

УДК 539.3
© 1991 г.

В. М. ФОМИН

СТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ
И ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН
В ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЯДОМ ОТВЕРСТИЙ

Задачи излучения и дифракции упругих волн в плоскости с периодическим рядом отверстий или включений рассматривались в [1-5]. В перечисленных выше работах исследовались задачи излучения от одинаково нагруженных отверстий или щелей либо дифракции плоских волн на периодическом ряде отверстий или включений. В настоящей статье излагается метод решения более общих задач динамики упругой плоскости с рядом круговых отверстий — когда система нагрузок на отверстиях, вообще говоря, не предполагается обладающей какими-либо симметрическими свойствами; кроме того, сам ряд отверстий может обладать более общим видом симметрии. В основе метода лежит теория линейных представлений групп. Ранее аналогично исследовались динамические контактные задачи [6]. Метод легко обобщается и на случай некруговых отверстий. В [1-5] оставлен открытым вопрос о поведении решения при резонансных частотах, соответствующих «точкам скольжения». Ниже предлагается методика решения этого вопроса.

1. Пусть в начале координат упругой плоскости приложена сила $\mathbf{P}_k = e_k^{i\omega t}$ (e_k — единичный вектор, направленный в сторону оси x_k ; $k=1, 2$). Тензор Грина $\mathbf{G}(x_1, x_2)$, элементами которого G_{jk} являются проекции амплитудного вектора перемещений установившихся колебаний, вызванных силой \mathbf{P}_k , на ось x_j , удовлетворяют уравнению

$$L\mathbf{G}(x_1, x_2) + \rho\omega^2\mathbf{G}(x_1, x_2) = \delta(x_1)\delta(x_2)\mathbf{I} \quad (1.1)$$

Здесь L — дифференциальный оператор $Lu = (\lambda + \mu)g \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu\Delta u$, μ — постоянные Ламе, Δ — оператор Лапласа, ρ — плотность упругой среды, $\mathbf{G}(x_1, x_2)$ — тензор Грина, \mathbf{I} — единичная матрица второго порядка, $\delta(x)$ — дельта-функция.

Произведя над (1.1) двойное преобразование Фурье по x_1 и x_2 , будем иметь

$$F\mathbf{G}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{I} \quad (1.2)$$

$$F = \begin{vmatrix} \rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)\xi_1^2 - \mu\xi_2^2 & \xi_1\xi_2 \\ \xi_1\xi_2 & \rho\omega^2 + (\lambda + 2\mu)\xi_1^2 - \mu\xi_2^2 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{G}(\xi_1, \xi_2)$ — двойная трансформанта Фурье матрицы $\mathbf{G}(x_1, x_2)$.

Из (1.2) получаем $\mathbf{G}(\xi_1, \xi_2) = F^{-1}$. Нетрудно убедиться в том, что элементы матрицы $\mathbf{G}(\xi_1, \xi_2)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} G_{11} &= [-(\lambda + 2\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_1^2) + (\lambda + \mu)\xi_1^2] / F \\ G_{12} &= G_{21} = (\lambda + \mu)\xi_1\xi_2 / F \\ G_{22} &= [-(\lambda + 2\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_1^2) + (\lambda + \mu)\xi_2^2] / F \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$F = \mu(\lambda + 2\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_1^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_2^2)$$

где κ_j ($j=1, 2$) — волновые числа продольных и поперечных упругих волн, c_j ($j=1, 2$) — скорости этих волн: $\kappa_j = \omega/c_j$, $c_1 = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$, $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$.

Заметим, что (1.3) может быть записано в матричном виде так

$$G(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{\rho\omega^2} \left(\frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_1^2} - \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_2^2} \right) X - \frac{1}{\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_2^2)} I \quad (1.4)$$

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

Произведя в (1.4) обратное преобразование Фурье по ξ_2 , получим

$$G(\xi_1, x_2) = -\frac{1}{\mu} Q_2(\xi_1, x_2) I - \frac{1}{\rho\omega^2} D(\xi_1) [Q_1(\xi_1, x_2) - Q_2(\xi_1, x_2)] \quad (1.5)$$

$$Q_j(\xi_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi_2 x_2}}{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \kappa_j^2} d\xi_2 \quad (j=1, 2) \quad (1.6)$$

$$D(\xi_1) = \begin{vmatrix} \xi_1^2 & i\xi_1 \partial / \partial x_2 \\ i\xi_1 \partial / \partial x_2 & -\partial / \partial x_2 \end{vmatrix}$$

При $|\xi_2| < \kappa_j$ подынтегральное выражение в (1.6) имеет полюсы на вещественной оси ξ_2 . Замкнем контур интегрирования, обходя их в соответствии с принципом предельного поглощения снизу при $\xi_2 > 0$ и сверху при $\xi_2 < 0$. Используя лемму Жордана, получаем

$$Q_j(\xi_1, x_2) = 1/2 \cdot \exp(-\gamma_j |x_2|) / \gamma_j, \quad \gamma_j = (\xi_1^2 - \kappa_j^2)^{1/2} \quad (j=1, 2) \quad (1.7)$$

причем $\gamma_j > 0$ при $|\xi_1| > \kappa_j$, $\text{Im } \gamma_j < 0$ при $|\xi_1| < \kappa_j$.

Подставив (1.7) в (1.5), будем иметь ($\delta(x)$ — дельта-функция):

$$G(\xi_1, x_2) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\exp(-\gamma_2 |x_2|)}{\mu \gamma_2} I + \frac{1}{\rho\omega^2} \left[X_1(\xi_1) \frac{\exp(-\gamma_1 |x_2|)}{\gamma_1} - X_2(\xi_1) \frac{\exp(-\gamma_2 |x_2|)}{\gamma_2} \right] \right\} \quad (1.8)$$

$$X_j(\xi_1) = \begin{vmatrix} \xi_1^2 & -i\xi_1 \gamma_j \text{sign } x_2 \\ -i\xi_1 \gamma_j \text{sign } x_2 & -\gamma_j [\gamma_j - 2\delta(x_2)] \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

Тензор Грина $G(x_1, x_2)$ может быть получен из $G(\xi_1, x_2)$ следующим образом:

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_1, x_2) \exp(-i\xi_1 x_1) d\xi_1 \quad (1.10)$$

Рассмотрим систему сил $P_{km} e^{-i\omega t}$ ($k=1, 2$; $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), приложенных в точках $x_m = ml$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; l — вектор, лежащий на оси x_1 и направленный в положительном направлении оси x_k ($k=1, 2$), преобразующихся по неприводимому представлению группы трансляций (сдвигов на вектора, кратные вектору l : $P_{km} = e_k \exp(-im\alpha)$ ($-\pi \leq \alpha \leq \pi$)).

