяется согласно (1.3), а $\varphi_{1,2}^{\circ}$ — некоторые фиксированные, соответствующие друг другу (например, начальные) значения переменных $\varphi_{1,2}$. Соотношение (4.1) задает связь между этими переменными, однако оно неудобно для исследования, поскольку интеграл содержит существенную особенность: $\varphi_2^{\cdot}(\pm\varphi_2{}^*)=0$, а переменная φ_2 для колебательных движений немонотонна, см. п. 2. Удобнее перейти к переменным времени t или фазе 2-го звена ψ_2:

$$\varphi_1^{\cdot}(\psi_2)=\frac{k-[J_2+\mu\cos\varphi_2(\psi_2)]\varphi_2^{\circ}(\psi_2)}{J_*+2\mu\cos\varphi_2(\psi_2)}\qquad(\psi_2\equiv\psi)$$

$$\psi_2=\omega_2(\theta-\theta_0)+\psi_2{}^0=\Omega_2(t-t_0)+\psi_2{}^0,\quad \Omega_2=\omega_2(D,\lambda^2)(2e/I)^{1/2}$$

Угловую скорость $\varphi_1^{\cdot}(\psi_2)$, выделяя среднюю и переменную, с нулевым средним, части, приведем к виду, удобному для интегрирования

$$\varphi_1^{\cdot}=\Omega_1(e,k,P)+\Delta_1(\psi_2,e,k,P),\quad \langle\Delta_1\rangle_{\psi_2}\equiv 0$$

$$\varphi_1=\varphi_1(\psi_1,\psi_2)=\varphi_1{}^0+\psi_1+\Phi_1(\psi_2,e,k,P)$$

$$\Omega_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1^{\cdot}(\psi,e,k,P)\,d\psi,\qquad \psi_1=\Omega_1(t-t_0)$$

$$\Phi_1=\int\limits_{t_0}^{t}\Delta_1(\psi_2{}',e,k,P)\,dt',\qquad \psi_2=\Omega_2(t-t_0)+\psi_2{}^0$$

Здесь P — совокупность значений параметров системы; Δ_1, Φ_1 — 2π-периодические функции фазы ψ_2.

Таким образом, при $\Omega_1=0$ движение является одночастотным: $\varphi_{1,2}=\varphi_{1,2}(\psi_2)$, причем переменная φ_1 — колеблющаяся, а φ_2 может быть как колеблющейся, так и вращающейся. В этом случае траектории $(\varphi_1(\psi_2),\varphi_2(\psi_2))$ замкнутые. В инерциальном пространстве O_1xy точки несущего

1-го тела, в частности, лежащие на оси O_1O_2, совершают колебательные движения по дуге радиуса L_1, траектории которых замкнуты при $\Phi_{1\,\max}-\Phi_{1\,\min}\geqslant 2\pi$ ($x=L_1\cos\varphi_1$, $y=L_1\sin\varphi_1$). Точки несомого 2-го звена совершают относительные колебания или вращения с тем же периодом, что приводит к замкнутым траекториям. В частности, для точек оси O_2C получим $x=L_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+l_1\cos\varphi_1$, $y=L_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)+l_1\sin\varphi_1$.

Далее, если $\Omega_1\neq 0$, то в общем случае траектории непериодические (незамкнутые), а движение является двухчастотным. Квазипериодические движения имеют место при Ω_1/Ω_2 иррациональном. Условие замкнутости траекторий и выражение для соответствующего периода T_Σ имеют вид

$$\Omega_1/\Omega_2=p/q,\ T_\Sigma=pT_1=qT_2,\ T_{1,2}=2\pi/\Omega_{1,2}$$

$$q\Omega_1(e,\ k,\ P)=p\Omega_2(e,\ k,\ P) \tag{4.2}$$

Здесь p, $q=\pm1, \pm2, \ldots$ — взаимно простые целые числа. При этом должны быть учтены ограничения на множество значений e, k, P, в частности $e\geqslant {}^1/_2k^2(J_*-2\mu)^{-1}$, см. п. 1.