Из (1.9) и принципа суперпозиции вытекает, что амплитудные перемещения, вызванные действием указанной системы сил, определяются тензором (здесь и в дальнейшем $\sum_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty}$):

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{-im\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_1, x_2) \exp[-i\xi_1 (x_1 + ml)] d\xi_1$$

Переставляя местами суммирование и интегрирование и пользуясь формулой

$$\sum_m \exp[-im(\alpha + \xi l)] = \frac{2\pi}{l} \sum_k \delta\left(\xi - \frac{2k\pi - \alpha}{l}\right)$$

приходим к выражению

$$\Gamma(x) = \frac{1}{l} \sum_k G(\xi_k, x_2) \exp(-i\xi_k x_1), \quad \xi_k = \frac{2k\pi - \alpha}{l} \quad (1.11)$$

Подставив (1.9) в (1.11), будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma(x) = & -\frac{1}{2l} \left\{ \frac{1}{\mu} I \sum_k \exp(-\gamma_{2,k} |x_2| - \frac{i\xi_k x_1}{\gamma_{2,k}} + \right. \\ & + \frac{1}{\omega^2} \left[\sum_k X_1(\xi_k) \exp\left(-\gamma_{1,k} |x_2| - \frac{i\xi_k x_1}{\gamma_{1,k}} + \sum_k X_2(\xi_k) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp\left(-\gamma_{2,k} |x_2| - \frac{i\xi_k x_1}{\gamma_{2,k}}\right) \right] \right\} \quad (1.12) \\ & \gamma_{jh} = (\xi_k^2 - \kappa_j^2)^{1/2} \quad (j=1, 2) \end{aligned}$$

Из (1.12) следует, что $\Gamma(x)$ обращается в бесконечность при $\gamma_{jh}=0$ ($j=1, 2; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Это означает, что частоты $\omega_{jh} = c_j |2k\pi - \alpha|/l$ ($j=1, 2; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются резонансными (точками скольжения [5]). Они совпадают с частотами зашоривания [7] полосы $-l/2 \leq k \leq l/2$ с граничными условиями

$$Z(l/2, x_2) = e^{-i\alpha} Z(-l/2, x_2) \quad (Z = u_1, u_2, \sigma_1, \tau_{12}) \quad (1.13)$$

(из u_j — компоненты перемещения, σ_1, τ_{12} — напряжения на площадке с нормалью x_1). Действительно, для плоских волн с потенциалами $\psi^{(j)} = \exp(\pm i x_1 (x_j^2 - \xi^2)^{1/2} + i x_2 \xi)$ (ξ — постоянная распространения волны вдоль оси x_2), условия (1.13) дают $l(\kappa_j^2 - \xi^2)^{1/2} = |-\alpha + 2k\pi|$. Отсюда получаем дисперсионное соотношение $\kappa_j^2 = \xi^2 + (2k\pi - \alpha)^2/l^2$. При $\xi=0$ и будем иметь $\omega_{jh} = c_j |2k\pi - \alpha|/l$. Рассмотрим ряд

$$S_j(x_1, |x_2|) = \sum_k \exp(-\gamma_{jh} |x_2| - i\xi_k x_1) / \gamma_{jh} \quad (1.14)$$

Для того чтобы его просуммировать, выведем формулу, которая является некоторым обобщением формулы Эйлера — Маклорена [8].

Пусть $f(\tau)$ $m+1$ — раз непрерывно дифференцируема на $n \leq \tau \leq N+1$. Очевидно:

$$\sum_{h=n}^N f(h) = \int_n^{N+1} f(\tau) d\tau + \sum_{h=n}^N \left[f(h) - \int_{h-k}^{h+k} f(\tau) d\tau \right] \quad (1.15)$$

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа [8], приводим (1.15) к виду

$$\begin{aligned} \sum_{h=n}^N f(h) = & \int_n^{N+1} f(\tau) d\tau - \\ & - \sum_{p=1}^m \frac{1}{(p+1)!} \sum_{h=n}^N f^{(p)}(h) - \frac{1}{(m+1)!} \sum_{h=n}^N f^{(m+1)}(h + \theta_{0,h}) \quad (1.16) \end{aligned}$$

Заменяя последовательно суммы $\sum f^{(p)}(k)$ ($k=n-N$) выражениями, полученными из (1.16) заменой $f(\tau)$ на $f^{(p)}(\tau)$, после некоторых преобразований найдем (B_p — числа Бернулли):

$$\sum_{k=n}^N f(k) = \int_n^{N+1} f(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{j_0} A_j [f^{(j-1)}(N+1) - f^{(j-1)}(n)] - \sum_{j=0}^{j_0} A_j \left\{ \sum_{p=j_0+1}^m \frac{1}{(p-j+1)!} \sum_{k=n}^N f^{(p)}(k) + \frac{1}{(m-j+2)!} \sum_{k=n}^N f^{(m+1)}(k+\theta_{j,k}) \right\} \quad (0 \leq \theta_{j,k} \leq 1) \quad (1.17)$$

$$A_0=1, A_1=-1/2, A_{2p-1}=0 \quad (p>1), A_{2p} = (-1)^{p-1} B_p / (2p)! \quad (p \geq 1)$$

При $m=j_0$ первое слагаемое в фигурных скобках следует положить равным нулю, и (1.17) перейдет в известную формулу Эйлера — Маклорена. При фиксированном j_0 и равномерной ограниченности $f^{(p)}(\tau)$ ($p=j_0+1, j_0+2, j_0+3, \dots$), на отрезке $[n, N+1]$ неограниченное увеличение m приводит к тому, что второе слагаемое в фигурных скобках становится сколь угодно малым. В дальнейшем полагаем m достаточно большим для того, чтобы можно было пренебречь этим слагаемым. Заметим, что формула (1.17) справедлива на бесконечном или полубесконечном интервалах, если $f^{(p)}(\tau)$ ($p=0, 1, 2, \dots$) интегрируемы на этих интервалах.

Используя формулу (1.17) при $n=-\infty$ и $N=\infty$, будем иметь

$$S_j(x_1, |x_2|) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\tau, x_1, |x_2|) d\tau - \sum_{p=j_0+1}^m \sum_{q=0}^{j_0} \frac{A_q}{(p-q+1)!} \sum_k f_j^{(p)}(k, x_1, |x_2|) \quad (1.18)$$

$$f_j(\tau, x_1, |x_2|) = \exp(-\gamma_j |x_2| - i\xi x_1) / \gamma_j, \quad \gamma_j = \sqrt{\xi^2 - \kappa_j^2}, \quad \xi = (2\pi\tau - \alpha) / l$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\tau, x_1, |x_2|) d\tau = \frac{l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_j |x_2| - i\xi x_1)}{\gamma_j} d\xi \quad (1.19)$$

Применяя двойное преобразование Фурье к уравнению Гельмгольца $\Delta g(x_1, x_2) + \kappa_j^2 g(x_1, x_2) = \delta(x_1) \delta(x_2)$, представляем его фундаментальное решение в виде

$$g(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(\xi_1, x_2) \exp(-i\xi_1 x_1) d\xi_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\sqrt{\xi_1^2 - \kappa_j^2} |x_2| - i\xi_1 x_1)}{\sqrt{\xi_1^2 - \kappa_j^2}} d\xi_1 \quad (1.20)$$

С другой стороны, известно [9], что с учетом условий излучения ($H_0(z)$ — функция Ханкеля первого рода):

$$g(x_1, x_2) = {}^1/4 H_0(\kappa_j r) / i; \quad r = (x_2^2 + x_1^2)^{1/2} \quad (1.21)$$

Из (1.19), (1.20) и (1.21) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\tau, x_1, |x_2|) d\tau = \frac{il}{9} H_0(\kappa_j r) \quad (1.22)$$

Учитывая, что [10]:

$$H_0(z) = J_0(z) + \frac{2i}{\pi} \left[J_0(z) \ln \frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} \psi(k+1) \right]$$

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}$$

(\$J_n(x)\$ — функция Бесселя первого рода, \$\psi(x)\$ — логарифмическая производная гамма-функции), можем записать

$$S_j(x_1, |x_2|) = -\frac{l}{\pi} \left[1 - \left(\frac{\kappa_j r}{2} \right)^2 \right] \ln r + R_j(x_1, |x_2|) \quad (1.23)$$

$$R_j(x_1, x_2) = -\frac{l}{\pi} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\kappa_j r}{2} \right)^{2k} \ln r + J_0(\kappa_j r) \ln \frac{\kappa_j}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\kappa_j r}{2} \right)^{2k} \psi(k+1) \right] - \sum_{p=j_0+1}^m \sum_{q=1}^{j_0} \frac{A_q}{(p-q+1)!} \sum_k f_j^{(p)}(k, x_1, x_2) + \frac{il}{2} J_0(\kappa_j r) \quad (1.24)$$

Нетрудно убедиться в том, что \$|f_j^{(p)}(k, x_1, x_2)| = O(1/k^{p+1})\$ при \$k \to \infty\$, поэтому \$\sum f_j^{(p)}(k, x_1, x_2)\$ представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую функцию переменных \$x_1\$ и \$x_2\$ при \$p \ge 2\$. Таким образом, в (1.24) достаточно положить \$j_0=1\$, чтобы \$R_j(x_1, x_2)\$ оказалась дважды непрерывно дифференцируемой по \$x_1\$ и \$x_2\$.

Из формулы (1.12) и (1.14) следует, что

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2l} \left[\frac{1}{\mu} S_2(x_1, |x_2|) \mathbf{I} - \frac{1}{\rho \omega^2} \mathbf{S}(x_1, |x_2|) \right] \quad (1.25)$$

$$\mathbf{S}(x_1, |x_2|) = \begin{vmatrix} S_1^{(2,0)} - S_2^{(2,0)} & S_1^{(1,1)} - S_2^{(1,1)} \\ S_1^{(1,1)} - S_2^{(1,1)} & S_1^{(0,2)} - S_2^{(0,2)} \end{vmatrix}$$

$$S_j^{(p,q)} = \partial^{p+q} S_j(x_1, |x_2|) / (\partial x_1^p \partial x_2^q) \quad (j=1, 2; p, q=0, 1, 2)$$

Из (1.23) получаем

$$\Gamma_1(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\mu} \ln r \mathbf{I} + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{4\rho\omega^2} \left(\frac{2 \cos^2 \varphi + 2 \ln r + 1}{\sin 2\varphi} \quad \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin^2 \varphi + 2 \ln r + 1} \right) \right] + \mathbf{R}(x) \quad (1.26)$$

Здесь \$r, \varphi\$ — полярные координаты точки \$\mathbf{x}=(x_1, x_2)\$ (в дальнейшем \$\varphi\$ будем называть аргументом \$\mathbf{x}\$, \$\varphi = \arg \mathbf{x}\$, а

$$\mathbf{R}(x) = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{\kappa_2 r}{2} \right)^2 \ln r + \frac{1}{l} R_2(x_1, |x_2|) \right] \mathbf{I} + \frac{1}{2l\rho\omega^2} \begin{pmatrix} R_1^{(2,0)} - R_2^{(2,0)} & R_1^{(1,1)} - R_2^{(1,1)} \\ R_1^{(1,1)} - R_2^{(1,1)} & R_1^{(0,2)} - R_2^{(0,2)} \end{pmatrix}$$

$$R_j^{(p,q)} = \partial^{p+q} / (\partial x_1^p \partial x_2^q) R_j(x_1, |x_2|)$$

Оператор напряжения [11]:

$$\mathbf{T}_x = 2\mu \partial / \partial \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot}) \quad (1.27)$$

который переводит перемещение в точке x в напряжение на площадке с нормалью n в этой точке, может быть записан в следующем виде:

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{T}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{T}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos \theta_0 & \mu \sin \theta_0 \\ \lambda \sin \theta_0 & \mu \cos \theta_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \mu \sin \theta_0 & \lambda \cos \theta_0 \\ \mu \cos \theta_0 & (2\mu + \lambda) \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

где θ_0 — угол между n и осью x_1 .

Используя равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

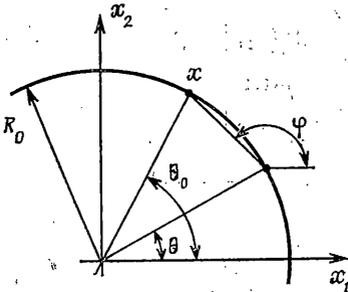
$$\mathbf{T}_x = (\mathbf{T}_1 \cos \varphi + \mathbf{T}_2 \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} (-\mathbf{T}_1 \sin \varphi + \mathbf{T}_2 \cos \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x \mathbf{F}(x) = & \frac{1}{2\pi r} \left[\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{2\rho\omega^2} \right) (\mathbf{T}_1 \cos \varphi + \mathbf{T}_2 \sin \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{2\rho\omega^2} (-\mathbf{T}_1 \sin \varphi + \mathbf{T}_2 \cos \varphi) \mathbf{C}_{2\varphi} \right] + \mathbf{H}(x) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{C}_\varphi = \begin{vmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{T}_1 \mathbf{R}^{(1,0)} + \mathbf{T}_2 \mathbf{R}^{(0,1)}, \quad \mathbf{R}^{(p,q)} = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \mathbf{R}(x)$$



Фиг. 1.

Нетрудно убедиться в том, что элементы матрицы $\mathbf{H}(x)$ представляют собой ограниченные интегрируемые функции переменных x_1, x_2 .

Пусть теперь вышеуказанная система сил $\mathbf{P}_{hm} e^{-i\omega t}$ приложена в точках $y_m = y + ml$ и пусть y и точка наблюдения x лежат на окружности радиуса R_0 (фиг. 1). Нетрудно убедиться в том, что угол $\varphi = \arg(x - y)$ равен

$$\varphi = \frac{1}{2}(\theta + \theta_0) + \frac{1}{2}\pi \quad (0 < \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) \leq \pi)$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\theta + \theta_0) - \frac{1}{2}\pi \quad (\pi < \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta) < 2\pi)$$

Здесь θ, θ_0 — аргументы точек y, x соответственно. Тогда

$$\sin \varphi = -\cos \frac{1}{2}(\theta + \theta_0) \operatorname{sign}(\operatorname{sign} \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)),$$

$$\cos \varphi = \sin \frac{1}{2}(\theta + \theta_0) \operatorname{sign}(\sin \frac{1}{2}(\theta - \theta_0))$$

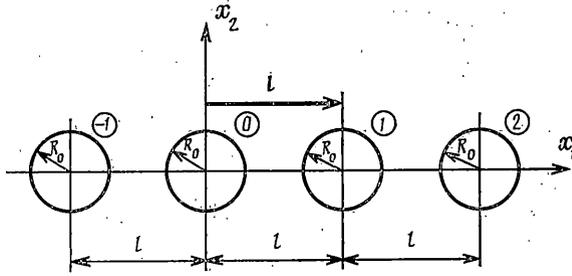
$$r = |x - y| = 2R_0 |\sin \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)| \quad (1.30)$$

$$\sin \varphi / r = -\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta - \theta_0 \cos \theta_0 - \sin \theta_0) / R_0$$

$$\cos \varphi / r = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} \theta - \theta_0 \sin \theta_0 + \cos \theta_0) / R_0$$

$$\sin 2\varphi = -\sin 2\theta_0 - 2\sin \theta - \theta_0 \cos \theta + 3\theta_0$$

$$\cos 2\varphi = -\cos 2\theta_0 + 2\sin \theta - \theta_0 \sin \theta + 3\theta_0$$