Рассмотрим теперь случай малых значений параметра μ ($\mu\ll J_2$), характеризующего взаимодействие звеньев. В пределе при $\mu=0$ имеем выражения

$$\varphi_2^{\bullet}=\Omega_2^{(0)}(e,\ k,\ P)=\pm f(e,\ k,\ P)=\varphi_2^{\bullet\circ}=\text{const}$$

$$\varphi_2^{\bullet}=\Omega_1^{(0)}(e,\ k,\ P)=(k\mp fJ_2)J_*^{-1}=\varphi_1^{\bullet\circ}=\text{const}$$

$$f=f(e,\ k,\ P)=(2eJ_*-k^2)^{1/2}[J_2(J_*-J_2)]^{-1/2}$$

Отсюда следует, что каждая из переменных φ_1, φ_2 может быть либо постоянной (при $\varphi_1^{\bullet\circ}=0$, $\varphi_2^{\bullet\circ}=0$), либо вращающейся (при $\varphi_1^{\bullet\circ}\neq 0$, $\varphi_2^{\bullet\circ}\neq 0$). Условие периодичности (4.2) (замкнутости) траекторий приводится к соотношениям соответственно через интегралы e, k и угловые скорости $\varphi_{1,2}^{\bullet\circ}$:

$$k=\pm(J_2+J_*p/q)f(e,\ k,\ P),\ \ k^2\leqslant 2eJ_*,\ \ \varphi_1^{\bullet\circ}/\varphi_2^{\bullet\circ}=p/q$$

$$k^2/(2eJ_*)=[1+\rho(1-\rho)(\rho+p/q)^{-2}]^{-1},\ \ 0<\rho=J_2/J_*<1$$

В первом приближении по μ при $\Omega_2^{(0)}\neq 0$ получим выражения для $\varphi_1^{\bullet}$, $\varphi_2^{\bullet}$ и условие замкнутости траекторий

$$\varphi_1^{\bullet}=\Omega_1^{(0)}+\mu(N^2/\Delta J)(\cos\varphi_2^{\circ}-\cos\varphi_2^{(0)})/\Omega_2^{(0)}$$

$$\varphi_2^{\bullet}=\Omega_2^{(0)}-\mu(N^2/\Delta J+\Omega_1^{(0)2}/J_2)(\cos\varphi_2^{0}-\cos\varphi_2^{(0)})/\Omega_2^{(0)}$$

$$q\left(\Omega_1^{(0)}+\frac{\mu}{\Delta J}\frac{N^2}{\Omega_2^{(0)}}\cos\varphi_2^{0}\right)=p\left[\Omega_2^{(0)}-\mu\left(\frac{N^2}{\Delta J\Omega_2^{(0)}}+\frac{\Omega_1^{(0)2}}{J_2\Omega_2^{(0)}}\right)\cos\varphi_2^{0}\right]$$

$$N^2=2\Omega_2^{(0)2}+\Omega_2^{(0)}\Omega_1^{(0)}+\Omega_1^{(0)2},\qquad \Delta J=J_*-J_2>0$$

$$J_*=J_1+J_2+m_2l_1^2,\ \ J_2=J_2^{\circ}+m_2l_2^2,\ \ \mu=m_2l_1l_2$$

Таким образом, в п. 2—4 построены общие периодические и квазипериодические колебательные и вращательные движения невозмущенной консервативной системы, описанной в п. 1. Они представляют прикладной интерес при исследовании движений плоского двузвенника под действием возмущающих и управляющих воздействий (например, в шарнирах O_1, O_2 и со стороны внешней среды). Следует заметить, что эти движения неустойчивы по Ляпунову в обе стороны, т. е. при $t\gtrless 0$. Проведенные исследования непосредственно переносятся на свободную связку твердых тел [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мохамед Э. А., Смольников Б. А.* Свободное движение шарнирной связки двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 28–33.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
3. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
4. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
7. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка. 1971. 440 с.
8. *Моисеев Н. Н.* Асимптотика быстрых вращений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 1. С. 145–158.
9. *Акуленко Л. Д.* Построение вращательных решений для невозмущенных консервативных систем с одной степенью свободы по обратным степеням энергии // Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия. 1967. № 3. С. 103–106.
10. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1978. 224 с.
11. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука. 1977. 342 с.
12. *Акуленко Л. Д.* Исследование автовращательных движений некоторых систем с одной степенью свободы, близких к консервативным // Вестн. МГУ. Сер. физики, астрономия. 1969. № 3. С. 3–10.

Москва, Одесса

Поступила в редакцию
22.VI.1989