Фиг. 2

Из (1.29) и (1.30) получаем

$$T_x \Gamma(x-y) = \frac{1}{4\pi R_0} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{2\rho\omega^2} \right) T^v + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{2\rho\omega^2} T^{vv} \right] + \frac{1}{2R_0} H_1(x-y) \quad (1.31)$$

$$T^v = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (\mu + \lambda) \sin 2\theta_0 & \mu - \lambda - (\mu + \lambda) \cos 2\theta_0 \\ \lambda - \mu - (\mu + \lambda) \cos 2\theta_0 & -(\mu + \lambda) \sin 2\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$T^{vv} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (3\mu + \lambda) \sin 2\theta_0 & -(3\mu + \lambda) \cos 2\theta_0 - (\mu + \lambda) \\ -(3\mu + \lambda) \cos 2\theta_0 + \mu + \lambda & -(3\mu + \lambda) \sin 2\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$H_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{\mu} + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{2\rho\omega^2} \right) (T_1 \cos \theta_0 + T_2 \sin \theta_0) - \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{2\rho\omega^2} (-T_1 \sin \theta_0 + T_2 \cos \theta_0) C(\theta + \theta_0) + \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{\rho\omega^2} (T_1 \cos \theta_0 + T_2 \sin \theta_0) \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\theta - \theta_0}{2} C(\pi - \theta - 3\theta_0) \right] + 4\pi R_0 H(x-y)$$

Учитывая, что $(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)/(2\rho\omega^2) = -(\lambda + \mu)/[2\mu(2\mu + \lambda)]$, после ряда преобразований будем иметь из (1.31):

$$T_x \Gamma(x-y) = \frac{a_0}{4\pi R_0} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} J + \frac{1}{2R_0} H_1(x, y) \quad (1.32)$$

$$a_0 = \frac{\mu}{(2\mu + \lambda)}, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Рассмотрим установившиеся колебания упругой плоскости с периодической системой отверстий (фиг. 2), нагрузка на которых преобразуется по неприводимому представлению группы трансляций (сдвигов вдоль оси x_1 на вектора $m\lambda$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), т. е. удовлетворяют условию (m — номер отверстия, α — вещественный параметр):

$$p_{m+1}(\theta) e^{-i\omega t} = p_m(\theta) e^{-i\omega t} e^{-i\alpha} \quad (-\pi \leq \alpha \leq \pi) \quad (2.1)$$

Эта задача носит название квазипериодической. Она эквивалентна задаче для полосы с одним отверстием и граничными условиями (1.13). Решение задачи будем искать в виде потенциала простого слоя [11] (Ω — окружность радиуса R_0):

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \Gamma(x-y) q(y) d\Omega_y \quad (2.2)$$

Поддействуем на (2.2) оператором (1.27):

$$\mathbf{T}_x \mathbf{u} = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}_x \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) d\Omega_y$$

Переходя к пределу при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \Omega$, будем иметь [11]

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}_x \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) d\Omega_y = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

(индекс у \mathbf{x}_0 опущен, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ — нагрузка на контуре Ω). Подставив (1.32) в (2.3), будем иметь

$$\mathbf{q}(\theta_0) + \frac{a_0}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{\theta-\theta_0}{2} \mathbf{q}(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_1(\theta_0, \theta) \mathbf{q}(\theta) d\theta = \mathbf{p}(\theta_0) \quad (2.4)$$

В (2.4) введены обозначения $\mathbf{q}(\theta_0) = \mathbf{q}(\mathbf{x})$, $\mathbf{p}(\theta_0) = \mathbf{p}(\mathbf{x})$, $\mathbf{H}_1(\theta_0, \theta) = -\mathbf{H}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$). Уравнение (2.4) — сингулярное, содержащее вполне непрерывное слагаемое с ядром $\mathbf{H}_1(\theta_0, \theta)$.

Предположим сначала, что частота нагрузки нерезонансна, т. е. $\omega \neq \omega_{jk}$ ($j=1, 2$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Решение уравнения (2.4) будем искать в виде ряда (\mathbf{q}_m — двумерные векторы):

$$\mathbf{q}(\theta) = \sum_m \mathbf{q}_m e^{im\theta} \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в (2.4) и используя равенства [11]:

$$\int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{\theta-\theta_0}{2} d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \exp(im\theta) \text{ctg} \frac{\theta-\theta_0}{2} d\theta = 2\pi i \exp(im\theta_0) \quad (m \neq 0) \quad (2.6)$$

Получим

$$\left(\mathbf{I} + \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \right) \sum_m \mathbf{q}_m \exp(im\theta_0) - \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \mathbf{q}_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_1(\theta_0, \theta) \sum_m \mathbf{q}_m \exp(im\theta) d\theta = \mathbf{p}(\theta_0)$$

После умножения слева на $\mathbf{I}^{-1/2} ia_0 \mathbf{J} / \pi$ приходим к следующему равенству

$$\left(1 - \frac{a_0^2}{4\pi^2} \right) \sum_m \mathbf{q}_m \exp(im\theta_0) - \left(\mathbf{I} - \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \right) \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \mathbf{q}_0 + \frac{1}{2\pi} \sum_m \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{I} - \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \right) \mathbf{H}_1(\theta_0, \theta) \mathbf{q}_m \exp(im\theta) d\theta = \left(\mathbf{I} - \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \right) \mathbf{p}(\theta_0) \quad (2.7)$$

Умножив (2.7) на $\exp(-in\theta_0)/\pi$ и проинтегрировав по θ_0 от 0 до 2π , будем иметь (δ_{mn} — символ Кронекера):

$$\mathbf{q}_n + \sum_m \mathbf{A}_{nm} \mathbf{q}_m = \mathbf{p}_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.8)$$

$$A_{nm} = \frac{1}{4\pi^2 + a_0^2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{I} - \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \right) \mathbf{H}_1(\theta_0, \theta) \exp(im\theta - in\theta_0) d\theta d\theta_0 - \right. \\ \left. - \frac{ia_0}{2\pi} \left(\mathbf{J} + \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{I} \right) \delta_{n_0} \delta_{m_0} \right] \\ p_n = \frac{2\pi}{4\pi^2 + a_0^2} \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{I} - \frac{ia_0}{2\pi} \mathbf{J} \right) p(\theta_0) \exp(-in\theta_0) d\theta_0$$

Асимптотическое поведение коэффициентов A_{nm} при больших $n^2 + m^2$ зависит от поведения интеграла

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_1(\theta_0, \theta) \exp(im\theta - in\theta_0) d\theta d\theta_0$$

а оно в свою очередь от поведения величин типа

$$I_{jnm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} (r^2 \ln r) \exp(im\theta - in\theta_0) d\theta d\theta_0 \quad (2.9)$$

$$f_{jnm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(\tau, x_1 - y_1, |x_2 - y_2|) \exp(im\theta - in\theta_0) d\theta d\theta_0 \quad (2.10)$$

$$x_1 = R_0 \cos \theta_0, y_1 = R_0 \sin \theta_0, x_2 = R_0 \cos \theta,$$

$$y_2 = R_0 \sin \theta$$

Заметим, что [12]:

$$\ln r = \ln R_0 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2[1 - \cos(\theta - \theta_0)]} = \ln R_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(\theta - \theta_0)}{k} \quad (2.11)$$

Подставив (2.11) в (2.9), найдем

$$|I_{jnm}| \sim 2R_0 \pi^2 [\delta_{m, n-1} + (-1)^j \delta_{m, n+1}] / n^2 \quad (2.12)$$

Дважды интегрируя по частям по θ в выражении (2.10), получим

$$f_{jnm} = -\frac{R_0}{\gamma_j m^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{-2\gamma_j \delta(\sin \theta_0 - \sin \theta) \cos^2 \theta - \gamma_j \operatorname{sign}(\sin \theta_0 - \sin \theta) \times \\ \times (\sin \theta - \cos \theta) - i\zeta(\cos \theta + \sin \theta)\} \exp[-\gamma_j R_0 |\sin \theta_0 - \sin \theta| - \\ - i\zeta R_{00}(\cos \theta_0 - \cos \theta) + i(m\theta - n\theta_0)] d\theta d\theta_0 \quad (2.13)$$

Следует отметить, что интегрирование первого слагаемого в фигурных скобках дает однократный интеграл

$$-2\gamma_j \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta_0 \{ \exp[-i(m-n)\theta_0] + (-1)^m \exp[-2i\zeta R_0 \cos \theta_0 - i(m+n)\theta_0] \} d\theta_0$$

который при помощи интегрального представления Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \sin \theta - in\theta) d\theta \quad (2.14)$$

приводится к виду

$$-\gamma_j \{ \delta_{mn} + (\delta_{m, n+2} + \delta_{m, n-2})/2 + (-1)^n i^{m+n} \times \\ \times [2J_{m+n}(2\xi R_0) - J_{m+n-2}(2\xi R_0) - \\ - J_{m+n+2}(2\xi R_0)] \}$$

Учитывая, что $J_n(x) \sim 1/n!$ при $n \rightarrow \infty$, и производя двукратное интегрирование по частям по θ_0 остальных слагаемых в (2.13), находим

$$f_{jnm} \sim \frac{R_0}{m^2} \left[\delta_{mn} + \frac{\delta_{m, n+2} + \delta_{m, n-2}}{2} - \pi (-1)^n \frac{i^{m+n}}{(m+n-2)!} \right] + \\ + \frac{a_{jmn}}{\gamma_j m^2 n^2}, \quad |a_{jmn}| \leq 4\pi^2 \quad (2.15)$$

Из (2.12) и (2.15) следует, что

$$\sum_{m,n} |l_{jnm}| < \infty, \quad \sum_{m,n} |f_{jnm}| < \infty$$

Совершенно аналогично доказывается наличие подобных неравенств для остальных интегралов, образующих величины A_{nm} . Это означает, что $\sum |A_{nm}| < \infty$, откуда вытекает нормальность системы (2.8) и возможность решения ее методом редукции.

3. Предположим теперь, что $\omega \rightarrow \omega_{2, -k}$, где k фиксировано. Тогда $\gamma_{2, k} \rightarrow 0$, а соответствующее слагаемое в (1.14) стремится к бесконечности. Отсюда следует, что $S_j(x_1, |x_2|)$ представимо в следующем виде:

$$S_j(x_1, |x_2|) = -l\pi^{-1} [1 - (\kappa_f r)^2/4] \ln r + f_2(k, \\ x_1, |x_2|) + R_j'(x_1, |x_2|)$$

где $R_j'(x_1, |x_2|)$ отличается от $R_j(x_1, |x_2|)$ отсутствием неограниченно возрастающего слагаемого $f_2(k, x_1, |x_2|)$. Так как дифференцирование $f_2(k, x_1, |x_2|)$ по x_2 приводит к появлению множителя $\gamma_{2, k}$, стремящегося к нулю, то выделяя аналогичным образом в (1.32) неограниченно возрастающее слагаемое, приходим к следующему выражению:

$$\mathbf{T}_x \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{a_0}{4\pi R_0} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \mathbf{J} - \frac{i\zeta_k}{2l\gamma_{2, k}} g_k(\theta_0, \theta) \mathbf{T}_1 \mathbf{M} + \frac{1}{2R_0} \mathbf{H}_1'(\theta_0, \theta) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} +1/\mu - \zeta_k^2/\rho\omega^2 & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1'(\theta_0, \theta) = \mathbf{H}_1(\theta_0, \theta) + iR_0 \zeta_k g_k(\theta_0, \theta) \mathbf{T}_1 \mathbf{M} / (l\gamma_{2, k})$$

$$g_k(\theta_0, \theta) = \exp[-\gamma_{2, k} R_0 (\sin \theta_0 - \sin \theta)] - \\ - i\zeta_k R_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta)]$$

С помощью (3.1) уравнение (2.3) может быть записано так

$$\mathbf{q}(\theta_0) + \frac{a_0}{4\pi^2} \mathbf{J} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \mathbf{q}(\theta) d\theta - \frac{i\zeta_k R_0}{2\pi l\gamma_{2, k}} \mathbf{T}_1 \mathbf{M} \int_0^{2\pi} g_k(\theta_0, \theta) \mathbf{q}(\theta) d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_1'(\theta_0, \theta) \mathbf{q}(\theta) d\theta = \mathbf{p}(\theta_0) \quad (3.2)$$

Разложив $\exp(-\gamma_{2,h} R_0 |\sin \theta_0 - \sin \theta|)$ в ряд, будем иметь

$$\exp(-\gamma_{2,h} R_0 |\sin \theta_0 - \sin \theta|) = 1 + h_h(\theta_0, \theta) \gamma_{2,h} \quad (3.3)$$

$$h_h(\theta_0, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-R_0)^m |\sin \theta_0 - \sin \theta|^m \gamma_{2,h}^{m-1}}{m!}$$

Подставив (3.3) в (3.2), получим

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{q} = \mathbf{b}, \quad \varepsilon = \gamma_{2,h} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-i\zeta_h R_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta)] \mathbf{q}(\theta) d\theta \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_h(\theta_0, \theta) \mathbf{q}(\theta) d\theta - \frac{l}{i\zeta_h R_0} (\mathbf{T}_1 \mathbf{M})^{-1} \times$$

$$\times \left[\mathbf{q}(\theta_0) + \frac{a_0}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \mathbf{q}(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{H}_1'(\theta_0, \theta) \mathbf{q}(\theta) d\theta \right] \quad (3.6)$$

$$\mathbf{b} = -\frac{2\pi l}{i\zeta_h R_0} (\mathbf{T}_1 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{p}(\theta_0)$$

Заметим, что \mathbf{A} — конечномерный оператор, переводящий пространство $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ в двумерное подпространство, натянутое на векторы $\mathbf{e}_j \exp(-i\zeta_h R_0 \cos \theta_0)$ ($j=1, 2$; $\mathbf{e}_1=(1, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1)$). Через $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ обозначено гильбертово пространство интегрируемых с квадратом двумерных векторов со скалярным произведением $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} [p_1(\theta) \bar{q}_1(\theta) + p_2(\theta) \bar{q}_2(\theta)] d\theta$ (p_j, q_j) — элементы векторов $\mathbf{p}(\theta)$, $\mathbf{q}(\theta)$; черта означает комплексное сопряжение). Оператор \mathbf{B} непрерывно зависит от ε , поэтому для малых ε можно положить $\mathbf{B} = \mathbf{B}(0)$. Умножив (3.4) на ε , будем иметь

$$(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B}) \mathbf{q} = \varepsilon \mathbf{b} \quad (3.7)$$

Заметим, что $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ может быть представлено в виде

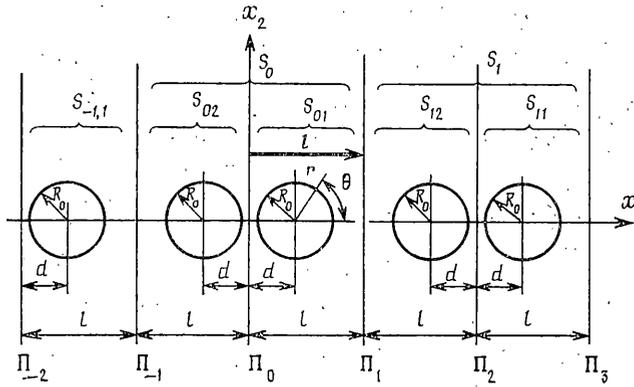
$$L_2^{(2)}(0, 2\pi) = R + N^* = R^* + N \quad (3.8)$$

Здесь R и R^* — области значений оператора \mathbf{A} и сопряженного к нему оператора \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{A}^* \mathbf{q} = \int_0^{2\pi} \exp[i\zeta_h R_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta)] \mathbf{q}(\theta) d\theta$$

а N и N^* — их нуль-пространства. Из (3.8) следует, что в $L_2^{(2)}(0, 2\pi)$ можно построить два ортонормированных базиса $\{s_{mj}\}$ и $\{r_{mj}\}$ следующим образом s_{mj} ($m=0$; $j=1, 2$) $\in R$, s_{mj} ($m \neq 0$; $j=1, 2$) $\in N^*$, r_{mj} ($m=0$; $j=1, 2$) $\in R^*$, r_{mj} ($m \neq 0$; $j=1, 2$) $\in N$. Например, можно положить

$$s_{mj} = \mathbf{e}_j \exp(-i\zeta_h R_0 \cos \theta - i n \theta), \quad r_{mj} = \mathbf{e}_j \times \\ \times \exp(i\zeta_h R_0 \cos \theta + i n \theta)$$



Фиг. 3

Решение уравнения (3.7) будем искать в виде ряда

$$q(\theta) = \sum_m \sum_{j=1}^2 q_{mj} r_{mj}(\theta) \quad (3.9)$$

Подставив (3.9) в (3.7) и умножив скалярно на $s_n(\theta_0)$, получим

$$q_{0l} + \varepsilon \sum_m \sum_{j=1}^2 q_{mj} (\mathbf{B}r_{mj}, \mathbf{s}_{0l}) = \varepsilon (\mathbf{b}, \mathbf{s}_{0l}) \quad (l=1, 2) \quad (3.10)$$

$$\sum_m \sum_{j=1}^2 q_{mj} (\mathbf{B}r_{mj}, \mathbf{s}_{nl}) = (\mathbf{b}, \mathbf{s}_{nl}) \quad (n \neq 0; \quad l=1, 2)$$

Исключая из (3.10) q_{0l} ($l=1, 2$), приходим к следующей системе линейных уравнений относительно q_{mj} ($m=\pm 1, \pm 2, \dots; j=1, 2$):

$$\sum_m' \sum_{j=1}^2 B_{mjnl} q_{mj} = b_{nl} \quad (n=\pm 1, \pm 2, \dots; l=1, 2) \quad (3.11)$$

(штрих у знака суммы означает, что в ней отсутствует слагаемое с $m=0$).
Здесь

$$B_{mjnl} = (\mathbf{B}r_{mj}, \mathbf{s}_{nl}) + \varepsilon \sum_{p=1}^2 (\mathbf{B}r_{mj}, \mathbf{s}_{0p}) C_{pnl} \quad (3.12)$$

$$C_{1, n, l} = \{ -[1 + \varepsilon (\mathbf{B}r_{02}, \mathbf{s}_{02})] (\mathbf{B}r_{01}, \mathbf{s}_{nl}) + \varepsilon (\mathbf{B}r_{01}, \mathbf{s}_{02}) (\mathbf{B}r_{02}, \mathbf{s}_{nl}) \} / C$$

$$C_{2, n, l} = \{ \varepsilon (\mathbf{B}r_{02}, \mathbf{s}_{01}) (\mathbf{B}r_{01}, \mathbf{s}_{nl}) - [1 + \varepsilon (\mathbf{B}r_{01}, \mathbf{s}_{01})] (\mathbf{B}r_{02}, \mathbf{s}_{nl}) \} / C$$

$$C = 1 + \varepsilon [(\mathbf{B}r_{01}, \mathbf{s}_{01}) + (\mathbf{B}r_{02}, \mathbf{s}_{02})] + \varepsilon^2 [(\mathbf{B}r_{01}, \mathbf{s}_{01}) (\mathbf{B}r_{02}, \mathbf{s}_{02}) - (\mathbf{B}r_{01}, \mathbf{s}_{02}) (\mathbf{B}r_{02}, \mathbf{s}_{01})]$$

$$b_{nl} = (\mathbf{b}, \mathbf{s}_{nl}) + \varepsilon \sum_{p=1}^2 (\mathbf{b}, \mathbf{s}_{0p}) C_{pnl}$$

Из (3.6) видно, что оператор B так же, как и $T_x \Gamma(x-y)$ представим в виде суммы сингулярного и вполне непрерывного слагаемых. Из (3.6) вытекает также сходимость суммы $\sum \Sigma |B_{mjnl}|$, так как она следует из существования интегралов (2.9), (2.10). Это означает, что система (3.11) эквивалентна нормальной при любом достаточно малом значении ε , включая и $\varepsilon=0$. Поэтому уравнение (2.4) имеет ограниченное решение при резонансном значении частоты $\omega=\omega_{2,h}$. Аналогичный результат имеет место и при $\omega=\omega_{1,h}$.

4. Изложенный алгоритм легко обобщается на случай квазисимметрической (обобщенно-симметрической) задачи, когда отверстия обладают симметрией группы C_{1h}^1 (фиг. 3), а нагрузка на них преобразуется по неприводимому представлению этой группы [6]. Группа C_{1h}^1 состоит из трансляций (сдвигов) t_m на векторы $2ml$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и отражений в плоскостях Π_m , перпендикулярных оси x_1 и пересекающих ее в точках $x_1=ml$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Будем называть основной и обозначать символом S_0 полосу $-l \leq x_1 \leq l$, а элементарными — полосу S_{01} ($0 \leq x_1 \leq l$) и полосы S_{mn} , получающиеся из нее при помощи преобразований из группы C_{1h}^1 : $S_{mn} = g_{mn} S_{01}$, $g_{mn} = t_m \Pi_0^{n-1}$ ($n=1, 2$).

Пусть на упругую плоскость действует система сосредоточенных сил, преобразующаяся по неприводимому представлению группы C_{1h}^1 :

$$P_{nj}^{(r)}(x) = e_r g_j \delta_n(x_0) \exp[-i(-1)^{j-1} \alpha m] \quad (n, j=1, m_\alpha) \quad (4.1)$$

Здесь m_α — размерность представления, $m_\alpha=1, 2$, e_r — единичный вектор, направленный вдоль оси x_r ($r=1, 2$); $\delta_n(x_0)$ — функция, заданная на S_0 : $\delta_n(x_0)=1$ при $x_0 \in S_{0n}$, $\delta_n(x_0)=0$ при $x_0 \notin S_{0n}$; g_j — элемент точечной группы C_{2v} , состоящей из двух элементов — тождественного преобразования и отражения в плоскости Π_0 ; $x=t_m x_0$, $x \in S_{mn}$. Обозначим через $\Gamma_{nj}(x_0)$ тензор Грина: $\Gamma_{nj}(x_0) = [u_p^{(r)}]_{p,r=1}^2$ ($u_p^{(r)}$ ($p=1, 2$) — элементы вектора перемещения в точке $x=0$, вызванного нагрузкой (4.11)).

Действуя аналогично п. 1, можно убедиться в том, что

$$\Gamma_{nj}(x_0) = \frac{1}{2l} \sum_k G[(-1)^{j-1} \xi_k, x_2] E_{n-j} \exp[i(-1)^n \xi_k x_1] \quad (4.2)$$

$$E_n = \begin{vmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \xi_k = 2k\pi - \alpha / (2l)$$

Назовем групповым тензором Грина квазисимметрической задачи матрицу

$$\Gamma(x_0) = \Gamma_{11}(x_0) (m_\alpha=1), \quad \Gamma(x_0) = \begin{vmatrix} \Gamma_{11}(x_0) & \Gamma_{21}(x_0) \\ \Gamma_{12}(x_0) & \Gamma_{22}(x_0) \end{vmatrix} (m_\alpha=2)$$

Решение задачи будем искать в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_\Omega \Gamma(x-y) q(y) d\Omega_y \quad (4.3)$$

Здесь $u(x)$ — вектор-столбец, состоящий из m_α векторов перемещений $u_j(x)$ ($j=1, m_\alpha$), преобразующихся по неприводимому представлению группы C_{1h}^1 . Аналогично вводится вектор нагрузок $g(y)$.

Подействуем оператором

$$T_x = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div} + \mu (n \times \operatorname{rot}) & 0 \\ 0 & 2\mu \frac{\partial}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div} + \mu (n \times \operatorname{rot}) \end{pmatrix}$$

на (4.3) и перейдем к пределу при $x \rightarrow x_0$ ($x \in \Omega$). Будем, как и в разделе 2, иметь

$$q(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} T_x F(x-y) q(y) d\Omega_y = p_0(x), \quad x \in \Omega$$

Так же как и (2.3), оно может быть приведено к сингулярному интегральному уравнению типа (2.4), а затем к бесконечной линейной системе нормального типа. Аналогично п. 2 получаем результаты в случаях, когда частота нагрузки совпадает с одной из резонансных частот.

5. Рассмотренная задача может быть решена и с помощью метода разделения переменных. Волновые потенциалы продольных и поперечных упругих волн, излучаемых одним отверстием в соответствии с принципом излучения ищутся в виде следующих рядов [4]:

$$\psi^{(p)}(x) = \sum_n a_n^{(p)} H_n(\kappa_p r) e^{in\theta} \quad (p=1, 2) \quad (5.1)$$

Здесь $H_n(r)$ — функция Ханкеля первого рода, r и θ — полярные координаты точки x .

Предположим, что нагрузка на системе отверстий (фиг. 3) преобразуется по неприводимому представлению группы C_{1h}^1 . Складывая потенциал волн, излучаемых отверстиями, используя представление (5.1) и теоремы сложения для бесселевых функций, приходим к следующему выражению для потенциалов (a_{jk} — искомые коэффициенты):

$$\psi_q^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^{m\alpha} \sum_n \left[\delta_{qj} a_{jn}^{(p)} H_n(\kappa_p r) + \sum_h a_{jh}^{(p)} L_{qjnh}^{(p)} J_n(\kappa_p r) \right] \exp(in\theta) \quad (p=1, 2; q=1, m\alpha) \quad (5.2)$$

$$L_{qjnh}^{(p)} = \delta_{qj} [(-1)^{n+h} V_{h-n}(2\kappa_p l, 0, (-1)^q \alpha) + V_{h-n}(2\kappa_p l, 0, (-1)^{q+1} \alpha)] +$$

$$+ (-1)^{p-1} (1 - \delta_{qj}) [(-1)^{n+h} H_{h+n}(2\kappa_p d) + V_{h+n}(2\kappa_p l, -d/l, (-1)^q \alpha) +$$

$$+ (-1)^{n+h} V_{h+n}(2\kappa_0 l, d/l, (-1)^{q+1} \alpha)]$$

$$V_n(\xi, \eta, \alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} H_n[\xi(m+\eta)] e^{im\alpha}$$

Получая из потенциалов (5.2) известными способами [7] выражения для напряжений, подставляя их в граничные условия на основном отверстии (расположенном на S_{01}):

$$\sigma_r(R_0, \theta) = 2\mu P^{(1)}(\theta), \quad \tau_{r\theta}(R_0, \theta) = 2\mu P^{(2)}(\theta) \quad (5.3)$$

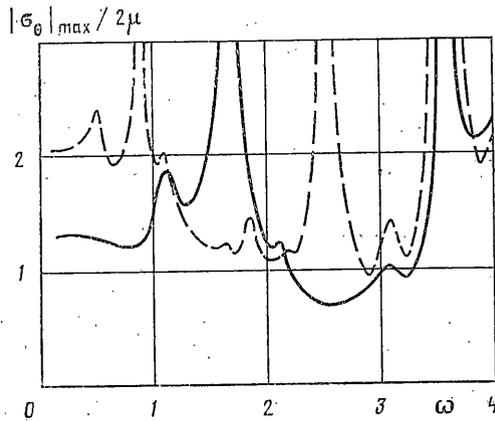
и приравнивая коэффициенты рядов Фурье правой и левой частей формул (5.3), приходим к бесконечной линейной системе уравнений относительно $a_{jk}^{(p)}$

$$\sum_{p=1}^2 \sum_{j=1}^{m\alpha} \left(\delta_{qj} a_{jn}^{(p)} G_{sp1n} + \sum_h a_{jh}^{(p)} L_{qjnh}^{(p)} G_{sp2n} \right) = P_{qn}^{(s)} \quad (5.4)$$

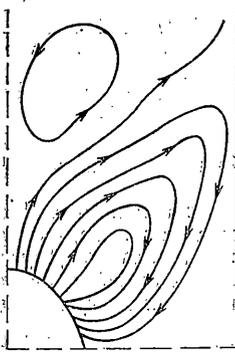
$$(q=1, m\alpha; s=1, 2; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$G_{ssjn} = (b_s \kappa_s^2 - n^2/R_0^2) Z_{jn}(\kappa_s R_0) + \kappa_s/R_0 Z_{jn}'(\kappa_s R_0)$$

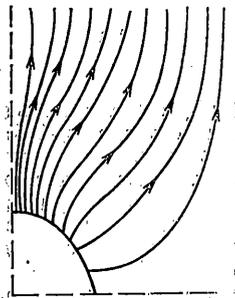
$$G_{spjn} = (-1)^{s-1} [in/R_0^2 Z_{jn}(\kappa_p R_0) - in\kappa_p/R_0 Z_{jn}'(\kappa_p R_0)] \quad (s \neq p)$$



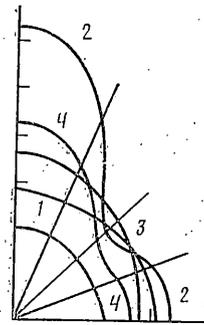
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

$$Z_{jn}'(x) = 1/2 [Z_{j, n-1}(x) + Z_{j, n+1}(x)]$$

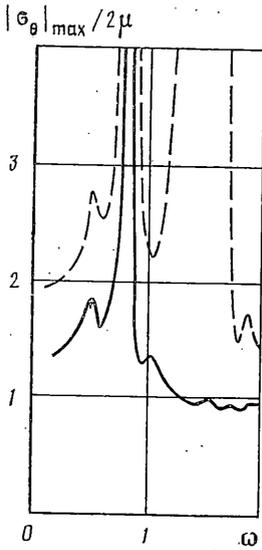
$$Z_{1, n}(x) = H_n(x), \quad Z_{2, n}(x) = J_n(x), \quad b_1 = 1/2(\lambda + 2\mu), \quad b_2 = 1/2$$

Можно показать, что система (5.4) эквивалентна нормальной, а значит, может быть решена редукцией.

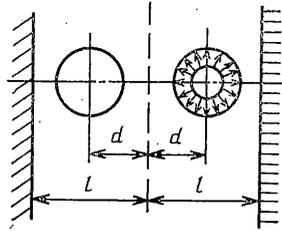
В заключение заметим, что если нагрузка на отверстиях не обладает симметрическими свойствами, то она представима в виде суперпозиции составляющих, преобразующихся по неприводимым представлениям группы симметрии, и задача, таким образом, сводится к суммированию и интегрированию по параметру α решений ряда квазипериодических (квазипериодических) задач [6]. Отметим также, что предложенная методика может быть обобщена на случай гладких выпуклых отверстий произвольной формы. В основном это приводит к изменению формул (1.30), а также матриц T' и T'' .

Рассмотрим ряд примеров.

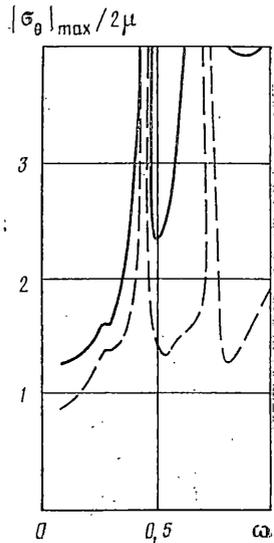
Периодическая задача. Является частным случаем квазипериодической при $\alpha=0$. При симметричной относительно вертикального диаметра нагрузке на отверстия эквивалентна задаче для полосы $-l/2 \leq x \leq l/2$, края которой скользят вдоль абсолютно гладких жестких направляющих. Рассмотрена в [4]. Однако там не было изучено поведение решения при резонансных частотах $\omega_{jk} = c_j 2k\pi/l$ ($j=1, 2$; $k=1, 2, \dots$). На фиг. 4 сплошной линией показан график зависимости $|\sigma_\theta|_{\max}/2\mu$ на контуре отверстия от ω при $l=6$ и амплитудном значении нагрузки, равном 1. Величины l и ω безразмерны. Единицей масштаба длины является радиус отверстия R_0 , а частоты c_2/R_0 . Заметим, что для $\omega=0,169 k$ ($k=3, 4, \dots, 12$) $|\sigma_\theta|_{\max}/2\mu$ принимает максимальные значения в точке E контура отверстия (фиг. 2). Эти значения совпа-



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

дают с приведенными в [1] (упругие постоянные выбраны такими же). Частотам запирания отвечают локальные максимумы графика.

На фиг. 5 показаны линии усредненного за период потока мощности [7, 13] при $\omega=1,77$, соответствующей частоте запирания продольных волн. Видно, что часть потока, излучаемого нагрузкой на отверстия, возвращается обратно. Другая часть, огибая образующиеся вихри, уходит на бесконечность. По-видимому, это объясняется тем, что при отражении от отверстия образуются поперечные волны, для которых полоса на этой частоте прозрачна.

На фиг. 6 приводится для сравнения картина движения потока мощности при $\omega=1,27$, удаленной от резонансных частот. На фиг. 7 приводится ряд эпюр $|\sigma_\theta|/2\mu$ на контуре отверстия для $\omega_1=0,51$ (линия 1), $\omega_2=0,05$, $\omega_3=1,18$, $\omega_4=1,77$. Более сложные эпюры соответствуют резонансным частотам.

Если $d \neq l/2$ задача эквивалентна задаче для полосы шириной $2l$ с гладко опертыми краями и двумя отверстиями. Резонансные частоты определяются по формуле $\omega_{jk} = c_j 2k\pi/l$ ($k=1, 2, \dots$). График зависимости $|\sigma_\theta|_{\max}/2\mu$ от ω при $l=6$, $d=1,5$ приведен штриховой линией на фиг. 5.

Антипериодическая задача. Периодический ряд отверстий загружен единичными нормальными гармоническими нагрузками, фазы которых противоположны у двух рядом расположенных отверстий. Резонансные частоты определяются из формулы $\omega_{jk} = c_j (2k-1)\pi/l$ ($k=1, 2, \dots$). На фиг. 8 сплошной линией показан график зависимости $|\sigma_\theta|_{\max}/2\mu$ от ω .

Если $d \neq l/2$, то $\omega_{jk} = c_j k\pi/l$ ($k=1, 2, \dots$). Штриховая линия на фиг. 8 дает зависимость $|\sigma_\theta|_{\max}/2\mu$ от ω при $l=6$, $d=1,5$.

Задача для полосы с двумя симметрично расположенными отверстиями, левый край которой гладко оперт, а в точках правого края отсутствуют вертикальные перемещения. Одно из отверстий загружено единичным гармоническим давлением (фиг. 9). Эквивалентна задаче для плоскости с системой отверстий, симметричной относительно группы C_{1h}^1 , и нагрузкой, соответствующей двумерному представлению при $\alpha = \pi/2$. Резонансные частоты $\omega_{jk} = c_j |2k\pi + \pi/2|/2l$ ($k=0, 1, 2, \dots$). На фиг. 10 приведены графики $|\sigma_\theta|_{\max}/2\mu(\omega)$ для загруженного (сплошная линия) и незагруженного (штриховая линия) отверстий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1973. 307 с.
3. Кудрявцев Б. А., Паргон В. З. Дуальные тригонометрические ряды в задачах о щелях и штампах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 844-849.
4. Паргон В. З. Плоская задача об установившихся колебаниях для полосы с разрезом // Тр. Моск. ин-та хим. машиностроения. 1972. № 45. С. 84-92.

5. Черевко М. А. Дифракция продольной волны на ряде полых круговых включений // Прикл. механика. Т. 18. № 2. С. 120–123.
6. Фокин В. М. Плоская стационарная динамическая контактная задача периодической структуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 84–94.
7. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. 800 с.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
10. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 303 с.
11. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
13. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

Одесса

Поступила в редакцию
18.V.1990